



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Invariantes de la acción del grupo absoluto de Galois de \mathbb{Q} en dessins d'enfants

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Miguel González González

Tutor: Ernesto Girondo Sirvent

Curso 2021-2022

Resumen

El grupo de los automorfismos de cuerpos de $\overline{\mathbb{Q}}$, conocido también como grupo absoluto de Galois, codifica todos los posibles automorfismos de extensiones algebraicas de los racionales, lo que lo convierte en un objeto de especial interés en áreas como la teoría algebraica de números. No obstante, la gran complejidad del mismo es un impedimento para su estudio. Para comprenderlo mejor, es posible definir una acción del mismo sobre unos objetos conocidos como *dessins d'enfants*, estrechamente relacionados con la teoría de superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas complejas irreducibles. Tales objetos consisten en grafos bipartitos inmersos en superficies topológicas compactas orientables, a priori sin estructura compleja, pero inducen de manera única una estructura de superficie de Riemann sobre el espacio subyacente, así como una función sobre la esfera de Riemann ramificada en tres valores, que resultan cruciales a la hora de definir la acción. En este proyecto se busca estudiar invariantes de esta acción, es decir, propiedades que sean preservadas dentro de cada órbita y que resultan de enorme importancia a la hora de entender la acción. Para ello, se estudiará la teoría necesaria para definir tanto los objetos involucrados como la propia acción y, posteriormente, se presentarán distintos invariantes, desde los más sencillos como el número de vértices del grafo, hasta otros más avanzados como el grupo de monodromía o algunos más recientes como la Z -orientabilidad. Se incluirán asimismo algunos ejemplos de órbitas que pueden distinguirse haciendo uso de ellos.

Abstract

The group of automorphisms of $\overline{\mathbb{Q}}$, also known as absolute Galois group, encodes every possible automorphism of any algebraic extension of the rationals, which turns it into an object of special interest in fields such as algebraic number theory. However, it is not easy to study due to its great complexity. In order to understand it better, it is possible to define an action on objects known as *dessins d'enfants*, closely linked to the theory of compact Riemann surfaces and complex irreducible algebraic curves. These objects consist of bipartite graphs immersed in compact oriented topological surfaces, at first without any complex structure, but they induce a unique Riemann surface structure on the underlying topological space, as well as a function onto the Riemann sphere ramified at three values, aspects which turn into an indispensable element for defining the action. In this project, we seek to study invariants of the action, that is, properties which are preserved within each orbit, resulting in very important tools for the understanding of the action. To achieve this, we shall study the required theory to define the involved objects as well as the action itself, and afterwards we will present several invariants, from the simpler ones such as the number of vertices in the graph, to other more sophisticated ones such as the monodromy group, or more recent ones such as Z -orientability. Some examples of orbits which can be distinguished using them will be also included.

Índice general

1	Introducción	1
2	Superficies de Riemann	3
2.1	Definición geométrica y morfismos	3
2.2	Superficies de Riemann como curvas algebraicas	6
2.3	La acción de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sobre superficies y morfismos	9
2.4	Superficies de Belyi	11
3	Dessins d'Enfants	15
3.1	Definición y relación con las superficies de Riemann	15
3.2	Monodromía	16
3.3	La acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en dessins	19
4	Invariantes de la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en dessins	23
4.1	Funciones de extensión de Belyi	24
4.2	Z-orientabilidad	27
5	Conclusiones	31
	Bibliografía	32
A	Demostraciones adicionales	35
A.1	Lema de extensión única a superficie compacta	35
A.2	Resultados auxiliares sobre curvas algebraicas	36
A.3	Fórmula de Riemann-Hurwitz	36
A.4	Par de Belyi dado por un <i>dessin</i>	37
A.5	Equivalencia entre <i>dessins</i> y representaciones de permutaciones	38
A.6	Resultado auxiliar sobre composiciones de funciones polinómicas	39

CAPÍTULO 1

Introducción

El grupo absoluto de Galois, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, que contiene todos los automorfismos de cuerpos de $\overline{\mathbb{Q}}$, es de gran importancia en ciertos campos como la teoría algebraica de números, al codificar los posibles automorfismos de extensiones algebraicas de los racionales. Sin embargo, se trata de un grupo de gran complejidad, del que no se conocen descripciones explícitas de otros elementos más allá de la identidad y la conjugación compleja. Con el fin de entender mejor su comportamiento, se busca estudiar la acción del mismo en unos objetos conocidos como *dessins d'enfants*, que son ciertos grafos, ideados inicialmente por Grothendieck [6], inmersos en superficies topológicas compactas y orientables. El estudio de los *dessins* en relación al grupo absoluto de Galois está estrechamente ligado al de superficies de Riemann compactas vistas como curvas algebraicas.

En general, es posible establecer una correspondencia entre superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas irreducibles en \mathbb{C} (que a su vez presentan una equivalencia con los cuerpos de funciones en una variable sobre \mathbb{C} , es decir, extensiones de la forma $\mathbb{C}(x, y)$ donde x es trascendente sobre \mathbb{C} , e y es algebraico sobre $\mathbb{C}(x)$). Un importante resultado de Belyi establece que las superficies de Riemann que admiten una representación como curva algebraica con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ son exactamente las que admiten un morfismo sobre la esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$, ramificado únicamente en tres valores. De esta manera, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ puede actuar en dichas superficies, actuando sobre los coeficientes de la curva.

Los *dessins d'enfants* son grafos bipartitos inmersos en superficies topológicas compactas orientables que pueden definirse exactamente sobre las superficies descritas en el párrafo anterior: la existencia del *dessin* induce de manera natural una estructura de superficie de Riemann en el espacio topológico subyacente, así como una función ramificada en tres valores y, recíprocamente, todo par superficie-función de estas características admite un *dessin* asociado. Así, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ actúa naturalmente sobre los *dessins* mediante su acción sobre los coeficientes de la curva algebraica subyacente.

No obstante, a causa de las distintas correspondencias involucradas en la definición de la acción, no es fácil calcular, por ejemplo, cuándo dos *dessins* dados pertenecen a la misma órbita. Es por esto que adquiere importancia la búsqueda de *invariantes*, es decir, propiedades del *dessin* que son preservadas por la acción. Como es natu-

ral, cuantos más invariantes independientes se conozcan, más sencillo será distinguir órbitas de la acción.

El objetivo de este proyecto es estudiar tales invariantes. Algunos de ellos son sencillos tanto de verificar en un *dessin* dado como de establecer su invarianza: el género de la superficie sobre la que descansa el *dessin* o el número de aristas del mismo son algunos ejemplos. Por otro lado, existen otros más avanzados, como el grupo de monodromía, que definiremos y estudiaremos. También se analizarán invariantes de más reciente aparición, como las funciones de extensión de Belyi [9] o la \mathbb{Z} -orientabilidad [4].

Para ello, se sigue la estructura descrita a continuación. En el Capítulo 2 se presenta la teoría necesaria sobre superficies de Riemann, haciendo especial hincapié en el caso compacto, con el fin de establecer los aspectos necesarios para definir posteriormente los *dessins* y la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Algunos aspectos básicos se presentan desde el punto de vista geométrico, pero rápidamente aparece el punto de vista algebraico que, naturalmente, es necesario para describir la acción. En el Capítulo 3 se estudian los aspectos principales de la teoría de *dessins d'enfants*, se define la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ y se presentan algunos ejemplos y propiedades de la misma. El Capítulo 4 está dedicado al estudio de los invariantes. En primer lugar, se tratan aquellos que pueden ser descritos directamente sin ningún material adicional y, a continuación, se estudian otros de aparición más reciente, motivados por la existencia de órbitas que no pueden ser distinguidas con los invariantes anteriores: la Sección 4.1 está dedicada a las funciones de extensión de Belyi, mientras que en la Sección 4.2 se estudia la \mathbb{Z} -orientabilidad. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo en el Capítulo 5. Con el fin de evitar desviar el hilo central del texto, algunas demostraciones que no son estrictamente necesarias para el estudio de los invariantes, pero que de otro modo resultan de interés matemático, se han relegado al Apéndice A.

CAPÍTULO 2

Superficies de Riemann

2.1. Definición geométrica y morfismos

Definición 2.1. Una **superficie topológica** es un espacio topológico X , con base numerable y Hausdorff, dotado de una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, donde cada U_i es un abierto de X , cada $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i)$ es un homeomorfismo sobre un abierto $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}$ y además $X \subseteq \bigcup_i U_i$.

Cada uno de los pares (U_i, φ_i) se denomina **carta** y \mathcal{A} se denomina **atlas**.

Definición 2.2. Una **superficie de Riemann** es una superficie topológica (X, \mathcal{A}) tal que para cada par de índices i, j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se verifica que el *cambio de cartas* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un biholomorfismo.

En adelante, usaremos la notación S para referirnos a una superficie de Riemann, en lugar de escribir (X, \mathcal{A}) de manera explícita. Asimismo, se asumirá que las superficies de Riemann son conexas salvo que se indique lo contrario.

Ejemplo 2.3. La **esfera de Riemann**, $\widehat{\mathbb{C}}$, es una superficie de Riemann que se define sobre el espacio topológico $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde los entornos abiertos de ∞ son aquellos de la forma $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Las cartas son (\mathbb{C}, φ_1) y $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \varphi_2)$, donde $\varphi_1(z) = z$ y $\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq \infty \\ 0 & z = \infty \end{cases}$. El cambio de carta es $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, que es un biholomorfismo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en sí mismo.

A través de las cartas es posible definir distintas nociones de análisis complejo sobre una superficie de Riemann:

Definición 2.4. Sea S una superficie de Riemann y $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación. Se dice que f es **holomorfa** (respectivamente, **meromorfa**) si, dada cualquier carta (U, φ) en S , la composición $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa (respectivamente, meromorfa).

Cabe observar que el conjunto de funciones meromorfas de una superficie S tiene estructura natural de cuerpo, que denotaremos $\mathcal{M}(S)$. A través de las cartas también es posible definir la noción de morfismo en la categoría de las superficies de Riemann utilizando las expresiones dadas por las cartas:

Definición 2.5. Sean S_1, S_2 dos superficies de Riemann y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación. Se dice que f es un **morfismo** si, dadas cartas cualesquiera (U, ϕ) y (V, ψ) en S_1 y S_2 respectivamente, la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

Si f es un morfismo biyectivo y f^{-1} también es un morfismo, se dice que f es un **isomorfismo**. Si, además, $S_1 = S_2$, se dice que f es un **automorfismo**.

Es fácil comprobar que el conjunto de automorfismos de una superficie de Riemann dada S adquiere estructura de grupo con la operación de composición. Este grupo se denota $\text{Aut}(S)$. Asimismo, se sigue de las dos definiciones anteriores que una función meromorfa $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ puede verse como un morfismo entre S y $\widehat{\mathbb{C}}$, haciendo que tome el valor $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ en los polos.

A continuación, vamos a estudiar cómo un morfismo no constante $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies compactas aplica la superficie S_1 sobre S_2 . En primer lugar, cada una de las expresiones locales $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es no constante y abierta (al ser holomorfa), de tal modo que $f(S_1) \subset S_2$ es abierto, pero también cerrado por ser S_1 compacto y S_2 Hausdorff. De la conexión de S_2 sigue entonces que $f(S_1) = S_2$, de modo que la aplicación es sobreyectiva. A continuación veremos, de hecho, que en la mayoría de puntos la expresión en cartas es de la forma $z \mapsto az$, de modo que localmente S_1 se aplica biyectivamente sobre S_2 . De esto deduciremos que, retirando los puntos problemáticos, f es una aplicación recubridora (en el sentido topológico).

Definición 2.6. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un morfismo. Sea $p \in S_1$, (U, φ) una carta en S_1 con $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ y (V, ψ) una carta en S_2 con $f(p) \in V$, $\psi(f(p)) = 0$. Consideramos el desarrollo en serie alrededor del 0:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, \text{ con } a_n \neq 0.$$

Obsérvese que $n > 0$ dado que la función se anula en $z = 0$. El entero positivo n se denomina **multiplicidad de f en p** y se denota $m_p(f)$. Los puntos $p \in S_1$ tales que $m_p(f) > 1$ se denominan **puntos de ramificación** y sus imágenes **valores de ramificación**. En el caso particular en que $S_2 = \widehat{\mathbb{C}}$, f es una función meromorfa en S_1 y por tanto puede considerarse el desarrollo en serie alrededor del 0 de $f \circ \varphi^{-1}(z)$. El valor entero resultante en este caso se denomina el **orden de f en p** y se denota $\text{ord}_p(f)$. Nótese que será positivo si f tiene un cero en p , negativo si tiene un polo, y 0 en otro caso.

Es fácil ver que la definición no depende de las cartas escogidas gracias a que los cambios de carta son biholomorfismos. Salvo en los puntos de ramificación, f actúa localmente de manera biyectiva como consecuencia del teorema de la función inversa.

Proposición 2.7. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un morfismo no constante. El subconjunto de S_1 formado por los puntos de ramificación de f es discreto.

Demostración. Dadas (U, φ) una carta en S_1 y (V, ψ) una carta en S_2 , los puntos de ramificación $p \in U$ son aquellos tales que la derivada de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ se anula en $\varphi(p)$ (dado que, componiendo estas cartas con traslaciones para centrarlas en p y $f(p)$, se tiene la expresión local $z \mapsto a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$, con $n \geq 2$, cuya derivada se anula

en 0). Con esta observación, la proposición sigue directamente del principio de los ceros aislados. \square

Como consecuencia, si S_1 es compacta, entonces el conjunto de puntos de ramificación es finito. Con esto, es posible enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.8. *Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un morfismo no constante entre superficies de Riemann compactas. Sea $\Sigma \subset S_1$ el conjunto (finito) de puntos de ramificación. Sean $S_1^* = S_1 \setminus \Sigma$ y $S_2^* = S_2 \setminus f(\Sigma)$. Entonces, la restricción $f : S_1^* \rightarrow S_2^*$ es una aplicación recubridora de grado d , que verifica, fijado cualquier $q \in S_2$, que $d = \sum_{p \in f^{-1}(q)} m_p(f)$.*

Demostración. Sean $q \in S_2^*$ y $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\} \subset S_1^*$ (la preimagen es finita por ser discreta, de nuevo por el principio de los ceros aislados, y S_2 compacta). Como ninguno de los puntos p_j es de ramificación, la derivada de la expresión local alrededor de p_j no se anula y por tanto f es un homeomorfismo local en esos puntos, es decir, pueden encontrarse abiertos $U_j \subset S_1^*$ y $V \subset S_2^*$, con $p_j \in U_j$ y $q \in V$, tales que $f|_{U_j} : U_j \rightarrow V$ es un homeomorfismo. Además, por ser S_1^* Hausdorff, los U_j pueden tomarse disjuntos. Ahora queda probar que, de hecho, el V puede escogerse como para que $f^{-1}(V) = \bigsqcup_j U_j$. En caso contrario, habría una sucesión $\{q_n\}_n \subset S_2^*$ con $q_n \rightarrow q$ pero $f^{-1}(q_n) \not\subset \bigsqcup_j U_j$. Si ahora escogemos $p'_n \in f^{-1}(q_n) \setminus \bigsqcup_j U_j$, y p' un punto de acumulación de p'_n , por continuidad de f sigue que $f(p') = q$, de modo que $p' \in \bigsqcup_j U_j$, lo que contradice que p' sea de acumulación de los p'_n .

