Introducción a la teoría de Hodge en geometría algebraica compleja

Miguel González (ICMAT-UCM)

Seminario de Doctorandos UCM

Enero 2024

Contenidos

La Teoría de Hodge permite estudiar las formas diferenciales y la cohomología en una variedad.

- Parte I: Variedad Kähler compacta (e.g. variedad proyectiva sobre $\mathbb{C}$). Teoría "clásica". Dota a la cohomología de nueva estructura.
- Parte II: ¿Qué ocurre en variedades cuasiproyectivas? Teoría de Hodge mixta (Deligne, 1971).

Recordatorio: geometría compleja

- Sea X una variedad compleja (i.e. localmente $\mathbb{C}^n$, con transiciones holomorfas).
- Coordenadas complejas $(z_1, \ldots, z_n)$. Coordenadas reales: x_i e y_i las partes real e imaginaria.
- Formas diferenciales con valores complejos: como siempre, pero a partir de $T^*X \otimes \mathbb{C}$. Ejemplo (localmente): $dz_k := dx_k + idy_k$, $d\bar{z}_k := dx_k - idy_k$.
- Espacio de k-formas: $\Omega^k(X, \mathbb{C})$, también $\Omega^k(X)$.
- Localmente, sumando $f \cdot dz_I \wedge d\bar{z}_J$. $|I| + |J| = k$ el grado de la forma, $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$.
- Subespacios $\Omega^{p,q}(X)$. Se tiene $\Omega^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(X)$.

Recordatorio: cohomología de de Rham

- Operador $d : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$.
- En una variedad compleja, $d = \partial + \bar{\partial}$ (Operadores de **Dolbeault**).
- $\partial : \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p+1,q}(X)$ dado (localmente) por $f \cdot dz_I \wedge d\bar{z}_J \mapsto \sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$.
- Como $d^2 = 0$, complejo:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \Omega^2(X) \xrightarrow{d} \dots$$

- **Cohomología de de Rham.**

$$H^k(X) := \frac{\ker \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)}{\operatorname{Im} \Omega^{k-1}(X) \to \Omega^k(X)}.$$

Recordatorio: variedades Kähler

- Una **forma Kähler** en X es una 2-forma con valores reales $\omega \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$, cerrada ($d\omega = 0$), no degenerada ($\omega^n$ nunca se anula) y tal que:

$$g(u, v) := \omega(u, Jv), \quad u, v \in T_pX$$

  define una métrica riemanniana (J inducido por la estructura compleja).
- El par (X, ω) es una **variedad Kähler**.
- Ejemplos: variedades proyectivas lisas (*smooth*) sobre $\mathbb{C}$.

Parte I: Norma L^2 y el dual de Hodge

(X, ω) Kähler **compacta**. Métrica riemanniana g, extiende a métrica hermítica $(\cdot, \cdot)$ en $TX \otimes \mathbb{C}$, $T^*X \otimes \mathbb{C}$ y sus productos exteriores. Forma de volumen $\eta = \omega^n/n!$.

Definition

El **dual de Hodge** de $\beta \in \Omega^k(X)$ es $*\beta \in \Omega^{2n-k}(X)$ tal que:

$$(\alpha_p, \beta_p)_p \cdot \eta_p = \alpha_p \wedge \overline{*\beta_p}$$

para todo $p \in X$, $\alpha \in \Omega^k(X)$.

- Ejemplo: en $\mathbb{C}^2$, $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$. $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2$, se tiene $(dx_1, dx_1) = 1$. Entonces $*dx_1 = dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2$.
- La **métrica** L^2 en $\Omega^k(X)$ se define como:

$$(\alpha, \beta)_{L^2} := \int_X (\alpha, \beta)\eta = \int_X \alpha \wedge \overline{*\beta}.$$

Parte I: Operadores adjuntos, laplaciano

- Definimos el operador $d^* : \Omega^k(X) \to \Omega^{k-1}(X)$, dado por $d^* := - * d *$. Análogamente $\partial^* = - * \bar{\partial} *$ y $\bar{\partial}^* = - * \partial *$.
- Se tiene $(\alpha, d^* \beta)_{L^2} = (d\alpha, \beta)_{L^2}$. ¿$\ker d^*$?

