LA CLASIFICACIÓN DE SCHOMMER-PRIES DE 2-TQFTS EXTENDIDAS CON TEORÍA DE CATEGORÍAS

MIGUEL GONZÁLEZ

Resumen. El objetivo de esta sesión del seminario de ∞-categorías y TFQTs extendidas de 2024 en la Universidad Complutense de Madrid (UCM) es introducir algunas de las herramientas categóricas que son necesarias para la clasificación de 2-TQFTs extendidas de la tesis de Christopher Schommer-Pries [1] y explorar cómo pueden aplicarse para dicha demostración.

Índice

Motivación. La presentación de 2-TFQTs orientadas extendidas.

En la pasada sesión, vimos que la bicategoría de 2-TQFTs extendidas orientadas con valores en Alg_k^2, esto es, $\mathrm{SymBicat}(\mathrm{Bord}_2^{or}, \mathrm{Alg}_k^2)$, es equivalente a la bicategoría Frob_k de álgebras de Frobenius separables simétricas. El objetivo de esta sesión es tratar algunas de las técnicas de [1] que hacen esto posible. Esencialmente, la estrategia de demostración consiste en utilizar el resultado principal de [1]: que la bicategoría monoidal simétrica Bord_2^{or} admite la presentación de [1, Figure 3.13].

Esto es, es equivalente a la bicategoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ obtenida a partir de dicha presentación $(G_0, G_1, G_2, \mathcal{R})$. Esta se obtiene así:

1. Los objetos son **palabras** (con paréntesis) en G_0, a interpretar como el $\otimes$ entre ellos en el orden de los paréntesis. Ejemplo: Si $G_0 = \{u, v, w\}$ tendremos u, 1, $u \otimes v$, $(u \otimes v) \otimes w$...
2. G_0 y G_1 (que van entre palabras de G_0) nos dan 1-*morfismos básicos*, esto es: G_1 (que va equipado de funciones que indican el origen y el destino, que son palabras), identidades por cada elemento de G_0, *asociadores* por cada par de palabras con la disposición de paréntesis cambiada, *unidadores* a izquierda y a derecha por cada palabra, y conmutadores. Cada uno de los tres últimos tiene además inversos (débiles). Después, tenemos que formar todas las posibles tensorizaciones y composiciones de 1-morfismos básicos, llamadas **frases**. Cada frase tiene de manera natural una origen y un destino.
3. El mismo juego con 2-morfismos. Tenemos 2-*morfismos básicos* obtenidos a partir de G_2 (que pueden ir entre frases) y de los distintos (hay 19) tipos de axiomas de 2-morfismos. Después, se construyen todas las posibles composiciones verticales y horizontales así como

Date: 30 de mayo de 2024.

tensorizaciones de 2-morfismos básicos, llamadas **párrafos**. Cada párrafo tiene origen y destino.
4. Finalmente se agrupan los 2-morfismos según su clase de equivalencia en $\mathcal{R}$.

Pregunta 0.1. ¿Cómo podemos utilizar la presentación $\mathcal{C}$ para demostrar el enunciado de la sesión anterior?

Necesitamos las siguientes técnicas:

1. Construcción de morfismos de bicategorías monoidales simétricas desde $\mathcal{C}$, es decir, identificación de $\mathrm{SymBicat}(\mathcal{C}, -)$. Esto se conoce como el **teorema de cofibrancia** [1, Theorem 2.78].
2. Determinar cuándo un morfismo de bicategorías monoidales simétricas desde $\mathcal{C}$ es una equivalencia. Esto se conoce como el **teorema de Whitehead** para bicategorías monoidales simétricas [1, Theorem 2.25].

1. El teorema de cofibrancia

El teorema de cofibrancia establece que las presentaciones en bicategorías monoidales simétricas se comportan de manera similar a otras presentaciones algebraicas. Por ejemplo los homomorfismos de grupos desde $C_n := \langle x \mid x^n \rangle$ a un grupo G están en correspondencia con los elementos $g \in G$ tales que $g^n = 1$. Lo mismo sucede en nuestro contexto.