Si q no es de ramificación, el hecho de que el grado del recubrimiento sea la suma de las multiplicidades de una preimagen $f^{-1}(q)$ dada es evidente (por definición de grado). Por el contrario, si q es de ramificación, el resultado sigue del lema a continuación:

Lema 2.9. *Con la notación del Teorema 2.8, dado $q \in S_2$ y siendo $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$, se tienen entornos V de q y U_j de p_j tales que $f^{-1}(V) = \bigsqcup_j U_j$, cada U_j es isomorfo a un disco, y $f|_{U_j}$ es de la forma $z \mapsto z^{m_{p_j}(f)}$.*

Este lema generaliza lo que hemos probado cuando q no era de ramificación y establece, intuitivamente, que en los puntos de ramificación la superficie S_1 se aplica localmente sobre S_2 de manera *m-a-uno*, de un modo similar a *elevantar a la m* en \mathbb{C} , con m la multiplicidad del punto en cuestión. La demostración detallada del lema requiere de teoría de espacios recubridores y puede consultarse en la sección 1.2.6 de [3]. Para completar la demostración del teorema 2.8 para un valor de ramificación $q \in S_2$, basta con tomar los U_j y V del lema y, eligiendo un $q' \in V$ que no sea de ramificación, observar que tiene $m_{p_j}(f)$ preimágenes en U_j . Como la suma del número total de preimágenes de q' es el grado d , hemos acabado. \square

Este resultado motiva la siguiente definición:

Definición 2.10. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un morfismo no constante entre superficies de Riemann compactas. Se define el **grado** de f como:

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} m_p(f),$$

fijado un $q \in S_2$ arbitrario.

Para poder observar las superficies de Riemann desde un punto de vista algebraico, el último resultado necesario es un lema de *compactificación*, que permite obtener una superficie de Riemann compacta extendiendo un morfismo no ramificado sobre otra superficie compacta a la que se le ha retirado una cantidad finita de puntos.

Lema 2.11. *Sea Y una superficie de Riemann compacta y $\Sigma \subset Y$ un conjunto finito de puntos. Sea $Y^* = Y \setminus \Sigma$. Si existe un morfismo $f^* : X^* \rightarrow Y^*$ sin puntos de ramificación, entonces existe una única superficie de Riemann compacta X , con $X^* \subset X$ y tal que se tiene un morfismo $f : X \rightarrow Y$ que hace conmutar el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{f^*} & Y^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} .$$

La demostración puede consultarse en el apéndice [A.1](#).

2.2. Superficies de Riemann como curvas algebraicas

En la presente sección se busca establecer una correspondencia entre el conjunto de las superficies de Riemann compactas y el conjunto de las curvas algebraicas irreducibles, es decir, conjuntos de ceros de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X, Y]$. El objetivo de esta correspondencia es que sea posible hacer actuar a los automorfismos de \mathbb{C} sobre las superficies de Riemann. Comenzamos presentando un resultado auxiliar:

Lema 2.12. *Sean $F, G \in \mathbb{C}[X, Y]$. Consideramos las curvas $\mathcal{C}_F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0\}$ y $\mathcal{C}_G = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : G(x, y) = 0\}$.*

1. *Si F y G son coprimos, entonces $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_G$ es un conjunto finito.*
2. *Si F es irreducible y $G(\mathcal{C}_F) = \{0\}$, entonces $F \mid G$.*

El punto 1 sigue del teorema de Bézout, mientras que 2 sigue del teorema de los ceros de Hilbert. Una demostración independiente para estos resultados debilitados puede encontrarse en el apéndice [A.2](#).

A continuación, consideraremos una curva algebraica irreducible y construiremos una superficie de Riemann compacta asociada a ella. La estrategia a grandes rasgos es obtener la estructura compleja mediante el teorema de la función implícita, lo que puede hacerse salvo en una cantidad finita de puntos. Después, utilizando el Lema [2.11](#), completaremos los puntos faltantes para cubrir toda la curva, además de los que sean necesarios para que el espacio resultante sea compacto.

Teorema 2.13. *Sea $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreducible, que escribimos como $F(X, Y) = \sum_{i=0}^n p_i(X)Y^i$. Denotamos $F_Y(X, Y) := \sum_{i=1}^n ip_i(X)Y^{i-1}$ la derivada con respecto a Y . Si $n \geq 1$, sea:*

$$S_F^X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0, F_Y(x, y) \neq 0, p_n(x) \neq 0\}.$$

Se tiene que:

1. S_F^X es una superficie de Riemann tal que la proyección $\mathbf{x} : S_F^X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un morfismo no ramificado.
2. Existe una única superficie de Riemann compacta, denotada por S_F , tal que $S_F^X \subset S_F$. Además, \mathbf{x} extiende a una función meromorfa en S_F .

Demostración. La estructura de superficie de Riemann en S_F^X viene dada por las cartas obtenidas de aplicar el teorema de la función implícita en cada uno de los puntos, obteniendo localmente y como función holomorfa de x y utilizando para ello que $F_Y(x, y) \neq 0$. De esta manera, resulta claro que la proyección \mathbf{x} es un morfismo no ramificado (puesto que en coordenadas locales no es más que la identidad, que es holomorfa y además garantiza que la multiplicidad sea 1). Asimismo, observamos que los puntos de la curva $F(x, y) = 0$ en los que $p_n(x) = 0$ son un conjunto finito, dado que existen a lo sumo $\deg p_n(X)$ valores distintos de x en los que eso ocurre, y para cada uno de ellos el polinomio resultante en Y tendrá una cantidad finita de raíces. Del mismo modo, $F(x, y) = F_Y(x, y) = 0$ solo ocurre en una cantidad finita de puntos por la irreducibilidad de F y el primer punto del Lema 2.12. De esta manera, S_F^X carece únicamente de un número finito de puntos de la curva $F(x, y) = 0$ y, por tanto, $\mathbf{x}(S_F^X) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$. El punto 2 sigue ahora de aplicar el Lema 2.11 a \mathbf{x} , y recordando que un morfismo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es equivalente a una función meromorfa. \square

Cabe observar que puede reformularse el teorema en términos de Y en lugar de X (despejando x en función de y , considerando la proyección \mathbf{y} y obteniendo la superficie S_F^Y). No obstante, la compactificación S_F es la misma puesto que S_F^X y S_F^Y coinciden salvo en un número finito de puntos (ambas resultan de quitar una cantidad finita de puntos a la curva completa), luego el Lema 2.11 garantiza unicidad para S_F .

A continuación, mostraremos la correspondencia en sentido contrario, es decir, dada una superficie de Riemann compacta S , veremos que puede obtenerse un polinomio irreducible $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ de modo que $S_F \simeq S$. Para ello, primero es necesario entender el cuerpo de funciones meromorfas de S :

Proposición 2.14. *Sea S una superficie de Riemann compacta y sea $f \in \mathcal{M}(S)$ una aplicación meromorfa de grado $\deg f = n$ (como morfismo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$). Entonces $\mathbb{C}(f) \subset \mathcal{M}(S)$ es una extensión de cuerpos finita de grado menor o igual que n y, por tanto, $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(f, h)$ para cierto $h \in \mathcal{M}(S)$.*

Demostración. Basta con ver que todo $h \in \mathcal{M}(S)$ satisface un polinomio con coeficientes en \mathbb{C} cuyo grado está acotado superiormente por n . Esto es así porque entonces, si $M(S)/\mathbb{C}(f)$ fuese infinita, podría construirse una torre de cuerpos:

$$\mathbb{C}(f) \subsetneq \mathbb{C}(f, h_1) \subsetneq \mathbb{C}(f, h_1, h_2) \subsetneq \dots,$$

todos ellos contenidos estrictamente en $M(S)$, y tales que $[\mathbb{C}(f, h_1, \dots, h_k) : \mathbb{C}(f)] \geq 2^k$ (porque el grado de cada paso al siguiente es 2 o más). Por el teorema del elemento primitivo, esto garantizaría la existencia de elementos de grado mayor o igual que 2^k sobre $\mathbb{C}(f)$, contradiciendo que esté acotado por n .

Para demostrar ahora esta cota, sea $x \in \widehat{\mathbb{C}}$ y $y_1(x), \dots, y_n(x)$ los elementos de $f^{-1}(x)$, repetidos según su multiplicidad. Como f no es necesariamente una aplicación

recubridora, las funciones y_1, \dots, y_n no están bien definidas globalmente (dado que no existe una manera coherente de asignar cada índice a cada preimagen), pero sí lo están las funciones simétricas $b_1(x) = \sum_i h(y_i(x))$, $b_2(x) = \sum_{i,j} h(y_i(x))h(y_j(x))$, \dots , $b_n(x) = \prod h(y_i(x))$. Definimos ahora el polinomio $P(Y) = \sum (-1)^k b_k(f) Y^{n-k}$. Se afirma que $P(h) = 0$. En efecto, dado $p \in S$ arbitrario:

$$P(h)(p) = \sum (-1)^k b_k(f(p)) h^{n-k}(p) = \prod (h(p) - h(y_i(f(p)))) = 0,$$

pues cierto $y_i(f(p))$ es precisamente p , como se quería. \square

Entendido esto, es posible ahora enunciar la dirección de la correspondencia que faltaba:

Teorema 2.15. *Sea S una superficie de Riemann compacta y sea $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(f, h)$ su cuerpo de funciones meromorfas. Sea $F(X, Y)$ un polinomio irreducible con $F(f, h) \equiv 0$ (existente por ser h algebraico sobre $\mathbb{C}(f)$). Entonces, la siguiente regla:*

$$\begin{aligned} \Phi : S &\longrightarrow S_F \\ P &\longmapsto (f(P), h(P)) \end{aligned}$$

define un isomorfismo.

La idea de la demostración es como sigue: sabemos que $\mathbf{x}(S_F^X) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ con B finito. Si escribimos $S_0 = S \setminus f^{-1}(B)$, entonces la regla descrita en el teorema define claramente una aplicación Φ_0 entre S_0 y S_F^X , dado que si $P \in S_0$, entonces $f(P) \notin B$ luego, como $F(f(P), h(P)) = 0$ por hipótesis, debe ser que $(f(P), h(P)) \in S_F^X$. Para concluir, se demuestra que Φ_0 es de hecho un morfismo (lo que sigue de que $f = \mathbf{x} \circ \Phi_0$), se completa para que sea entre S y S_F usando el Lema 2.11 y, finalmente, se argumenta que es un isomorfismo viendo que, en caso contrario, habría dos puntos $P_1, P_2 \in S$ en los que toda función meromorfa coincide, cosa que puede demostrarse que no ocurre mediante la teoría de uniformización de superficies de Riemann. Para esto último, puede consultarse la sección 2.2 de [3], y para la demostración detallada del teorema, la sección 1.3 de la misma referencia. Finalmente, cabe observar que F no es necesariamente único, al depender de la elección de f y h .

Puesto que f, h se identifican con \mathbf{x}, \mathbf{y} a través del isomorfismo, sigue que $\mathcal{M}(S_F) = \mathbb{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Es decir, una función meromorfa en S_F puede escribirse como $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{P(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, con $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ y $Q \notin (F)$ para evitar que el denominador sea idénticamente nulo. Una idea similar permite describir de manera algebraica los morfismos entre dos superficies cualesquiera:

Teorema 2.16. *Sean S_F, S_G, S_D superficies de Riemann.*

1. *Existe una correspondencia entre morfismos $f : S_F \rightarrow S_G$ y pares de funciones racionales $(R_1(X, Y) = \frac{P_1(X, Y)}{Q_1(X, Y)}, R_2(X, Y) = \frac{P_2(X, Y)}{Q_2(X, Y)})$, con $P_i, Q_i \in \mathbb{C}[X, Y]$, $Q_i \notin (F)$ y tales que*

$$(2.1) \quad F \mid Q_1^n Q_2^m G(R_1, R_2),$$

donde $n = \deg_X G$ y $m = \deg_Y G$.

2. Si $f : S_F \rightarrow S_G$, $h : S_G \rightarrow S_D$ y $u : S_F \rightarrow S_D$ son tres morfismos asociados a los pares (R_1, R_2) , $(W_1 = \frac{U_1}{V_1}, W_2 = \frac{U_2}{V_2})$ y $(Z_1 = \frac{L_1}{M_1}, Z_2 = \frac{L_2}{M_2})$, entonces $u = h \circ f$ equivale a las siguientes condiciones algebraicas:

$$(2.2) \quad F \mid Q_1^{d_i} Q_2^{k_i} (U_i(R_1, R_2)M_i - V_i(R_1, R_2)L_i) \quad i = 1, 2,$$

donde d_i, k_i son los menores exponentes que hacen que el lado derecho sea un polinomio.

3. Si $f : S_F \rightarrow S_G$ es el morfismo asociado al par (R_1, R_2) , el hecho de que f sea un isomorfismo equivale a la existencia de otro par (W_1, W_2) que satisfaga (2.1) con G y F intercambiados, así como (2.2) para $M_1 = M_2 = 1$, $L_1 = X$, $L_2 = Y$.

Demostración. A partir del morfismo f se obtienen, proyectando con \mathbf{x}_G y \mathbf{y}_G , dos funciones meromorfas en S_F , $\mathbf{x}_G \circ f$ y $\mathbf{y}_G \circ f$, que sabemos corresponden a dos funciones racionales (R_1, R_2) que verifican $G(R_1(x, y), R_2(x, y)) = 0$ en los puntos de $F(x, y) = 0$ por construcción. Quitando denominadores se obtiene la expresión del lado derecho de (2.1) anulándose en $F(x, y) = 0$, de modo que basta con aplicar el segundo punto del Lema 2.12 para deducir (2.1). Por otro lado, comenzando desde el par (R_1, R_2) , sabemos que equivale a dos funciones meromorfas f_1, f_2 en S_F . Si el par satisface 2.1, se tiene además que $G(f_1, f_2) \equiv 0$. Entonces, la regla $P \mapsto (f_1(P), f_2(P))$ define un morfismo entre S_F y S_G por un argumento idéntico a la primera parte de la demostración del Teorema 2.15.

El punto 2 del teorema se demuestra calculando la composición mediante los pares (R_1, R_2) , (W_1, W_2) y forzando a que sea igual a (Z_1, Z_2) en S_F , lo que resulta en la condición (2.2), de nuevo mediante el Lema 2.12. Finalmente, el punto 3 equivale, en vista de 1 y 2, a pedir que haya un morfismo $h : S_G \rightarrow S_F$ que además cumpla $h \circ f = \text{Id}$. \square

2.3. La acción de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sobre superficies y morfismos

Una vez identificadas las superficies de Riemann y sus morfismos con polinomios en $\mathbb{C}[X, Y]$, es posible hacer que los automorfismos $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ actúen en pares (S, f) aplicándolos en los coeficientes.