Definition

El **laplaciano** $\Delta : \Omega^k(X) \to \Omega^k(X)$ se define como $\Delta = dd^* + d^* d$. Denotamos $\mathcal{H}^k(X) := \ker \Delta$ el espacio de **formas armónicas**.

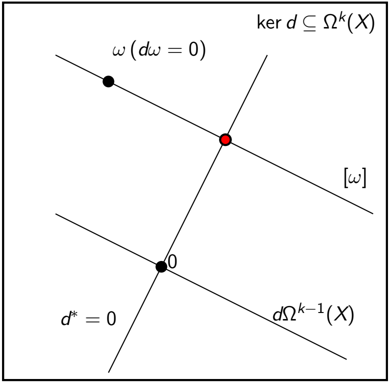
- Ejemplo (dim. real 2): si $\alpha = f \cdot dx \wedge dy$, entonces $d^* \alpha = - * d * \alpha = - * (f_x dx + f_y dy) = -f_x dy + f_y dx$. Por tanto $\Delta\alpha = -(f_{xx} + f_{yy})(dx \wedge dy)$. α es armónica si y solo si f lo es en el sentido usual.
- $\mathcal{H}^k(X) = \ker d \cap \ker d^*$.

Parte I: Cohomología y formas armónicas

Theorem

La aplicación natural $\mathcal{H}^k(X) \to H^k(X)$ es un isomorfismo.

Demostración: Sigue de $\Omega^k(X) = \mathcal{H}^k(X) \oplus \Delta(\Omega^k(X))$ (teorema de operadores elípticos).



Parte I: Identidades Kähler

- (X, ω) variedad **Kähler** compacta.
- Sea $\Lambda : \Omega^k(X) \to \Omega^{k-2}(X)$ el adjunto L^2 de *multiplicar por* ω. Está dado por $(-1)^k * (\wedge\omega) *$.
- Se tienen:

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*,$$

$$[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*.$$

- Consecuencia: $\Delta = 2\Delta_{\partial}$.
- (Donde $\Delta_{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial$).

- $\Delta = 2\Delta_\partial$ preserva $\Omega^{p,q}(X)$.
- Si $\alpha = \sum_{p+q=k} \alpha_{p,q}$, se tiene $\Delta(\alpha)_{p,q} = \Delta(\alpha_{p,q})$. Así, α armónica implica $\alpha_{p,q}$ armónica.
- Es decir: $\mathcal{H}^k(X) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{H}^{p,q}(X)$.

Theorem

*Se tiene una descomposición (**independiente de** ω):*

$$H^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

Además $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$.

- Nuevos invariantes: **números de Hodge** $h_{p,q} = \dim H^{p,q}(X)$. Se tiene $b_k = \sum_{p+q=k} h_{p,q}$ y $h_{p,q} = h_{q,p}$. En particular $2 \mid b_{2k+1}$.

Parte I: Filtración de Hodge

En otras palabras, el espacio $V := H^k(X)$ tiene una **filtración de Hodge**:

$$V \supseteq F^1 V \supseteq \cdots \supseteq F^k V \supseteq 0$$

donde $F^i V := \bigoplus_{p \geqslant i} H^{p,k-p}(X)$. Se cumple que $V = F^i V \oplus \overline{F^{k+1-i} V}$.

Definition

Una **estructura de Hodge (pura) de peso** k es un par $(V, F^\bullet V)$ consistente en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V y una filtración decreciente $F^\bullet V$ tal que $V = F^i V \oplus \overline{F^{k+1-i} V}$.

El teorema de Hodge dice que existe una estructura de Hodge pura de peso k en $H^k(X)$ para X Kähler compacta.