Dada una presentación $G := (G_0, G_1, G_2, \mathcal{R})$ y una bicategoría monoidal simétrica M, podemos construir otra bicategoría monoidal simétrica de *datos en M compatibles con G*. La denotaremos $G(M)$.

- Sus objetos son aplicaciones de G_i en M_i que respeten el origen y el destino para $i \geqslant 1$. Asimismo, la aplicación a M_2 debe respetar $\mathcal{R}$, es decir, enviar 2-morfismos equivalentes en el mismo elemento de M_2.
- Los 1-morfismos son asignaciones $(G_0, G_1) \to (M_1, M_2)$, satisfaciendo una serie de condiciones que intuitivamente nos permiten aplicar el 1-morfismo en un dato para llegar al otro.
- Del mismo modo los 2-morfismos asignan a cada elemento de G_0 uno de M_2, satisfaciendo una lista de condiciones para que dados dos 1-morfismos podamos aplicar las imágenes de G_0 por el 2-morfismo a los 1-morfismos correspondientes.

De esta manera, $G(M)$ adquiere de M la estructura de bicategoría monoidal simétrica. El teorema de cofibrancia es:

Teorema 1.1. *El morfismo (de bicategorías monoidales simétricas) natural*

$$\mathrm{SymBicat}(F(G_0, G_1, G_2)/\mathcal{R}, M) \to G(M)$$

es una equivalencia.

Su demostración también puede llevarse a cabo mediante el Teorema de Whitehead que veremos a continuación.

Corolario 1.2. *Se tiene un morfismo natural* $\mathcal{C} \to \mathrm{Bord}_2^{or}$*.*

Efectivamente, basta con enviar cada uno de los generadores al bordismo dado por su dibujo en [1, Figure 3.13].

Corolario 1.3. *Se tiene una equivalencia* $\mathrm{SymBicat}(\mathcal{C}, \mathrm{Alg}_k^2) \simeq \mathrm{Frob}_k$*.*

Esto es lo que vimos la semana pasada. Tomando $M = \mathrm{Alg}_k^2$, nos convencimos de que $G(\mathrm{Alg}_k^2) \simeq$ Frob. Para ello tomábamos las imágenes de los puntos, de los 1-morfismos y del 2-morfismo *cup* para obtener un álgebra A de Frobenius separable y simétrica. El resto de generadores dota a A de un *contexto de Morita*, que puede olvidarse para obtener una equivalencia con Frob.

2. El teorema de Whitehead

La idea ahora es, dado un morfismo $F : X \to Y$, determinar cuándo es una equivalencia. Nos interesa el caso de SymBicat en el que X, Y son bicategorías monoidales simétricas, pero el teorema de Whitehead original ocurre en CWCplx:

Teorema 2.1 (Teorema de Whitehead)**.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre complejos CW. Entonces, f es una equivalencia homotópica si y solo si cada $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ es un isomorfismo para $n > 0$ y una biyección para $n = 0$.*

De algún modo, esto es un teorema sobre $(\infty, 0)$-categorías (estamos trabajando con espacios topológicos). El resultado es mucho más sencillo si trabajamos en Grp. Podemos extraerlo considerando la correspondencia entre grupoides y 1-tipos y usando el teorema anterior.

Proposición 2.2. *Sea $F : X \to Y$ un funtor entre grupoides. F es una equivalencia de categorías si y solo si induce una biyección en clases de isomorfismo de objetos (π_0) y en cada $\pi_1(X, x) = X(x, x)$ con $\pi_1(Y, F(x)) = Y(F(x), F(x))$.*

Esto sigue de un resultado básico de categorías más general.

Proposición 2.3. *Sea $F : X \to Y$ un funtor entre categorías. F es una equivalencia de categorías si y solo si es esencialmente sobreyectivo y totalmente fiel (fully faithful, es decir, biyectivo en morfismos).*

En efecto, dado $y \to y'$, podemos encontrar isomorfismos $Fx \simeq y \to y' \simeq Fx'$ (se usa el axioma de elección para obtener x, x'). Como es totalmente fiel, existe un único f con Ff igual a ese morfismo entre Fx y Fx'. Entonces ponemos $F^{-1}(y \to y') = f'$.