Definición 2.17. Sea $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Dado un polinomio $P = \sum a_{ij} X^i Y^j \in \mathbb{C}[X, Y]$, denotamos $P^\sigma = \sum \sigma(a_{ij}) X^i Y^j$. De esta manera, σ actúa en polinomios y, por extensión natural, en funciones racionales. La **acción de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ en superficies y morfismos** queda definida como sigue:

1. Dada una superficie $S \simeq S_F$, se define $S^\sigma \simeq S_{F^\sigma}$.
2. Dado un morfismo $f : S_F \rightarrow S_G$ asociado a las funciones racionales (R_1, R_2) , se define $f^\sigma : S_{F^\sigma} \rightarrow S_{G^\sigma}$ como el dado por (R_1^σ, R_2^σ) .

La acción está bien definida: en primer lugar, si $f : S_F \rightarrow S_G$ es un morfismo, entonces $f^\sigma : S_{F^\sigma} \rightarrow S_{G^\sigma}$ también. Esto es así porque como σ es un automorfismo, si (R_1, R_2) verifican (2.1) para F y G , entonces (R_1^σ, R_2^σ) lo hacen para F^σ y G^σ aplicando σ a ambos lados de la expresión. Por otro lado, veamos que la acción sobre superficies está bien definida, es decir, si $S \simeq S_{F_1} \simeq S_{F_2}$, entonces $S_{F_1^\sigma} \simeq S_{F_2^\sigma}$. Basta con considerar el isomorfismo $f : S_{F_1} \rightarrow S_{F_2}$, que verifica que $f^\sigma : S_{F_1^\sigma} \rightarrow S_{F_2^\sigma}$ es también un isomorfismo: ya sabemos que es un morfismo y, de nuevo, la condición 3 del Teorema 2.16 se consigue para f^σ aplicando σ a la de f . Cabe observar también que $(g \circ f)^\sigma = g^\sigma \circ f^\sigma$, aplicando σ a la condición (2.2).

Es posible también establecer una correspondencia entre los puntos de S y los de S^σ . Intuitivamente, si $S \simeq S_F$, entonces al punto $(x, y) \in S_F^X$ de la curva $\{F = 0\}$ se le hace corresponder el $(\sigma(x), \sigma(y))$ de $S_{F^\sigma}^X$ en la curva $\{F^\sigma = 0\}$. Ahora, faltaría extender la correspondencia a las superficies compactas S_F y S_{F^σ} . Esto puede hacerse de manera natural mediante la teoría de valoraciones como se explica en la sección 3.4 de [3], lo que finalmente resulta en la siguiente correspondencia biyectiva bien definida:

Definición 2.18. Sean S una superficie de Riemann compacta y $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Dado $p \in S$, se define $p^\sigma \in S^\sigma$ como el único punto que verifica $\text{ord}_p(f) = \text{ord}_{p^\sigma}(f^\sigma)$ en toda $f \in \mathcal{M}(S)$.

La inversa está dada por la biyección análoga para σ^{-1} . Esta aplicación entre S y S^σ no es un morfismo de superficies de Riemann dada la naturaleza no continua de los automorfismos de \mathbb{C} (a excepción de la conjugación compleja). Por tanto, S y S^σ no son en general isomorfas. Sin embargo, existen algunas propiedades sencillas que son preservadas por la acción:

Proposición 2.19. Sea S una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{M}(S)$. Entonces:

1. $m_p(f) = m_{p^\sigma}(f^\sigma)$, viendo f como morfismo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.
2. $f(p)^\sigma = f^\sigma(p^\sigma)$ y, por tanto, $\sigma(f^{-1}(q)) = (f^\sigma)^{-1}(q^\sigma)$.
3. $q \in \widehat{\mathbb{C}}$ es valor de ramificación de $f \iff q^\sigma$ es valor de ramificación de f^σ .
4. $\deg(f) = \deg(f^\sigma)$.
5. El género de S es el mismo que el de S^σ .
6. Si $\text{Aut}(S, f)$ es el grupo de automorfismos de $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, es decir, aquellos $h \in \text{Aut}(S)$ tales que $f = f \circ h$, entonces $\text{Aut}(S, f) \simeq \text{Aut}(S^\sigma, f^\sigma)$.

Demostración. El punto 1 es inmediato por la definición de la acción de σ en puntos: si $\text{ord}_p(f) = \text{ord}_{p^\sigma}(f^\sigma)$ como funciones meromorfas, entonces $m_p(f) = m_{p^\sigma}(f^\sigma)$ como morfismos. Para 2, veremos en primer lugar que $q = f(p)$ es el único valor tal que

$$(2.3) \quad \text{ord}_p(R \circ f) = m_p(f) \cdot \text{ord}_q(R)$$

para toda función racional $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Por un lado, dadas cartas (U, φ) en S y (V, ψ) en $\widehat{\mathbb{C}}$ centradas en p y $f(p)$, respectivamente, $\text{ord}_p(R \circ f)$ se obtiene atendiendo a la serie de Laurent de $R \circ f \circ \varphi^{-1}$ en 0, pero esta puede obtenerse observando que $R \circ f \circ \varphi^{-1} = R \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y componiendo en consecuencia las series de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $R \circ \psi^{-1}$ en 0, de donde sigue que (2.3) se cumple para $q = f(p)$. Para ver que es el único valor de q que verifica eso, basta con escoger la función racional $R(x) = x - f(p)$, y entonces $\text{ord}_p(R \circ f) = \text{ord}_p(f - f(p)) > 0$, mientras que $\text{ord}_q(R)$ solo es no nulo en $q = f(p)$. Una vez probado esto, deducimos que como $\text{ord}_{p^\sigma}(R^\sigma \circ f^\sigma) = \text{ord}_p(R \circ f) = m_p(f) \cdot \text{ord}_{f(p)}(R) = m_{p^\sigma}(f^\sigma) \cdot \text{ord}_{f(p)^\sigma}(R^\sigma)$, debe ser entonces que $f^\sigma(p^\sigma) = f(p)^\sigma$.

Por la correspondencia entre preimágenes que establece 2, se tienen inmediatamente 3 y 4. El punto 5 sigue del hecho de que, conocidos el grado y multiplicidades de todos los puntos de una función meromorfa f definida en S , el género de S queda totalmente determinado. Esto se conoce como fórmula de Riemann-Hurwitz y puede consultarse en el apéndice A.3. Finalmente, para el punto 6, observamos que si $h \in \text{Aut}(S, f)$, es decir, $f = f \circ h$, entonces $f^\sigma = (f \circ h)^\sigma = f^\sigma \circ h^\sigma$, de modo que la regla $h \mapsto h^\sigma$, compatible con la composición e invertible mediante σ^{-1} , es un isomorfismo de $\text{Aut}(S, f)$ en $\text{Aut}(S^\sigma, f^\sigma)$. \square

2.4. Superficies de Belyi

Para concluir el capítulo, estableceremos una conexión entre dos tipos de objetos de gran relevancia para el tema a estudio. Por un lado, tenemos las superficies de Riemann compactas S que admiten una función meromorfa f ramificada en (a lo sumo) tres valores, denominada **función de Belyi**. Tales superficies se denominan **superficies de Belyi** y son exactamente aquellas en las que será posible construir un *dessin d'enfant*.

Definición 2.20. Un **par de Belyi** es un par (S, f) donde S es una superficie de Riemann compacta y $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa con a lo sumo tres valores de ramificación.

Diremos que dos pares de Belyi (S_1, f_1) y (S_2, f_2) son equivalentes si existe un isomorfismo $h : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $f_1 = f_2 \circ h$.

Por otro lado, están las superficies que pueden escribirse como S_F , donde $F \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y] \subset \mathbb{C}[X, Y]$. En ellas podrá actuar $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, grupo cuya acción se busca comprender. El importante resultado que pone en contacto ambas clases de objetos se enuncia con notable sencillez:

Teorema 2.21 (Belyi). *Sea S una superficie de Riemann compacta. Son equivalentes:*

1. S puede definirse sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, es decir, $S \simeq S_F$ con $F \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$.
2. S admite una función meromorfa f ramificada en a lo sumo tres valores.

Veamos, en primer lugar, un ejemplo:

Ejemplo 2.22. Consideramos la superficie S_F definida a partir de $F(X, Y) = Y^2 - X^3 + \pi^3$. Los coeficientes de F están en $\mathbb{Q}(\pi) \not\subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, pero esto no descarta que S_F pueda definirse sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. De hecho, considerando la superficie S_G que proviene de $G(X, Y) = Y^2 - X^3 + 1 \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$, se tiene que la regla:

$$S_F \longrightarrow S_G$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{\pi}, \frac{y}{\pi\sqrt{\pi}} \right),$$

define un isomorfismo, correspondiente a los datos $P_1 = X$, $Q_1 = \pi$, $P_2 = Y$, $Q_2 = \pi\sqrt{\pi}$, $U_1 = \pi X$, $V_1 = 1$, $U_2 = \pi\sqrt{\pi}Y$, $V_2 = 1$, con la notación del Teorema 2.16.

Ahora, para verificar que se cumple el Teorema de Belyi en este ejemplo, buscamos una función meromorfa en S_G ramificada en tres valores. Comenzamos considerando la proyección $\mathbf{x} : S_G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Según lo desarrollado en el teorema 2.13 y su demostración, los valores de ramificación son ∞ y las proyecciones de las raíces comunes de $G(X, Y)$ y $G_Y(X, Y) = 2Y$. Dichas raíces son $(1, 0)$, $(\zeta, 0)$ y $(\zeta^2, 0)$, con $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, luego el conjunto de valores de ramificación es $\{\infty, 1, \zeta, \zeta^2\}$. Con el fin de reducir el tamaño de este conjunto y aprovechando la naturaleza algebraica de los valores que han aparecido, componemos a continuación con la función $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por $x \rightarrow x^3 - 1$, obtenida mediante los polinomios mínimos de ζ , ζ^2 y 1 (en este caso, multiplicando $x^2 + x + 1$, que es el de ζ y ζ^2 , con $x - 1$, que es el de 1) para que anule esos valores. La composición tendrá como valores de ramificación, en consecuencia de (2.3), las imágenes de los valores de ramificación previos, junto a los nuevos que aparezcan como imágenes de los puntos críticos de g , que son 0 e ∞ . Estos valores resultan ser $\{0, \infty, -1\}$, y hemos acabado.

El argumento general para demostrar $1 \implies 2$ en el Teorema 2.21 comienza como en el ejemplo previo: se empieza por la función \mathbf{x} , cuyo conjunto de valores de ramificación, B_0 , estará en $\overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$. Acto seguido, se compone con p_0 , el producto (evitando repetir factores) de los polinomios mínimos de los elementos en $\overline{\mathbb{Q}} \cap B_0$, que cumple entonces que $p_0(B_0) = \{0, \infty\}$. Así, el nuevo conjunto de valores de ramificación es $B_1 = \{0, \infty\} \cup p_0(\{x \in \mathbb{C} : p'_0(x) = 0\})$. Ahora, se repite el proceso componiendo con p_1 , el producto (evitando repetir factores) de los polinomios mínimos de los elementos de $B_1 \setminus \{0, \infty\}$, que verifica $\deg p_1 \leq \deg p'_0 < \deg p_0$ al ser p_1 el polinomio de menor grado que se anula en los ceros de p'_0 . Después, se continúa iterativamente hasta que en algún paso se tiene $B_k \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Esto ha de ocurrir dado que, al descender el grado de los polinomios p_j , lo hace el grado de las extensiones $\mathbb{Q}(B_k \setminus \{\infty\})/\mathbb{Q}$.

Ahora, a diferencia de lo sucedido en el ejemplo, es posible que existan más de tres valores en B_k . En ese caso, se tiene, componiendo con una transformación de Möbius adecuada para enviar tres de los valores de ramificación en $\{0, 1, \infty\}$, que $B_k = \{0, 1, \infty, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Componiendo con los isomorfismos $x \mapsto 1 - x$ y/o $x \mapsto \frac{1}{x}$ si es necesario, puede asumirse adicionalmente que $0 < \lambda_1 < 1$, de modo que $\lambda_1 = \frac{m}{n+m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Para terminar, basta con considerar qué ocurre al componer ahora con la función

$$P_{m,n}(x) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} x^m (1-x)^n.$$

Un sencillo cálculo revela que $P_{m,n}(B_k) = \{0, 1, \infty, P_{m,n}(\lambda_2), \dots, P_{m,n}(\lambda_n)\} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ y, calculando la derivada, $P_{m,n}$ solo ramifica en $0, 1, \infty$ y λ_1 , de modo que no añade nuevos valores de ramificación. En otras palabras, con esta función consigue reducirse el tamaño del conjunto de valores de ramificación en uno, de modo que basta con iterar hasta reducirlo a $\{0, 1, \infty\}$, lo que concluye la demostración.

Por otro lado, la demostración de $2 \implies 1$ es de mayor complicación al no ser fácil determinar cuándo una superficie de Riemann S es definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (como se ha mostrado en el ejemplo anterior, no basta con mirar a los coeficientes de un polinomio cualquiera que dé lugar a S). Un posible criterio, demostrado en [5], es el siguiente:

Lema 2.23. *Sea S una superficie de Riemann compacta. Son equivalentes:*

1. S puede definirse sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.
2. El conjunto $\{S^\sigma : \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\}$ contiene una cantidad finita de clases de isomorfía.

Para concluir entonces la demostración del Teorema de Belyi, será necesario utilizar la monodromía de los morfismos f^σ , concepto que se explicará con más detalle en la sección 3.2. Por el momento, basta con saber que si $n = \deg(f) = \deg(f^\sigma)$, entonces la monodromía permite asociar a cualquier f^σ un homomorfismo de grupos M_{f^σ} del grupo libre en dos generadores en el grupo de permutaciones Σ_n , y se cumple que si f^σ y f^τ tienen los mismos valores de ramificación y $M_{f^\sigma} = M_{f^\tau}$, entonces $S^\sigma \simeq S^\tau$.

Supongamos entonces que S admite una función meromorfa f con (a lo sumo) tres valores de ramificación, que podemos asumir en \mathbb{Q} componiendo con una transformación de Möbius si es necesario. Entonces, dado $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, sabemos que f^σ es una función meromorfa en S^σ con los mismos valores de ramificación que f , puesto que σ fija \mathbb{Q} . Entonces, como Σ_n es finito, hay una cantidad finita de homomorfismos del grupo libre en dos generadores en Σ_n . Como, además, los valores de ramificación de todas las f^σ siempre son los mismos, sigue que las S^σ pueden agruparse en un número finito de clases de isomorfía, y hemos acabado. \square

Concluimos la sección con el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [5]:

Proposición 2.24. *Sea S una superficie de Belyi y $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función de Belyi. Entonces, f puede definirse sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, es decir, si $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(g, h)$, entonces $f \in \overline{\mathbb{Q}}(g, h)$ y, por tanto, puede representarse como una función racional con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Es decir, siguiendo la notación del Teorema 2.16, un par de Belyi (S, f) puede verse como $S \simeq S_F$ con $F \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$, $\widehat{\mathbb{C}} \simeq S_G$ con $G(X, Y) = Y$ (dado que $\widehat{\mathbb{C}}$ puede identificarse con la compactificación de la curva $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\} = \mathbb{C}$), y f dada por $R_1(X, Y) \in \overline{\mathbb{Q}}(X, Y)$, $R_2(X, Y) = 0$.