Parte II: Motivación

- ¿Qué pasa en variedades cuasiproyectivas U? No son **compactas** ni **Kähler** en general.
- Ejemplo más sencillo: $U = \mathbb{C}^\times$.
- Tenemos $H^1(U) = \mathbb{C} \cdot \frac{dz}{z}$. Es decir, $\dim = 1$. **No se puede** $H^1(U) = H^{1,0}(U) \oplus H^{0,1}(U)$.
- De hecho, $\frac{dz}{z} = -\frac{d\bar{z}}{\bar{z}} + d(\log|z|^2)$.
- ¿Solución?
- Adelanto: $\frac{dz}{z}$ tendrá que ser de tipo $(1,1)$.

Parte II: Caso a estudiar

- Idea: compactificar $U \subseteq X$ y utilizar la estructura Hodge en X.
- La inclusión $U \hookrightarrow X$ induce la restricción

$$H^i(X) \to H^i(U).$$

- Queremos trasladar la información de $H^i(X)$. Problema:

$$? \to H^i(X) \to H^i(U) \to ?$$

- Por ejemplo, $\mathbb{C}^\times \subseteq \mathbb{P}^1$. Se tiene $H^1(\mathbb{P}^1) = 0$.
- También: X una curva, $\dim H^1(X) = 2g$, Y una colección de $n+1$ puntos, luego $\dim H^1(U) = 2g + n$.
- Nos centramos en el caso $U = X \setminus Y$ con Y un divisor liso (*smooth*). En particular $H^i(Y)$ también tiene estructura Hodge.

Parte II: Cohomología relativa

- Dada una subvariedad $U \subseteq X$ podemos considerar la **cohomología relativa**, $H^i(X, U)$. Es la cohomología del complejo $\Omega^\bullet(X) \oplus \Omega^{\bullet-1}(U)$ con $d(\omega, \theta) = (d\omega, \omega|_U - d\theta)$.
- Se tiene:

$$\cdots \to H^i(X, U) \to H^i(X) \to H^i(U) \to H^{i+1}(X, U) \to \dots$$

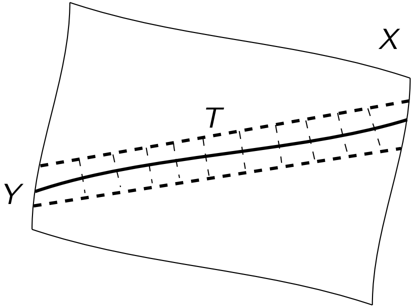
- Es decir:

$$0 \to A \to H^i(U) \to B \to 0.$$

  donde $A = \operatorname{coker}(H^i(X, U) \xrightarrow{f_i} H^i(X))$ y
  $B = \ker(H^{i+1}(X, U) \xrightarrow{f_{i+1}} H^{i+1}(X))$.
- Si $H^i(X, U)$ tiene estructura Hodge y f_i la preserva, A y B tendrán estructura Hodge.
- Y $H^i(U)$ sería una extensión de dos estructuras Hodge. **¡De pesos distintos!**.

Parte II: Estructura de Hodge en $H^i(X, U)$.

- Tomamos T un *entorno tubular* de Y, difeomorfo al fibrado normal $N_X Y$.



- **Excisión.** $H^i(X, U) \simeq H^i(T, T \setminus Y)$.
- **Isomorfismo de Thom.** $H^i(T, T \setminus Y) \simeq H^{i-2}(Y)$.

Parte II: Estructura de Hodge en $H^i(X, U)$ (cont.)

- $H^i(X, U) \simeq H^{i-2}(Y)$.
- Como Y es proyectiva, tenemos una estructura de Hodge (de peso $i-2$).
- La aplicación $f_i : H^{i-2}(Y) \to H^i(X)$ (aplicación de **Gysin**) se obtiene también usando dualidad de Poincaré y considerando $j_* : H_{2n-i}(Y) \to H_{2n-i}(X)$ inducida por la inclusión, donde $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.
- Y f_i preserva la estructura Hodge, tras un desplazamiento $(+1, +1)$.