De una manera análoga se puede establecer:

Proposición 2.4. *Sea $F : X \to Y$ un funtor de bicategorías. Entonces F es una equivalencia de bicategorías si y solo si es, simultáneamente:*

- *esencialmente sobreyectivo en objetos.*
- *esencialmente sobreyectivo en 1-morfismos.*
- *totalmente fiel (i.e. biyectivo) en 2-morfismos.*

El resultado de Schommer-Pries establece:

Teorema 2.5. *Sea $F : X \to Y$ un funtor de bicategorías monoidales simétricas. Entonces es una equivalencia si y solo si es una equivalencia de bicategorías, es decir, si y solo si cumple las condiciones de la Proposición anterior.*

Idea de la demostración: Disponemos de $F^{-1} : Y \to X$ que atestigua la equivalencia como bicategorías. Ahora necesitamos dotar a F^{-1} de la compatibilidad con la estructura monoidal. Por ejemplo, necesitamos una transformación $\chi_{yy'}^{F^{-1}}$ que dé lugar a una equivalencia entre los bifuntores dados por $F^{-1}(y) \otimes F^{-1}(y')$ y $F^{-1}(y \otimes y')$. Pero ya tenemos $\chi^F_{F^{-1}yF^{-1}y'} : F(F^{-1}(y)) \otimes F(F^{-1}(y')) \simeq y \otimes y' \to F(F^{-1}(y) \otimes F^{-1}(y'))$. Por tanto basta con hacer $\chi_{yy'}^{F^{-1}} = F^{-1}((\chi^F_{F^{-1}yF^{-1}y'})^{-1})$. Análogamente se procede con el resto de datos de compatibilidad.

Un paso técnico a tener en cuenta en lo anterior es que no tiene por qué existir un único inverso $(\chi^F_{F^{-1}yF^{-1}y'})^{-1}$, sino que el inverso es único salvo isomorfismos. Para solucionar esto, primero se trabaja con bicategorías **esqueléticas**, es decir, en las que dos 1-morfismos isomorfos son iguales y dos objetos equivalentes son iguales. En esta situación, la elección de inversos anterior es única. Después, se concluye demostrando que toda bicategoría monoidal simétrica es equivalente a una que sea esquelética, mediante un procedimiento estándar (pero tedioso) en el que se identifican, en primer lugar, morfismos isomorfos y, en segundo, objetos equivalentes.

2.1. Aplicación en el caso de TQFTs. A continuación esbozamos el argumento de Schommer-Pries para establecer la equivalencia de categorías entre $\mathcal{C}$ y Bord_2^{or}.

- Esencialmente sobreyectiva en objetos: Tenemos que ver que toda 0-variedad compacta orientada es equivalente a una unión disjunta de puntos orientados (estos son los objetos de $\mathcal{C}$), lo cual es claro.
- Esencialmente sobreyectiva en 1-morfismos: Tenemos que ver que todo 1-bordismo se obtiene de pegar los 1-morfismos elementales. Esto se obtiene mediante teoría de Morse.
- Biyectiva en 2-morfismos. Esto es lo más complicado, y ocupa uno de los tres capítulos más otra sección de la tesis. Para la sobreyectividad, primero, se generaliza la teoría de Morse a 2 dimensiones, esto es, se prueba que existen funciones de Morse $F : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ que dan lugar a un diagrama de singularidades. Por ejemplo, en los generadores se obtienen los de [1, Figure 1.6] y [1, Figure 1.7].

  En general, tendremos diagramas como el de la [1, Figure 3.9].

  La demostración pasa por un análisis detallado de los posibles diagramas y de cómo reconstruir el bordismo a partir del diagrama. Tras ello, se demuestra que todos los diagramas posibles se pueden obtener combinando los de los generadores, de manera única una vez se tienen en cuenta las relaciones.

Referencias

[1] Schommer-Pries, C. The Classification of Two-Dimensional Extended Topological Field Theories. (2014)

Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC-UAM-UC3M-UCM, Nicolás Cabrera, 13–15, 28049 Madrid, Spain

Email address: miguel.gonzalez@icmat.es