CAPÍTULO 3

Dessins d'Enfants

3.1. Definición y relación con las superficies de Riemann

Definición 3.1. Un *dessin d'enfant* es un par (X, \mathcal{D}) , donde X es una superficie topológica compacta orientable y $\mathcal{D} \subset X$ es un grafo conexo finito *bicoloreado* (es decir, cada vértice tiene asociado el color blanco o negro de modo tal que dos vértices adyacentes tienen colores distintos) y tal que $X \setminus \mathcal{D}$ es una unión finita de discos topológicos llamados *caras* del *dessin*.

Denominaremos *género* del *dessin* al género de X . Asimismo, diremos que dos *dessins* (X_1, \mathcal{D}_1) , (X_2, \mathcal{D}_2) son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$ que preserve la orientación y tal que $f|_{\mathcal{D}_1}$ es un isomorfismo entre los grafos \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 . Si, además, $(X_1, \mathcal{D}_1) = (X_2, \mathcal{D}_2)$, diremos que f es un *automorfismo*, y denotaremos $\text{Aut}(\mathcal{D})$ al grupo de tales automorfismos.

Si bien los *dessins* consisten sencillamente en grafos dibujados sobre superficies topológicas (sin ninguna estructura adicional) y con muy pocas condiciones (el ser bicoloreado y tener discos como caras), *codifican* una estructura de superficie de Riemann en X , que además resulta ser de Belyi. Del mismo modo, cualquier par de Belyi proporciona un *dessin* en la superficie topológica subyacente que codifica la estructura compleja de la superficie de Riemann de partida.

Teorema 3.2. *Existe una correspondencia:*

$$\{\text{dessins d'enfants } (X, \mathcal{D})\} \leftrightarrow \{\text{pares de Belyi } (S, f)\},$$

que hace corresponder dessins equivalentes con pares de Belyi equivalentes, y es biyectiva a nivel de clases de equivalencia.

Demostración. Vamos a ver cómo obtener un *dessin* a partir de un par de Belyi (S, f) . Dicho *dessin* será sobre la superficie topológica X subyacente a S (la orientación viene dada por el atlas complejo). Sin perder generalidad (componiendo con una transformación de Möbius si es necesario) suponemos que los valores de ramificación de f son 0, 1 y ∞ . Entonces, el conjunto $\mathcal{D} = f^{-1}([0, 1])$ es el grafo buscado, considerando los puntos de $f^{-1}(0)$ como los vértices blancos y los de $f^{-1}(1)$ como

los negros. Además, como consecuencia del teorema 2.8 y su demostración, se tiene que $X \setminus \mathcal{D} = f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus [0, 1])$ es una unión disjunta de discos $\{D_i\}_{i=1}^r$, uno por cada $q_i \in f^{-1}(\infty)$, y en cada uno de ellos f es de la forma $z \mapsto z^{m_{q_i}(f)}$. De esta construcción, ilustrada en la Figura 3.1, ya es posible entender qué aspectos de la función f determinan las características combinatorias del *dessin*. Es por esto que la correspondencia en sentido contrario queda relegada al apéndice A.4. \square

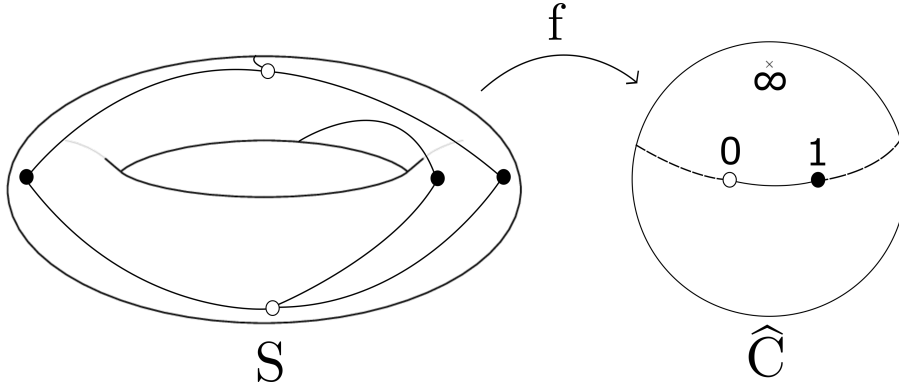


Figura 3.1: Obtención de un *dessin* mediante una función de Belyi.

Proposición 3.3. Sea (X, \mathcal{D}) el *dessin* correspondiente al par de Belyi (S, f) . Entonces:

1. El número de aristas de \mathcal{D} viene dado por $\deg f$.
2. El grado de cada vértice p de \mathcal{D} viene dado por $m_p(f)$.
3. \mathcal{D} tiene una cara por cada $q_j \in f^{-1}(\infty)$, y cada cara está limitada por $2m_{q_j}(f)$ aristas.

Demostración. Observamos que $f : S \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ es una aplicación recubridora por el Teorema 2.8, de modo que cada arista de \mathcal{D} corresponde a un levantamiento de $(0, 1)$, que hay tantos como $\deg f$. El punto 2 sigue de que en cada vértice p , f es (localmente) de la forma $z \mapsto z^{m_p(f)}$, luego el intervalo $(0, \epsilon)$ (para vértices blancos) o $(1 - \epsilon, 1)$ (para vértices negros) puede levantarse por f a $m_p(f)$ curvas disjuntas que confluyen en el vértice en cuestión. El punto 3 sigue de tomar el $q_j \in S$ asociado a la cara (según se vio en la demostración del teorema previo), y considerar los levantamientos del intervalo $(1, \infty)$ que confluyen en q_j (nótese que por el otro extremo acaban en un vértice negro). Estos segmentos están en biyección con el número de vértices negros de la cara, y hay $m_{q_j}(f)$ de ellos. \square

3.2. Monodromía

El objetivo de esta sección es familiarizarse con el concepto de *monodromía* en el caso de los *dessins*. En general, si $f : X \rightarrow Y$ es un recubrimiento en el sentido

topológico, la monodromía se centra en cómo se comportan los puntos de una fibra $f^{-1}(y)$ cuando se recorre un lazo en Y con punto base en y . Concretamente, dada una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = y$ y escogido un $x_0 \in f^{-1}(y)$, es sabido que existe un único *levantamiento* $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ con $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & [0, 1] & \\ \tilde{\gamma} \swarrow & & \searrow \gamma \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} .$$

Por tanto, se tiene que $\tilde{\gamma}(1) \in f^{-1}(y)$. Esto define una función $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y)$ que además es una biyección (invertida por la misma construcción para el lazo *en sentido contrario* $\beta(t) = \gamma(1 - t)$), que denotaremos σ_γ . Además, dado un lazo γ' homótopo a γ , puede comprobarse que $\sigma_\gamma = \sigma_{\gamma'}$. En otras palabras, numerando los $d = \deg f$ elementos de la fibra, se tiene una representación del grupo fundamental en el grupo simétrico Σ_d :

$$\begin{aligned} M_f : \pi_1(Y, y) &\longrightarrow \Sigma_d \\ [\gamma] &\longmapsto \sigma_\gamma^{-1}, \end{aligned}$$

denominada **monodromía** de f . Nótese que se toma la inversa de la permutación asociada para garantizar que M_f sea un homomorfismo de grupos, así como que la definición es *canónica* módulo conjugación (dado que reenumerar los elementos de la fibra conjugan las permutaciones). De hecho, si Y es conexo por arcos, cambiar el punto base a otro $\tilde{y} \in Y$ también da lugar a la misma monodromía módulo conjugación (identificando $\pi_1(Y, y)$ con $\pi_1(Y, \tilde{y})$ de la manera habitual mediante un camino que conecte y_0 e y_1). La (clase de conjugación de la) imagen de M_f se denomina **grupo de monodromía** de f y se denota $\text{Mon}(f)$. Si X es conexo por arcos, $\text{Mon}(f)$ es un subgrupo transitivo dado que, si $x_0, x_1 \in f^{-1}(y)$, es posible considerar un camino que los conecte y proyectarlo por f en Y .

Ahora consideramos el caso particular de los *dessins*. Sabemos que un *dessin* equivale a un par de Belyi (S, f) que podemos asumir ramificado en los valores $0, 1$ e ∞ . Entonces, del Teorema 2.8 sigue que $\tilde{f} : S \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ es un recubrimiento. El grupo fundamental de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ es libre en dos generadores, que son las clases de los lazos γ_0 en torno al 0 y γ_1 en torno al 1 en sentido antihorario, de modo que la monodromía viene completamente especificada por sus imágenes $\sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma_d$ a través de M_f . Además, la monodromía puede interpretarse fácilmente en el grafo que conforma el *dessin*: escogiendo, por ejemplo, el punto base $y = \frac{1}{2}$, numerar los elementos de $f^{-1}(\frac{1}{2})$ equivale a numerar las aristas del *dessin*, y entonces σ_0 permuta las aristas en sentido cíclico en torno a cada vértice blanco y σ_1 hace lo propio en torno a los vértices negros, como se ilustra en la Figura 3.2.

Definición 3.4. Sea (X, \mathcal{D}) un *dessin* al que le corresponde el par de Belyi (S, f) . El par (σ_0, σ_1) obtenido según el párrafo anterior se denomina **representación en permutaciones** del *dessin*. Se define la **monodromía** del *dessin*, $\text{Mon}(\mathcal{D})$, como (la clase de conjugación de) $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$, que coincide con $\text{Mon}(f)$.

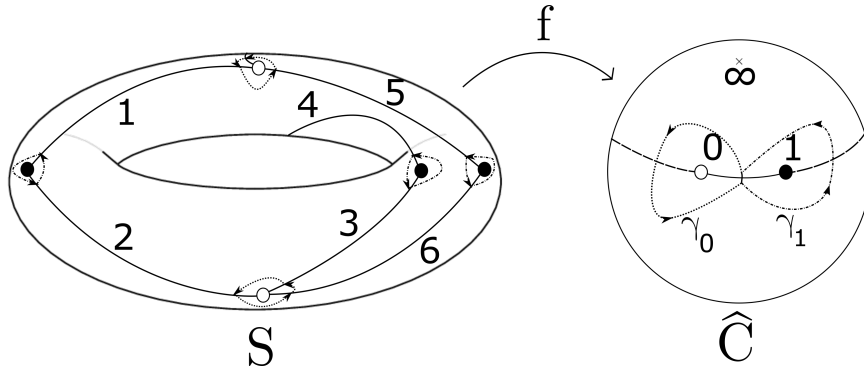


Figura 3.2: Ejemplo de cómo la monodromía permuta las aristas en un *dessin*.

Como las superficies en cuestión son todas conexas, $\text{Mon}(\mathcal{D})$ es un grupo transitivo. De hecho, es posible reconstruir el *dessin* completo (superficie y grafo) a partir del par (σ_0, σ_1) de tal manera que pares conjugados dan lugar a *dessins* equivalentes, existiendo además una correspondencia biyectiva entre pares de elementos de Σ_d que generan subgrupos transitivos y *dessins*. Esta correspondencia no es esencial para lo que sigue, pero el lector interesado puede consultar la idea en el apéndice A.5.

Es posible también *leer* las características combinatorias de \mathcal{D} en σ_0 y σ_1 sin necesidad de reconstruir el *dessin*. Como ejemplo, consideramos en Σ_6 las permutaciones $\sigma_0 = (154)(326)$ y $\sigma_1 = (12)(34)(56)$ correspondientes al ejemplo de la Figura 3.2. El número de aristas es 6 porque son permutaciones de 6 elementos. El número de vértices blancos es 2, cada uno de grado 3, porque σ_0 tiene 2 ciclos de longitud 3 y, del mismo modo, hay 3 vértices negros de grado 2, atendiendo a σ_1 . También es posible obtener información sobre las caras: basta con observar que la composición $\sigma_1\sigma_0$ permuta de manera cíclica la mitad de las aristas (alternadas) de cada cara. En este caso, $\sigma_1\sigma_0 = (164253)$ de modo que hay una única cara con 12 aristas (siguiendo este método, cada arista que delimite la misma cara a ambos lados se cuenta dos veces). Finalmente, sabido el número de vértices, caras y aristas, pueden recuperarse la característica de Euler $\chi = V - E + F = 5 - 6 + 1 = 0$ y el género $g = \frac{2-\chi}{2} = 1$ (como se ve en el dibujo).

Concluimos la sección enunciando dos lemas técnicos acerca de la monodromía, cuya demostración puede encontrarse en las últimas secciones del capítulo 2 de [3]. El primero, que fue anticipado al final de la sección 2.4, es el siguiente:

Lema 3.5. Sean S_1, S_2 y S superficies de Riemann y $f_i : S_i \rightarrow S$, $i = 1, 2$, morfismos de grado d con los mismos valores de ramificación $\{y_k\} \subset S$. Entonces los recubrimientos dados por f_1 y f_2 tienen monodromías M_{f_1} y M_{f_2} conjugadas si y solo si hay un isomorfismo $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ que verifica $f_1 = f_2 \circ \phi$.

El segundo será de utilidad en la próxima sección, y es el siguiente:

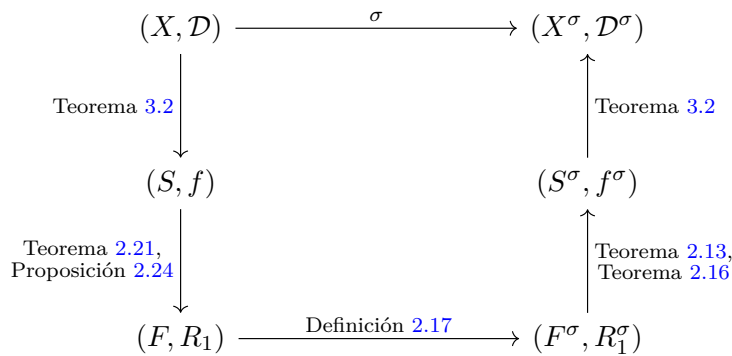
Lema 3.6. Sea S una superficie de Riemann y $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un morfismo. Entonces, existen otra superficie \tilde{S} y morfismos $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ tales que $\tilde{f} = f \circ \pi$, $\deg(\tilde{f}) = |\text{Mon}(f)|$ y $\deg(\pi) = |\text{Mon}(f)|$. \tilde{S} , \tilde{f} y π son únicos salvo isomorfismo. Además, se cumple que $\text{Mon}(f) \simeq \text{Aut}(\tilde{S}, \tilde{f})$.