Parte II: Estructura de Hodge mixta en $H^i(U)$

- En resumen, tenemos que $H^i(U)$ no tiene una estructura de Hodge, pero **está filtrada en dos partes**, cada una con estructuras de Hodge de peso distinto.
- $W_i := \operatorname{coker}(H^i(X, U) \to H^i(X))$.
- $W_{i+1} := H^i(U)$.
- Por tanto $W_{i+1}/W_i = \ker(H^{i+1}(X, U) \to H^{i+1}(X))$.
- Filtración $0 \subseteq W_i \subseteq W_{i+1} = H^i(U)$, tal que W_k/W_{k-1} es una estructura de Hodge pura de peso k.

Parte II: Ejemplo

- Si $U = \mathbb{C}^\times$ y $X = \mathbb{P}^1$ (luego $Y = \{0, \infty\}$), ya sabemos que $H^1(\mathbb{P}^1) = 0$. Por tanto solo hay peso 2. La única estructura de Hodge en peso 2 y dimensión 1 es la que solo tiene parte $(1, 1)$.
- También podemos verlo calculando $\ker(H^2(X, U) \to H^2(X))$, es decir el núcleo de la aplicación $H^0(Y) = \mathbb{C}^2 \to H^2(X) = \mathbb{C}$ que está dada por $(x, y) \mapsto x + y$. Se trata de un espacio de dimensión 1 en la parte $(0, 0)$ de $H^0(Y)$.

Parte II: Teorema general

- Hemos asumido que $Y = X \backslash U$ era lisa. Esto no ocurre salvo en ejemplos concretos. Por ejemplo, si $U = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$, tomando $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ resulta $Y = (\{0, \infty\} \times \mathbb{P}^1) \cup (\mathbb{P}^1 \times \{0, \infty\})$.

Theorem (Deligne)

*Sea U una variedad cuasiproyectiva compleja y X una compactificación tal que $X \backslash U$ es una **unión de divisores lisos con intersecciones transversales**. Sea $V := H^i(U)$.*
*Existe una **estructura de Hodge mixta** en V, es decir:*

- *Una **filtración de pesos***
  $0 \subseteq \cdots \subseteq W^k V \subseteq W^{k+1} V \subseteq \cdots \subseteq \ldots,$
- *y una **filtración de Hodge** $V \supseteq \cdots \supseteq F^p V \supseteq F^{p+1} V \supseteq \ldots,$*
- *tales que $W^k V / W^{k-1} V$ con la filtración inducida por $F^\bullet$ es una estructura de Hodge de peso k.*

Nuevos invariantes $h_{p,q;k}$.

Parte II: Idea y propiedades

- Las estructuras de Hodge mixtas tienen buenas propiedades: son preservadas por morfismos algebraicos y por aplicaciones en cohomología como el isomorfismo de Künneth o el *cup product*.
- Idea: se tiene para una variedad compleja X que $H^i(X) = \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_{hol})$. El complejo $\Omega^\bullet_{hol}$ tiene una filtración trivial decreciente $\Omega^{\geqslant p}_{hol}$, que induce la filtración de Hodge en caso de que X sea proyectiva.
- Si intentamos hacer lo mismo con U falla. Por ejemplo si U es afín, sale la filtración trivial. No obstante también se tiene $H^i(U) = \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_{hol}(\log Y))$. Este *complejo logarítmico* admite dos filtraciones naturales (una de ellas la trivial), que inducen las filtraciones de pesos y de Hodge.

Fin.

Muchas gracias por vuestra atención.

Referencias

Pierre Deligne.
Théorie de Hodge, II.
Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 40(1):5–57, Dec 1971.

Sean Howe.
Introduction to Mixed Hodge Theory and Hodge II (Notes for the talks of June 27th and July 5th).

Claire Voisin.
Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.
Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2002.