3.3. La acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en dessins

Comenzamos la sección conectando todos los conceptos tratados hasta ahora para definir la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en *dessins*.

Definición 3.7. Sea (X, \mathcal{D}) un *dessin* asociado al par de Belyi (S, f) , donde $S \simeq S_F$ con $F \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$, y f se representa como una función racional con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$. Dado $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, se define el *dessin* $(X^\sigma, \mathcal{D}^\sigma)$ como el asociado al par (S^σ, f^σ) .

La acción se resume en el siguiente diagrama:



El teorema de Belyi garantiza que σ puede actuar en los coeficientes de F, R_1 . Además, al obtener f^σ por medio del Teorema 2.16, se tiene gracias a la Proposición 2.19 que sigue ramificando únicamente en tres valores, lo que garantiza que todos los pasos del diagrama superior son válidos. Además, como todas las correspondencias respetan las equivalencias, el resultado es independiente de posibles elecciones tomadas en el proceso (por ejemplo, el polinomio F).

Ejemplo 3.8 (Extraído de [1]). Veamos un ejemplo de la acción sobre el *dessin* en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ cuyo grafo está representado en la Figura 3.3a. Consta de 3 vértices blancos de grado 3, 5 vértices negros (uno de ellos de grado 5 y el resto de grado 1) y 3 caras.

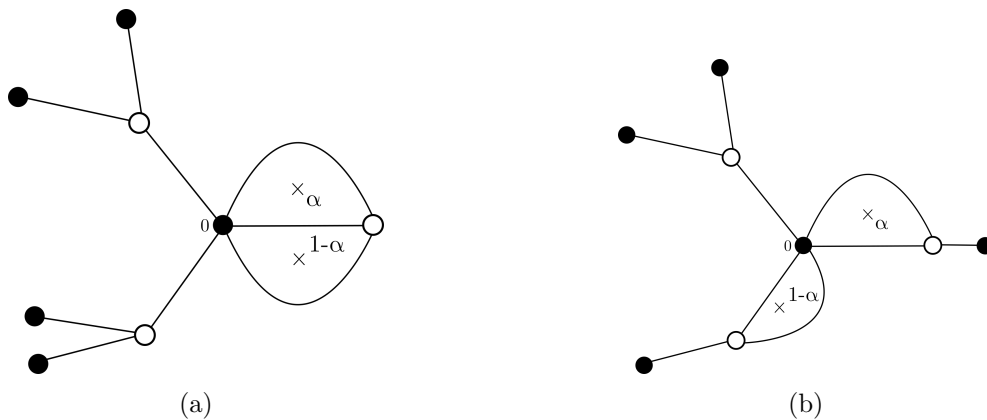


Figura 3.3: Dos *dessins* conjugados Galois en la esfera.

El primer paso para hacer actuar elementos de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en este *dessin* es obtener su función de Belyi. Para calcularla, supondremos que el vértice negro de grado 5 está situado en el origen y que los centros de las tres caras son ∞ , α y $1 - \alpha$, es decir, que los puntos marcados con cruces en la figura suman 1. Todas estas suposiciones indican lo siguiente sobre la función de Belyi f :

- $f(0) = 1$, y el origen tiene multiplicidad 5.
- f tiene dos polos simples en α y $1 - \alpha$, un tercer polo en ∞ y ninguno más.
- f tiene exactamente 3 ceros, todos ellos de orden 3.
- f no tiene más puntos de ramificación además sus ceros, sus polos y el origen.

Las suposiciones sobre los ceros y los polos obligan a que f sea de la forma

$$f(x) = K \cdot \frac{(x^3 + ax^2 + bx + c)^3}{x^2 - x + d},$$

donde $d = \alpha^2$. A continuación, imponiendo $f(0) = 1$, así como $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$, se obtienen únicamente dos posibilidades para los coeficientes: $a = 2$, $b = \frac{5 \mp \sqrt{105}}{2}$, $c = \frac{15 \pm 5\sqrt{105}}{6}$, $d = \frac{15 \pm \sqrt{105}}{18}$, $K = \frac{12 \cdot (15 \pm \sqrt{105})}{125 \cdot (3 \pm \sqrt{105})^3}$. Esto da lugar a dos funciones de Belyi, siendo una de ellas la buscada. Teniendo en cuenta las suposiciones realizadas para calcular la función, es necesario que la otra, que denotaremos g , represente al grafo de la Figura 3.3b, puesto que también las verifica.

Ahora, según el diagrama al inicio de la sección, hace falta calcular F y R_1 . Puesto que consideramos $\widehat{\mathbb{C}}$ como la compactificación de la curva $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\}$, se tiene que $F(X, Y) = Y$, de donde sigue que $R_1(X, Y) = f(X)$ (esta notación está justificada porque f es un cociente de polinomios). Como los coeficientes de F y R_1 pertenecen al cuerpo de números $\mathbb{Q}(\sqrt{105}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$, el único modo de hacerlos variar es mediante un automorfismo $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ con $\sigma(\sqrt{105}) = -\sqrt{105}$. Para un tal σ , se tiene que $F^\sigma(X, Y) = Y$ y $R_1^\sigma(X, Y) = g(X)$. Así, finalmente, se recupera el par de Belyi $(\widehat{\mathbb{C}}, g)$, luego los dos *dessins* de la órbita son precisamente los de la Figura 3.3, que no son isomorfos como grafos.

Para concluir la sección, estableceremos la siguiente importante propiedad:

Proposición 3.9. *La acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en *dessins d'enfants* es fiel.*

Demostración. Sea $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ un automorfismo distinto de la identidad, es decir, tal que $\sigma(a) \neq a$ para cierto $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. El objetivo es construir un *dessin* (X, \mathcal{D}) tal que $(X^\sigma, \mathcal{D}^\sigma)$ sea otro *dessin* no equivalente. Un posible ejemplo está dado por el par de Belyi (S, f) , donde $S = \widehat{\mathbb{C}}$ y f se construye como sigue: consideramos, en primer lugar, el morfismo $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dado por $g|_{\mathbb{C}}(z) = P(z)$, donde $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es cualquier polinomio que cumpla $P'(z) = z(z-1)^2(z-a)^3$, y $g(\infty) = \infty$. Por construcción, los valores de ramificación de g son $\{g(0), g(1), g(a), \infty\} \subset \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$, así que el procedimiento seguido en la segunda parte de la demostración del Teorema

de Belyi (Teorema 2.21) permite construir un polinomio $q \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f = q \circ g$ es la función de Belyi buscada.

Ahora veremos que $(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ no es equivalente a $(\widehat{\mathbb{C}}, f^\sigma)$. Para ello, supongamos que $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo que verifica $f \circ T = f^\sigma$. Por el Teorema 2.16, y dado que $\deg T = 1$ (es biyectiva), se tiene $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, donde asimismo puede tomarse $\gamma = 0$, $\delta = 1$ dado que $T(\infty) = \infty$. Es decir, tenemos que $q(g(T(z))) = f(T(z)) = f^\sigma(z) = q^\sigma(g^\sigma(z)) = q(g^\sigma(z))$. Esto implica (véase el Apéndice A.6) que $g(T(z)) = cg^\sigma(z) + d$ para ciertos $c, d \in \mathbb{C}$.

Para concluir, sabemos (por construcción) que g ramifica en los puntos $0, 1$ y a con multiplicidades $2, 3$ y 4 , luego g^σ lo hace en $0, 1$ y $\sigma(a)$ con las mismas multiplicidades. Entonces, $h(z) := cg^\sigma(z) + d$ también ramifica en esos puntos ($z \mapsto cz + d$ es un isomorfismo). Otra manera de calcular los puntos de ramificación de h es usando la expresión $h(z) = g(T(z))$ establecida anteriormente, mediante la cual se obtienen como puntos de ramificación de h las imágenes de los puntos de ramificación de g por $T^{-1}(z) = \frac{z - \beta}{\alpha}$, que son $-\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{1 - \beta}{\alpha}$ y $\frac{a - \beta}{\alpha}$ con multiplicidades $2, 3$ y 4 . Como las multiplicidades son distintas dos a dos, haciendo corresponder los puntos de igual multiplicidad obtenidos mediante cada uno de los dos métodos, se tiene que $-\frac{\beta}{\alpha} = 0$, $\frac{1 - \beta}{\alpha} = 1$ y $\frac{a - \beta}{\alpha} = \sigma(a)$. De las dos primeras expresiones se deduce $\beta = 0$, $\alpha = 1$, y entonces de la tercera sigue que $a = \sigma(a)$, una contradicción. \square

En el capítulo posterior veremos que la acción preserva, entre otros, el género del *dessin*, de tal modo que tiene sentido preguntarse si la acción restringida al subconjunto de *dessins* de género g sigue siendo fiel. La demostración anterior sirve para establecer que es así en género $g = 0$. En general, se tiene:

Teorema 3.10. *Sea g un entero no negativo. La acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en *dessins d'enfants* de género g es fiel.*

La demostración involucra *curvas hiperelípticas* de género g (denominadas *elípticas* cuando $g = 1$), es decir, superficies dadas por polinomios de la forma $F(X, Y) = Y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (X - a_i)$, donde cada $a_i \in \mathbb{C}$ es distinto. El caso de género $g = 1$ es fácil de establecer dado que el espacio de las superficies de Riemann con ese género (denominado también *espacio de móduli* de género 1) admite una descripción sencilla en términos de cocientes de \mathbb{C} por retículos de la forma $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbb{H}$ (el semiplano superior). A partir de esa descripción y dado $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\sigma \neq id$, es posible construir una curva elíptica correspondiente a una superficie de género 1, S , de manera que S^σ no es isomorfa a S . Entonces, cualquier *dessin* sobre S (independientemente de la función de Belyi) será enviado a un *dessin* distinto por σ . La demostración para el caso de género $g \geq 2$, que también involucra exclusivamente superficies sin tener que considerar funciones de Belyi, puede encontrarse en [2]. Ambos casos pueden encontrarse también reunidos en [3].

CAPÍTULO 4

Invariantes de la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en dessins

Una de las conclusiones a extraer del Ejemplo 3.8, así como del hecho de que la acción se define de manera *indirecta* siendo necesarios múltiples pasos para determinarla, es que no es sencillo determinar si dos *dessins* pertenecen a la misma órbita o no. No obstante, existen ciertos invariantes que ayudan a restringir el espacio de candidatos a pertenecer a la órbita de un *dessin* dado. En primer lugar reformularemos como invariantes algunos de los resultados ya presentados con anterioridad.

Proposición 4.1. *La acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en dessins d'enfants preserva:*

1. *El número de aristas del dessin.*
2. *El **pasaporte** del dessin, esto es, el número de vértices de cada tipo, sus respectivos grados, el número de caras y los respectivos números de aristas que las rodean.*
3. *El género del dessin.*
4. *La clase de isomorfía del grupo de automorfismos del dessin.*
5. *La clase de isomorfía del grupo de monodromía del dessin.*

Demostración. Los puntos del 1 al 4 son una simple reformulación de los puntos 4, 1, 5 y 6 (respectivamente) de la Proposición 2.19 en términos de *dessins*. Para demostrar el punto 5, es necesario invocar también al Lema 3.6, observando que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\pi} & S \\ & \searrow \tilde{f} & \swarrow f \\ & \hat{\mathbb{C}} & \end{array}$$

a través de la acción de $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ es transformado en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{S}^\sigma & \xrightarrow{\pi^\sigma} & S^\sigma \\
 \tilde{f}^\sigma \searrow & & \swarrow f^\sigma \\
 & \hat{\mathbb{C}} &
 \end{array}$$

Como la acción preserva los grados de los morfismos, sigue que este diagrama es el correspondiente a S^σ y f^σ en el Lema 3.6, de tal modo que $\text{Mon}(\mathcal{D}) = \text{Mon}(f) \simeq \text{Aut}(\tilde{S}, \tilde{f}) \simeq \text{Aut}(\tilde{S}^\sigma, \tilde{f}^\sigma) \simeq \text{Mon}(f^\sigma) \simeq \text{Mon}(\mathcal{D}^\sigma)$. \square

Una vez establecidos los primeros invariantes, dedicaremos el resto de este último capítulo a explorar invariantes adicionales. Estos están motivados por el hecho de que los estudiados hasta ahora no bastan para distinguir todas las órbitas de la acción: existen *dessins* que no son conjugados a través de la acción pero comparten todas las características presentadas en el capítulo anterior. Por tanto, es deseable ampliar la colección de invariantes para poder refinar la capacidad de distinción entre órbitas que estos proporcionan. Como ilustración, consideramos los *dessins* sobre $\hat{\mathbb{C}}$ de la Figura 4.1, extraídos de [7].

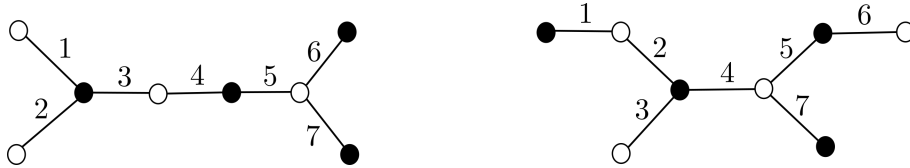


Figura 4.1: Dos *dessins* no conjugados sobre la esfera que comparten las propiedades básicas.

Ambos *dessins* tienen 7 aristas, 2 vértices blancos (resp. negros) de grado 1, 1 vértice blanco (resp. negro) de grado 2, 1 vértice blanco (resp. negro) de grado 3, género 0 y grupo de automorfismos trivial (nótese que la simetría con respecto al eje horizontal que tiene el primero de ellos no preserva la orientación). En cuanto a los grupos de monodromía, el *dessin* de la izquierda está representado por $\sigma_0 = (34)(576)$ y $\sigma_1 = (123)(45)$, y el segundo por $\sigma'_0 = (12)(475)$, $\sigma'_1 = (234)(56)$. Tanto $\sigma_0^3 = (34)$ como $(\sigma'_0)^3 = (12)$ son trasposiciones, de modo que los grupos $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ y $\langle \sigma'_0, \sigma'_1 \rangle$ son ambos el simétrico Σ_7 , en virtud de un resultado de teoría de grupos que afirma que todo grupo de permutaciones sobre un conjunto con un número primo de elementos que contiene una trasposición es el grupo simétrico (ver, por ejemplo, el Teorema 13.3 de [8]). Sin embargo, como veremos, los *dessins* no son conjugados por la acción. Para detectarlo, será necesario introducir nuevos invariantes.

4.1. Funciones de extensión de Belyi

Una técnica para obtener nuevos invariantes consiste en producir nuevos *dessins* a partir de uno dado de tal manera que si los *dessins* de partida eran conjugados,

los resultantes también lo sean. Así, cualquier invariante preexistente aplicado a los nuevos *dessins* sirve como invariante para los iniciales. Una forma de lograr esto es mediante lo que se conoce como *funciones de extensión de Belyi*.

La idea subyacente a esta técnica es considerar el par de Belyi (S, f) asociado a un *dessin*. Recordemos que la función $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un morfismo ramificado en tres valores, que podemos asumir en $0, 1$ e ∞ . De (2.3) sigue que si $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional, los valores de ramificación de $R \circ f$ son las imágenes de los puntos de ramificación de f junto con las imágenes de los puntos que son enviados a puntos de ramificación de R a través de f . En otras palabras, si R tiene sus valores de ramificación contenidos en $\{0, 1, \infty\}$ y, además, $R(\{0, 1, \infty\}) \subset \{0, 1, \infty\}$, entonces $R \circ f$ es otra función de Belyi sobre S y, por tanto, da lugar a otro *dessin*. Si, además, los coeficientes de R como función racional están en \mathbb{Q} , entonces $(R \circ f)^\sigma = R^\sigma \circ f^\sigma = R \circ f^\sigma$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, lo que relaciona las órbitas del nuevo *dessin* con el original.

Definición 4.2. Una **función de extensión de Belyi** es un morfismo $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ cuyos valores de ramificación están en $\{0, 1, \infty\}$, tal que $\beta(\{0, 1, \infty\}) \subset \{0, 1, \infty\}$ y tal que sus coeficientes como función racional están en \mathbb{Q} .

Si (X, \mathcal{D}) es un *dessin* asociado al par de Belyi (S, f) , denotamos por $(X_\beta, \mathcal{D}_\beta)$ al *dessin* asociado al par $(S, \beta \circ f)$.

Ejemplo 4.3. La función $\beta(z) = 4z(1 - z)$ verifica $\beta(0) = \beta(1) = 0$, $\beta(\infty) = \infty$ y sus valores de ramificación son ∞ y las imágenes de los $z \in \mathbb{C}$ con $0 = \beta'(z) = 4 - 8z$, es decir, $\beta(\frac{1}{2}) = 1$.

Proposición 4.4. Sea $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función de extensión de Belyi. Si I es un invariante de la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, toda vez que (X, \mathcal{D}) y (X', \mathcal{D}') estén en la misma órbita, se tiene $I((X, \mathcal{D})) = I((X', \mathcal{D}'))$, entonces $I_\beta((X, \mathcal{D})) := I((X_\beta, \mathcal{D}_\beta))$ es otro invariante.

Demostración. Basta con ver que si (X, \mathcal{D}) y (X', \mathcal{D}') son conjugados, entonces $(X_\beta, \mathcal{D}_\beta)$ y $(X'_\beta, \mathcal{D}'_\beta)$ también lo son. Sean (S, f) y (S^σ, f^σ) los pares de Belyi asociados a cada uno de los *dessins*, donde $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Entonces, $(S, \beta \circ f)$ es el par asociado a $(X_\beta, \mathcal{D}_\beta)$, en cuya órbita está $(S^\sigma, (\beta \circ f)^\sigma) = (S^\sigma, \beta \circ f^\sigma)$, correspondiente a $(X'_\beta, \mathcal{D}'_\beta)$. \square

A continuación presentamos una manera de visualizar el nuevo *dessin* $(X_\beta, \mathcal{D}_\beta)$ a partir del original (X, \mathcal{D}) y la función de extensión β . Observamos que, como β tiene sus valores de ramificación en $\{0, 1, \infty\}$, es a su vez una función de Belyi que da lugar al *dessin* de género 0 correspondiente al par $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta)$. Así, partiendo del *dessin* original asociado al par (S, f) , el nuevo *dessin* puede visualizarse levantando el *dessin* sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ dado por β a S mediante f . Un ejemplo de esta visualización se muestra en la Figura 4.2.

Por tanto, es posible conocer las características del nuevo *dessin* a partir de dos datos: el *dessin* original y el asociado a $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta)$, que se denomina **patrón de extensión de Belyi**. Algunos ejemplos de estos patrones se muestran en la Figura 4.3.

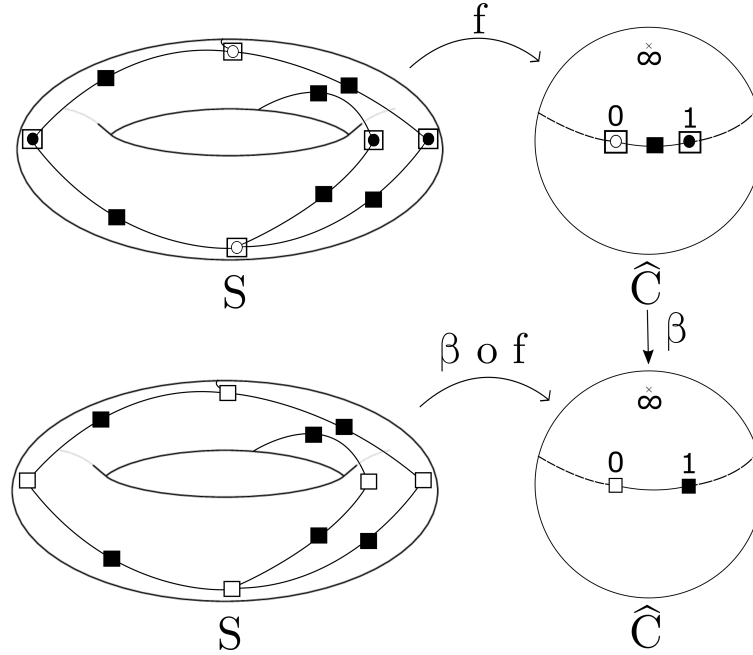


Figura 4.2: Extensión de Belyi mediante $\beta(z) = 4z(1 - z)$. Arriba a la izquierda se muestra el *dessin* asociado a f con vértices redondos blancos y negros dependiendo de si son preimágenes del 0 o del 1 a través de f . Asimismo, se muestran las preimágenes de 0 y 1 a través de $\beta \circ f$ mediante cuadrados blancos y negros, respectivamente. Estas se han obtenido dibujando con cuadrados blancos y negros el *dessin* asociado a β sobre la esfera de arriba a la derecha, y tomando la preimagen por f . El *dessin* extendido aparece abajo a la izquierda, una vez eliminados los vértices antiguos.

El primero, correspondiente a $\beta_1(z) = 1 - z$, intercambia los vértices blancos y negros del *dessin* original. El segundo, correspondiente a $\beta_2(z) = \frac{z-1}{z}$, convierte los vértices negros en blancos y los conecta con los centros de las caras, que pasan a ser los vértices negros. El tercero, ya visto, correspondiente a $\beta_3(z) = 4z(1 - z)$, cambia todos los vértices del *dessin* por vértices blancos y sitúa vértices negros en las aristas. El último, correspondiente a $\beta_4(z) = \frac{27z^2(z-1)^2}{4(z^2-z+1)^3}$, colorea vértices y centros de negro y los conecta a través de vértices blancos intermedios.

Para concluir la sección, mostraremos que realmente se obtienen invariantes nuevos a partir de funciones de extensión de Belyi. Volviendo al ejemplo de la Figura 4.1, podemos utilizar la función de extensión β_2 de la Figura 4.3 para obtener sendos *dessins* extendidos, que se muestran en la Figura 4.4.

La existencia de una simetría rotacional con respecto al vértice negro central en el primer *dessin* ocasiona que su grupo de automorfismos deje de ser trivial, cosa que no ocurre en el segundo *dessin*, lo que muestra que no son conjugados y, por tanto, los originales tampoco. Alternativamente, estos nuevos *dessins* están representados por las permutaciones:

$$\sigma_0 = (2, 3, 5)(6, 7)(8, 9)(10, 13, 11), \sigma_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14),$$

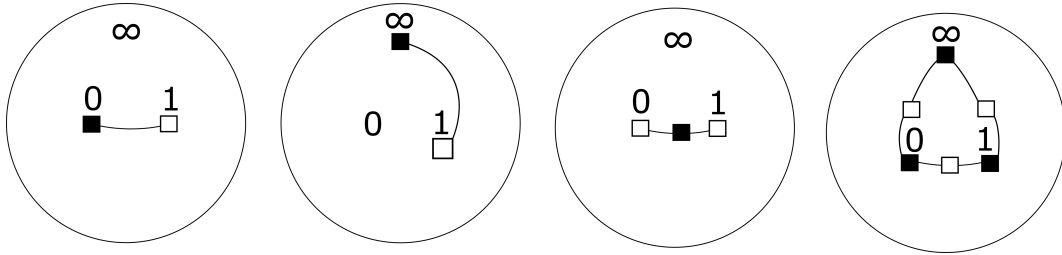


Figura 4.3: Ejemplos de patrones de extensión.

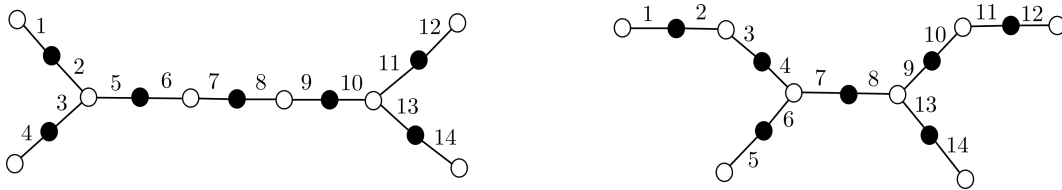


Figura 4.4: Extensión de Belyi de los *dessins* de la Figura 4.1.

y

$$\sigma'_0 = (2, 3)(4, 6, 7)(8, 13, 9)(10, 11), \sigma'_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14),$$

respectivamente. Es posible verificar (por ejemplo, con un ordenador) que $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \neq \langle \sigma'_0, \sigma'_1 \rangle$. En otras palabras, el grupo de monodromía de la extensión por β_2 es un nuevo invariante, que tradicionalmente se denomina **grupo cartográfico** del *dessin*.

Este grupo sigue sin ser suficiente para separar las órbitas por completo. Por ejemplo, en la Figura 5 de [9] se presentan dos *dessins* que no son conjugados pero coinciden en todos los invariantes presentados aquí hasta el momento, incluyendo el grupo cartográfico. Para separarlos, hay que considerar el grupo de monodromía de la extensión por el morfismo β_4 de la Figura 4.3, lo que añade un nuevo invariante a la lista.

4.2. Z-orientabilidad

En esta sección desarrollamos otro invariante, conocido como *Z-orientabilidad* [4], que tiene la ventaja de poder comprobarse fácilmente observando el grafo del *dessin* al igual que el pasaporte y a diferencia de otros más complicados de calcular tales como el grupo de monodromía o el grupo cartográfico.

Definición 4.5. Un *dessin* (X, \mathcal{D}) se dice **Z-orientable** si es posible etiquetar sus caras con los símbolos + o - de tal modo que los símbolos a ambos lados de cada arista sean distintos.

Es decir, un *dessin* es Z-orientable si su *grafo dual* es bipartito. Cabe observar que, fijado un vértice de un *dessin* Z-orientable, las caras que lo comparten deben ser etiquetadas con signos opuestos de manera alternada, por lo que el grado de todo

vértice ha de ser par. Asimismo, no pueden existir aristas *monofaciales*, es decir, que delimiten la misma cara a ambos lados. De esta manera, por ejemplo, el *dessin* de las Figuras 3.1 y 3.2 no es \mathbb{Z} -orientable, al solo tener una cara. Un ejemplo ilustrativo de la \mathbb{Z} -orientabilidad se muestra en el diagrama de la Figura 4.5.

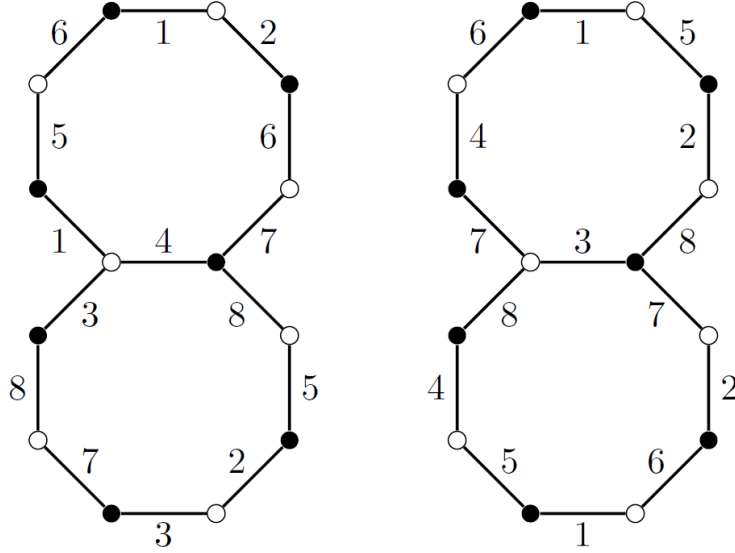


Figura 4.5: Ejemplo de \mathbb{Z} -orientabilidad en *dessins* de género 2. Cada *dessin* consta de dos caras, y las aristas numeradas iguales están identificadas.

El *dessin* de la izquierda no es \mathbb{Z} -orientable dado que existen aristas monofaciales, como la etiquetada por 8. Por otro lado, el *dessin* derecho es claramente \mathbb{Z} -orientable asignando un signo distinto a cada cara. De esta manera, puede determinarse que no comparten órbita de manera rápida a pesar de compartir otros invariantes como el pasaporte, género y grupo de monodromía (el hecho de que este último coincida puede verse notando que el *dessin* derecho es la extensión de Belyi del izquierdo por $\beta(z) = \frac{1}{z}$, que tiene el efecto de intercambiar los centros de las caras con los vértices blancos, permutando los generadores del grupo de monodromía si se considera el tercer generador $\sigma_\infty = \sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}$).

Para establecer la invarianza de la propiedad de \mathbb{Z} -orientabilidad a través de la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es necesario encontrar una caracterización algebraica de la misma (en relación al par de Belyi) que sea preservada por automorfismos. Una herramienta necesaria para establecer esta caracterización es la siguiente:

Definición 4.6. Sea S una superficie de Riemann con la estructura holomorfa dada por el atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$. Una **1-forma meromorfa** $\omega = \{f_i\}$ es una asignación de una función meromorfa a cada carta, $f_i : U_i \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, de tal modo que $f_j(P) = f_i(P)(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(\varphi_j(P))$ para todo $P \in U_i \cap U_j$.

A causa de la condición de compatibilidad, los ceros y polos de una 1-forma meromorfa están bien definidos. Al igual que en el caso de la integración de formas

diferenciales habituales, es posible integrar 1-formas meromorfas a lo largo de curvas que no atraviesen ningún polo calculando en coordenadas locales.

Definición 4.7. Si S es una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{M}(S)$ es una función meromorfa, se define su **diferencial meromorfa** como la 1-forma $df = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial z} \right\}$, donde $\frac{\partial f_i}{\partial z}(P) := (f \circ \varphi_i^{-1})'(\varphi_i(P))$.

Puede verificarse fácilmente que se cumple la condición de compatibilidad. Ahora estamos en condiciones de caracterizar algebraicamente la Z-orientabilidad.

Teorema 4.8. Sea (X, \mathcal{D}) un dessin asociado al par de Belyi (S, β) . Se tiene que \mathcal{D} es Z-orientable \iff existe una función meromorfa $\alpha \in \mathcal{M}(S)$ tal que $\alpha^2 = \beta \cdot (1 - \beta)$.

Demostración. Supongamos que existe tal α . Definimos la forma meromorfa $\eta = \frac{d\beta}{\alpha}$ (es decir, cada expresión local se obtiene dividiendo la correspondiente de $d\beta$ por α). Sea F una cara del dessin, $p \in S$ su centro y $m = m_p(\beta)$, de modo que F está delimitada por $2m$ aristas. Calculamos ahora el residuo de η en p , definido, al igual que en el análisis complejo usual, mediante integrar una curva de Jordan en torno al polo p . Sabemos del Teorema 2.8 y su demostración que existe una carta en la que β es localmente de la forma $z \mapsto \frac{1}{z^m}$. Denotando $\alpha_0(z)$ la expresión local de α en dicha carta (de modo que $\alpha_0(z) = \pm \sqrt{\frac{1}{z^m}(1 - \frac{1}{z^m})}$), se tiene

$$\text{Res}_p \eta = \text{Res}_0 \left(\frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z^m} \right)}{\alpha_0(z)} \right) = \text{Res}_0 \frac{m}{z^{m+1} \alpha_0(z)} = \text{Res}_0 \frac{m}{\pm \sqrt{(z^m - 1)} z}.$$

Como la última función tiene un polo simple en 0, sigue que el residuo buscado es $\frac{m}{\pm \sqrt{-1}} = \mp im$, donde el signo depende de la elección de la rama de la raíz cuadrada. Ahora basta con etiquetar F con el signo de este residuo. Esto es así porque como los polos están en el interior de las caras, puede deformarse la curva de Jordan en torno a p hasta la frontera de la cara sin pasar por ningún otro polo, así que también se tiene que

$$(4.1) \quad \pm im = \text{Res}_p \eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \eta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{2m} \int_{e_k} \eta$$

siendo los e_k cada una de las aristas, recorridas de modo que ∂F se atravesase en sentido positivo. Cada una de estas integrales puede calcularse de manera sencilla usando la parametrización dada por el levantamiento del intervalo $[0, 1]$ a través de β , es decir, $\tilde{\beta}(t) : [0, 1] \rightarrow e_k$, que existe por ser β un recubrimiento, mediante la cual resulta

$$\int_{e_k} \eta = \int_0^1 \frac{dx}{\pm \sqrt{x(1-x)}} = \pm \arcsin(2x - 1) \Big|_0^1 = \pm \pi.$$

Por tanto, de (4.1) se deduce que las integrales para cada e_k han de ser todas iguales y su signo es opuesto al del residuo (a causa de que $\frac{1}{i} = -i$). Así, si F' es la cara al

otro lado de una arista e_{k_0} , puesto que e_{k_0} estará orientada en sentido contrario en el cálculo del residuo en el centro de F' , su integral cambia de signo y por tanto el signo del residuo en F' es el contrario.

La idea de la demostración del recíproco es la siguiente: como los vértices de \mathcal{D} tienen grado par, y estos coinciden exactamente con los ceros y los polos de $\beta(1 - \beta)$, sigue que estos últimos tienen grado par y por tanto se tiene una raíz cuadrada bien definida (y por tanto dos, opuestas en signo) en cualquier abierto simplemente conexo $U \subset S$. Ahora se construye α a trozos mediante elecciones de estas raíces cuadradas en distintos abiertos:

1. Dada una cara F de centro p , denotamos su interior por U . Se escoge en U la rama de la raíz cuadrada $\alpha|_U$ que cumple que la forma meromorfa $\frac{d\beta|_U}{\alpha|_U}$ tiene residuo *im* en p si la cara está etiquetada con $+$, o la opuesta si lo está con $-$.
2. En un entorno simplemente conexo U_k de la arista e_k de una cara dada F , se escoge la rama $\alpha|_{U_k}$ que garantiza que, en sentido positivo de la arista, $\int_{e_k} \frac{d\beta|_{U_k}}{\alpha|_{U_k}} = -\pi$ si la cara está etiquetada con $+$, o la opuesta si lo está con $-$.

Ahora puede verificarse que la elección realizada es compatible, es decir, que coincide en los puntos de $U \cap U_k$ donde ha sido construida de dos maneras distintas. Esto se consigue argumentando de manera similar a (4.1), lo que puede consultarse en detalle en [4]. \square

Proposición 4.9. *La Z -orientabilidad es un invariante de la acción del grupo de Galois.*

Demostración. Sea $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Si (S, β) admite $\alpha \in \mathcal{M}(S)$ con $\alpha^2 = \beta(1 - \beta)$, entonces, como $(\alpha^\sigma)^2 = \beta^\sigma(1 - \beta^\sigma)$, se tiene que (S^σ, β^σ) admite a α^σ . \square

CAPÍTULO 5

Conclusiones

En primer lugar, se ha definido la acción del grupo absoluto de Galois, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, en el conjunto de los *dessins d'enfants*, grafos bipartitos inmersos en superficies topológicas compactas orientables. Para ello, se han presentado distintos aspectos de la teoría de superficies de Riemann compactas desde el punto de vista algebraico, entendiéndolas como compactificaciones de curvas afines irreducibles sobre los complejos, así como el Teorema de Belyi que relaciona el cuerpo $\overline{\mathbb{Q}}$ con las superficies que admiten *dessins d'enfants*. Asimismo, se han estudiado los aspectos básicos de la teoría de estos *dessins* y su relación con las superficies de Riemann. Todo esto ha permitido definir de manera precisa la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en *dessins* y comprobar que es fiel.

En segundo lugar, se han estudiado diversos invariantes para la acción, que permiten ayudar a distinguir sus órbitas. Se han presentado invariantes sencillos, como el número de aristas, los grados de los vértices de cada color o el género de la superficie, y otros más *sofisticados* como el grupo de monodromía, aquellos construidos mediante funciones de extensión de Belyi y la Z-orientabilidad. Se ha visto como estos invariantes sofisticados permiten distinguir ciertas órbitas que de otro modo no es fácil separar.

La búsqueda de un conjunto de invariantes *completo*, es decir, que permita distinguir todas las órbitas, es un problema que a día de hoy sigue abierto y, de hecho, no se conoce si tal conjunto existe. Para concluir el trabajo presentamos un ejemplo [1] de muy reciente aparición, relacionado con la teoría de números y las ecuaciones de Pell (ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 - ny^2 = 1$), en el que no basta con los invariantes presentados y se pone de manifiesto la complejidad de la acción. El ejemplo comienza por considerar la pareja de *dessins* sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ que se mostró en la Figura 3.8. Como se discutió en la Sección 3.3, ambos pertenecen a la misma órbita y, por lo tanto, todos sus invariantes coinciden. Obsérvese que el grado de todos los vértices blancos es 3. Ahora modificamos el grado de dichos vértices para que sea un entero fijo $m \geq 3$ mediante la aparentemente inofensiva operación de añadir hojas negras, como se muestra en la Figura 5.1.

Si ahora se repite el cálculo de la función de Belyi de la Sección 3.3, modificando la multiplicidad de los ceros para que sea m en lugar de 3, la raíz cuadrada que aparece en los coeficientes pasa a ser $\sqrt{3(2m-1)(3m-2)}$ en lugar de simplemente

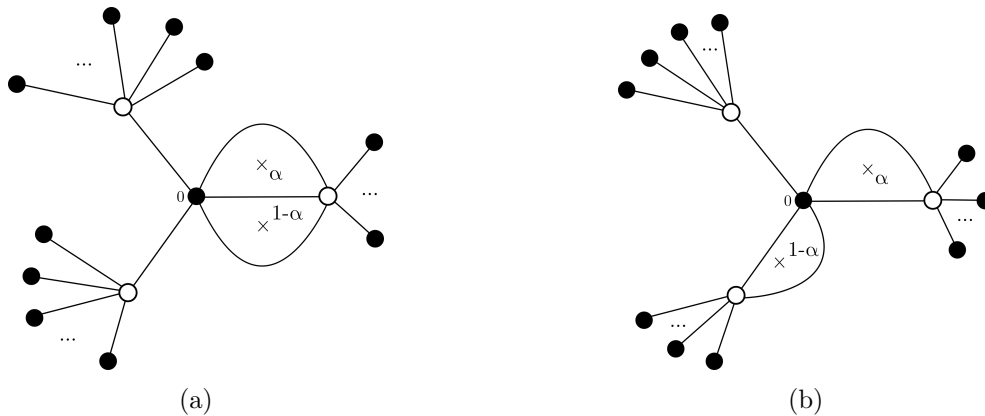


Figura 5.1: Dos *dessins* en la esfera. El número de hojas negras es tal que el grado de todos los vértices blancos es m .

$\sqrt{105}$. Esto causa el siguiente fenómeno: cuando el número de hojas es tal que $\Delta = 3(2m - 1)(3m - 2)$ es un cuadrado perfecto, todos los coeficientes son racionales y por tanto los *dessins* dejan de ser conjugados, ya que quedan fijos por cualquier $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Tales valores de m , que son soluciones a una determinada ecuación de Pell, existen y son infinitos: el primero de ellos es $m = 1634$.

Además, puede comprobarse que los invariantes presentados en el Capítulo 4 siempre coinciden en ambos *dessins* independientemente del valor de m , por lo que actualmente el único estudio de esta órbita que puede realizarse es de manera directa como se ha explicado en el párrafo anterior. En caso de existir un invariante útil en este ejemplo, tendría que ser lo suficientemente elaborado como para detectar estos casos no conjugados dados por ciertos valores de m y separar así las órbitas, pero coincidiendo en ambos grafos para el resto de valores (al ser invariantes).

En definitiva, el estudio del grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ es de gran complicación, pero es posible comprenderlo mejor a través de su acción fiel en *dessins* y sus invariantes, campo en el que todavía hay problemas abiertos como la determinación de una colección completa de invariantes para distinguir todas las órbitas.

Bibliografía

- [1] ADRIANOV, N. M., PAKOVICH, F., AND ZVONKIN, A. K. *Davenport-Zannier polynomials and dessins d'enfants*, vol. 249 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2020] ©2020.
- [2] GIRONDO, E., AND GONZÁLEZ-DIEZ, G. A note on the action of the absolute Galois group on dessins. *Bull. Lond. Math. Soc.* 39, 5 (2007), 721–723.
- [3] GIRONDO, E., AND GONZÁLEZ-DIEZ, G. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, vol. 79 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [4] GIRONDO, E., GONZÁLEZ-DIEZ, G., HIDALGO, R. A., AND JONES, G. A. Zapponi-orientable dessins d'enfants. *Rev. Mat. Iberoam.* 36, 2 (2020), 549–570.
- [5] GONZÁLEZ-DIEZ, G. Variations on Belyi's theorem. *Q. J. Math.* 57, 3 (2006), 339–354.
- [6] GROTHENDIECK, A. Esquisse d'un programme. In *Geometric Galois actions, 1*, vol. 242 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 5–48. With an English translation on pp. 243–283.
- [7] JONES, G. A., AND STREIT, M. Galois groups, monodromy groups and cartographic groups. In *Geometric Galois actions, 2*, vol. 243 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 25–65.
- [8] WIELANDT, H. *Finite permutation groups*. Academic Press, New York-London, 1964. Translated from the German by R. Bercov.
- [9] WOOD, M. M. Belyi-extending maps and the Galois action on dessins d'enfants. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 42, 3 (2006), 721–737.

APÉNDICE A

Demostraciones adicionales

A.1. Lema de extensión única a superficie compacta

En este apéndice se proporciona la demostración del Lema 2.11. Sea $y \in \Sigma$ uno de los puntos retirados de Y . Sea (V_y, φ_y) una carta con $y \in V_y$ tal que, sin perder generalidad, $\varphi_y(V_y) = \mathbb{D}$ y $\varphi_y(y) = 0$. Sea entonces $V_y^* = V_y \setminus \{y\}$ la carta correspondiente en Y^* y sea $f^{-1}(V_y^*) = U_{y,1}^* \cup \dots \cup U_{y,r}^*$ la descomposición en componentes conexas de su preimagen. Entonces, restringiendo f , se tiene un recubrimiento conexo $f : U_{y,i}^* \rightarrow V_y^*$. A través de la carta φ_y , puede considerarse $\varphi_y \circ f$ como un recubrimiento de $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Usamos ahora el hecho conocido (que puede consultarse en el Ejemplo 1.72 de [3]) de que todos los recubrimientos conexos de \mathbb{D}^* son equivalentes a uno de la forma $\mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ dado por $z \mapsto z^n$, con n el grado del recubrimiento. En otras palabras, existen un isomorfismo φ_i y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 U_{y,i}^* & \xrightarrow{f} & V_y^* \\
 \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_y \\
 \mathbb{D}^* & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & \mathbb{D}^*
 \end{array}$$

Ahora completamos el punto que falta, definiendo la biyección $U_{y,i} := U_{y,i}^* \cup \{P_y^i\} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por φ_i , fijando $\varphi_i(P_y^i) = 0$. De esta manera, se construye un nuevo espacio topológico $X = X^* \cup \{P_y^i\}_{i,y}$, cuya topología viene dada por la más pequeña que garantiza que todos los φ_i extendidos son homeomorfismos. La estructura compleja puede completarse (en los nuevos puntos que se han añadido) mediante las cartas $(U_{y,i}, \varphi_i)$ y la aplicación f extiende entonces de manera natural, fijando $f(P_y^i) = y$.

Falta por comprobar que X es compacta, pero esto sigue de la compacidad de Y : si los $U_{y,i}$ cumplen que $\overline{U_{y,i}}$ es compacto, lo cual puede garantizarse tomando V_y suficientemente pequeño, entonces basta con ver que $X \setminus \{\bigcup U_{y,i}\}$ es compacto. Su imagen, $f(X \setminus \{\bigcup U_{y,i}\}) = Y \setminus \{\bigcup V_y\}$, es compacta, luego pueden tomarse una cantidad finita de entornos $\{V_i\}_{i=1}^n$ recubiertos por f tales que $Y \setminus \{\bigcup V_y\} \subset V_1 \cup \dots \cup$

V_n . Entonces, $X \setminus \{\bigcup U_{y,i}\} \subset \overline{f^{-1}(V_1)} \cup \dots \cup \overline{f^{-1}(V_n)}$ es un cerrado contenido en un compacto, de modo que es compacto.

Finalmente, comprobamos la unicidad, que de hecho es independiente del f : dadas dos superficies de Riemann compactas X_1 y X_2 , si $\Sigma_i \subset X_i$ son subconjuntos finitos y $X_i^* = X_i \setminus \Sigma_i$ son isomorfas, entonces las superficies originales lo son. Para verificarlo, sea $\varphi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ el isomorfismo y V_1, \dots, V_n cartas centradas en cada uno de los puntos de Σ_2 y homeomorfas a \mathbb{D} . Sea ahora $x \in \Sigma_1$ y $U \subset X_1$ una carta centrada en x homeomorfa a \mathbb{D} y lo suficientemente pequeña como para que $U \cap X_1^* = U \setminus \{x\}$. Sea $\{x_n\} \subset U \cap X_1^*$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$. Por tanto, ha de tenerse $\varphi(x_n) \rightarrow y \in X_2$, y de hecho $y \in \Sigma_2$ dado que, en caso contrario, $\varphi^{-1}(y) \in X_1^*$ sería un punto de acumulación de x_n que es convergente, luego debería ser $x \notin X_1^*$, una contradicción. Basta ahora con extender φ definiendo $\varphi(x) = y$. Dicha extensión puede verificarse que sigue siendo un isomorfismo. \square

A.2. Resultados auxiliares sobre curvas algebraicas

En este apéndice se proporciona la demostración del Lema 2.12. Para el punto 1, consideramos $\mathbb{C}[X, Y] \simeq \mathbb{C}[X][Y]$. Por el lema de Gauss, como F y G son coprimos en $\mathbb{C}[X][Y]$, entonces lo son en $\mathbb{C}(X)[Y]$, que es un anillo de polinomios sobre un cuerpo y por tanto se tiene una identidad de Bézout:

$$1 = AF + BG.$$

Ahora, *eliminando denominadores*, la identidad puede reescribirse como $q(X) = A_1F + B_1G$, con todos los polinomios involucrados en $\mathbb{C}[X, Y]$. Si $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_G$ fuesen infinitos puntos de intersección distintos, se tendría, evaluando la identidad deducida anteriormente, que $q(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que solo hay una cantidad finita de valores distintos de x_n , lo que es una contradicción (porque $F(x_n, y) = 0$ o $G(x_n, y) = 0$ solo tienen finitas soluciones en y).

Para el punto 2, basta con observar que con esas hipótesis G y F no pueden ser coprimos (se anulan en una cantidad infinita de puntos comunes), luego $F|G$ porque F es irreducible. \square

A.3. Fórmula de Riemann-Hurwitz

En este apéndice se proporciona la siguiente relación entre la ramificación de una función meromorfa y el género de la superficie de partida:

Teorema A.1 (Riemann-Hurwitz). *Sea $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un morfismo con $\deg f = d$. Sea g el género de X . Entonces, se cumple que*

$$2g - 2 = -2d + \sum_{x \in X} (m_x(f) - 1).$$

Demostración. Sean $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ los puntos de ramificación. Tomamos una triangulación $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, T_{n+r}\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que, para $1 \leq i \leq n$, el triángulo T_i tiene como uno de sus vértices a $f(x_i)$, siendo los otros dos valores no ramificados. Entonces, $f^{-1}(\mathcal{T})$ es una triangulación de X cuyas características podemos conocer gracias al Teorema 2.8: $f^{-1}(\mathcal{T})$ tiene $(n+r)d$ triángulos, observando las preimágenes de un punto interior de cada T_j y, del mismo modo, el número de aristas también se ve multiplicado por el factor d . No obstante, de cada T_j con $1 \leq j \leq n$, hay dos vértices no ramificados y un tercero que sí lo está, mientras que si $j > n$ ninguno está ramificado. Por tanto, si v es el número de vértices en \mathcal{T} , entonces $f^{-1}(\mathcal{T})$ tiene $dv - \sum_{i=1}^n (m_{x_i}(f) - 1)$, donde se descuentan los vértices compartidos por multiplicidad. Ahora basta con aplicar la fórmula de Euler a ambas triangulaciones: denotando v', e', f' al número de vértices, aristas y caras en $f^{-1}(\mathcal{T})$, y v, e, f en \mathcal{T} , se tiene

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -v' + e' - f' = -dv + \sum_{i=1}^n (m_{x_i}(f) - 1) + de - df = \\ &= -d(v - e + f) + \sum_{i=1}^n (m_{x_i}(f) - 1) = -2d + \sum_{i=1}^n (m_{x_i}(f) - 1). \end{aligned}$$

□

A.4. Par de Belyi dado por un *dessin*

En este apéndice esbozamos la idea de la construcción de un Par de Belyi dado un *dessin* (X, \mathcal{D}) . La construcción realizada será de manera natural la inversa a la dada en sentido contrario en el Teorema 3.2. En primer lugar, construimos una triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ de X como sigue: escogemos un punto arbitrario en el interior de cada cara del *dessin*, que denominaremos *centro*, y trazamos curvas hacia cada uno de los vértices, dividiendo la cara en triángulos de dos tipos según la orientación de la frontera. En la Figura A.1 se observan estos triángulos para una de las caras: aquellos en los que el orden de los vértices es *blanco-negro-centro-blanco* en sentido positivo de la frontera se denominan *positivos* y se han representado de color blanco, mientras que los otros son *negativos* y aparecen de color gris.

A continuación, construiremos una aplicación continua $f_{\mathcal{D}}$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, que además envíe los vértices blancos al 0, los negros al 1 y los centros a ∞ . Dicha aplicación será un recubrimiento cuando se restringe fuera de los vértices y centros del *dessin*. A través de este recubrimiento, la superficie sin los centros y vértices, X^* , puede dotarse de una estructura de superficie de Riemann *levantando* la estructura en $\widehat{\mathbb{C}}$ por $f_{\mathcal{D}}$, lo que da lugar a una superficie $S_{\mathcal{D}}^*$ de manera tal que $f_{\mathcal{D}} : S_{\mathcal{D}}^* \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ es un morfismo no ramificado. Finalmente, se invoca el Lema 2.11 para obtener $(S_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$ el par de Belyi buscado.

Para construir dicha aplicación, consideramos la triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D}) = \{T_j^+\} \cup \{T_j^-\}$, donde se distingue entre los triángulos positivos y negativos, y el subíndice j representa la arista del *dessin* que constituye uno de los lados del triángulo. Obsérvese

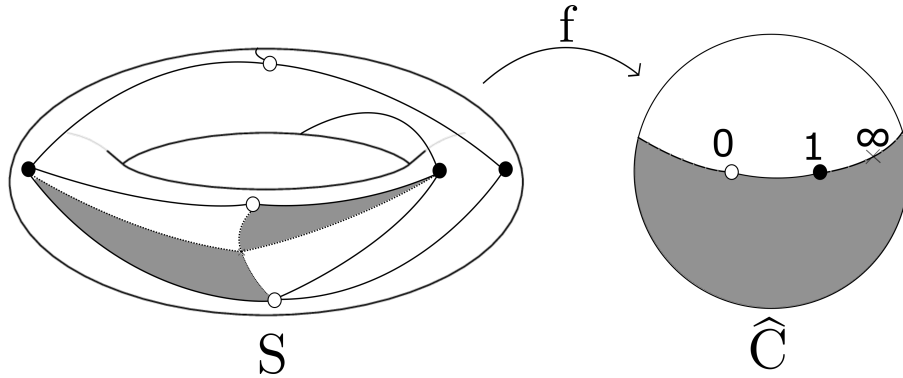


Figura A.1: Triangulación de las caras de un *dessin* y cómo se aplica sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

que cada arista tiene un triángulo de cada tipo en cada lado, es decir, los triángulos positivos están en biyección con los negativos. Ahora se escoge T_j^+ y se construye un homeomorfismo $f_j^+ : T_j^+ \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que preserve la orientación, tal que $\partial T_j^+ \mapsto \mathbb{R}$, el vértice blanco se envíe al 0, el negro al 1 y el centro al ∞ . Ahora, se toma T_j^- , el triángulo negativo adyacente por una arista del *dessin*, y se construye un $f_j^- : T_j^- \rightarrow \mathbb{H}^- \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ igual que el anterior, pero sobre la clausura del semiplano inferior y tal que $f_j^- = f_j^+$ en $T_j^+ \cap T_j^-$. El proceso continúa variando el j , enviando cada triángulo al semiplano de $\widehat{\mathbb{C}}$ correspondiente de manera coherente en las intersecciones.

A través de esta construcción se tienen las propiedades deseadas: los vértices blancos son enviados al 0, los negros al 1, los centros al ∞ y fuera de esos puntos se tiene un homeomorfismo local (dado por f_j^+ o f_j^-). Además, esta construcción invierte la dada en el otro sentido, puesto que $f_{\mathcal{D}}^{-1}([0, 1]) = \mathcal{D}$. \square

A.5. Equivalencia entre *dessins* y representaciones de permutaciones

En este apéndice se ilustra la idea de la equivalencia entre *dessins d'enfants* (X, \mathcal{D}) de n aristas y pares de permutaciones $\sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma_n$ que generan un subgrupo transitivo. Como se explicó en la sección 3.2, dado un *dessin* es posible obtener tal par de permutaciones. Recíprocamente, es posible reconstruir el *dessin* a través del par como sigue:

1. Por cada ciclo de $\sigma_1 \sigma_0$, correspondiente a una cara cuyo número de aristas es el doble que la longitud del ciclo l , se construye un polígono de $2l$ lados con vértices blancos y negros de colores alternados.
2. Una vez construido, se etiquetan aristas alternadas según el ciclo que dio lugar al polígono.
3. A través de σ_0 , se etiquetan las aristas restantes.

4. Se identifican las aristas con la misma etiqueta para obtener el *dessin* final. La superficie resultante es conexa por la transitividad del subgrupo generado por las permutaciones γ , y, evidentemente, la representación en permutaciones del *dessin* obtenido es (σ_0, σ_1) .

Un ejemplo de esta construcción se ilustra en la Figura A.2.

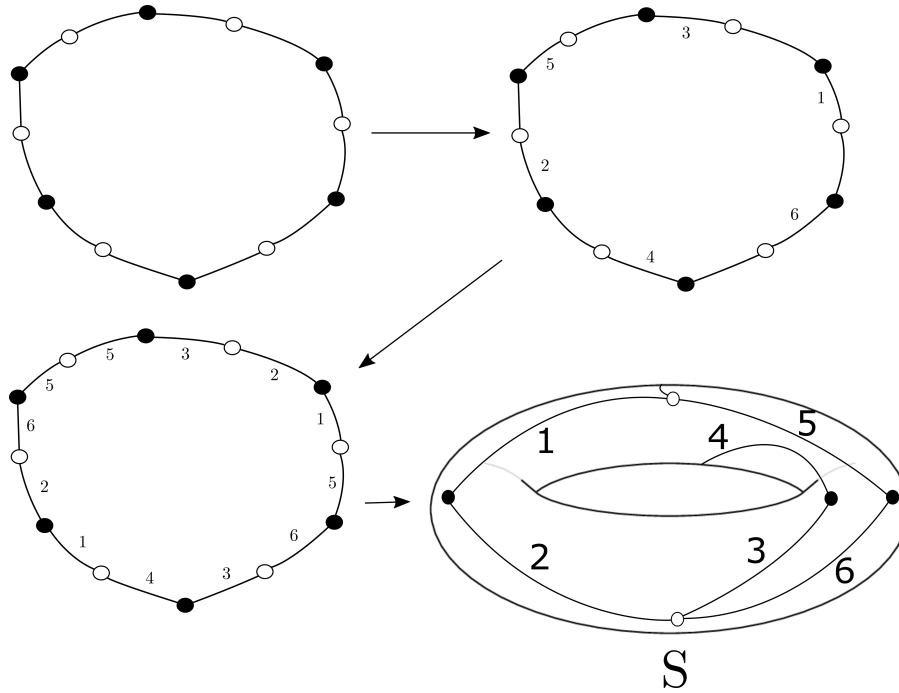


Figura A.2: Ejemplo de obtención de un *dessin* a partir de su representación en permutaciones.

Se comienza con $\sigma_0 = (154)(326)$ y $\sigma_1 = (12)(34)(56)$. Al calcular $\sigma_1\sigma_0 = (164253)$, se obtiene una única cara de 12 lados. A continuación, se marca una de las aristas con la etiqueta 1 y, de manera alternada, se asignan el resto de etiquetas (6, 4, 2, 5 y 3) de tal manera que de una etiqueta a la siguiente se hayan rodeado un vértice blanco y uno negro en sentido positivo. Para asignar las etiquetas restantes, se utiliza σ_0 . Por ejemplo, la siguiente arista en sentido positivo alrededor de un vértice blanco a la etiquetada con 1 deberá tener la etiqueta 5. Una vez completadas las asignaciones, se identifican los lados con la misma etiqueta.

A.6. Resultado auxiliar sobre composiciones de funciones polinómicas

En este apéndice se justifica el siguiente paso técnico de la demostración de la proposición 3.9: si $T(z) = \alpha z + \beta$ y $g, g^\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son polinomios del mismo grado tales que existe un tercer polinomio $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $q(g(T(z))) = q(g^\sigma(z))$, entonces

existen constantes $c, d \in \mathbb{C}$ con $g(T(z)) = cg^\sigma(z) + d$. Esto es un caso particular del siguiente lema:

Lema A.2. Sean $H_1, H_2 \in \mathbb{C}[X]$ polinomios del mismo grado y $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[X]$ con $G_1 \circ H_1 = G_2 \circ H_2$. Entonces existen constantes $c, d \in \mathbb{C}$ con $H_1 = cH_2 + d$.

Demostración. Nótese en primer lugar que, como el grado de los H_j es igual y $G_1 \circ H_1 = G_2 \circ H_2$, necesariamente $\deg(G_1) = \deg(G_2)$. Supongamos primero que $H_1(0) = H_2(0)$ y ambos son mónicos. Entonces, escribimos $H_1(X) = \sum_{k=1}^m \alpha_k X^k$, $H_2(X) = \sum_{k=1}^m \beta_k X^k$, con $\alpha_m = \beta_m = 1$, y $G_1(X) = \sum_{k=0}^n a_n X^n$ y $G_2(X) = \sum_{k=0}^n b_n X^n$. El término de grado máximo en $G_1 \circ H_1$ es a_n y el de $G_2 \circ H_2$ es b_n , de modo que $a_n = b_n$. Los términos siguientes son $na_n \alpha_{m-1}$ y $nb_n \beta_{m-1}$, de donde $\alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$. Iterativamente, comparar los términos desde el máximo (nm) hasta el $nm - m + 1$ permite establecer que $\alpha_j = \beta_j$ para todo j , es decir, $H_1 = H_2$.

Si, por el contrario, H_1 y H_2 no son mónicos ni se anulan en 0, basta con aplicar lo anterior a los nuevos polinomios $\tilde{H}_1(z) := \frac{H_1(z) - \alpha_0}{\alpha_m}$, $\tilde{H}_2 := \frac{H_2(z) - \beta_0}{\beta_m}$, $\tilde{G}_1(z) := G_1(\alpha_m z + \alpha_0)$, $\tilde{G}_2(z) := G_2(\beta_m z + \beta_0)$. De $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2$ se deduce entonces que basta tomar $c = \frac{\alpha_m}{\beta_m}$, $d = \alpha_0 - \alpha_m \frac{\beta_0}{\beta_m}$. \square