La estructura de la simetría: una introducción a los sistemas de raíces

Miguel González (ICMAT)

Coloquio Junior
ICMAT

30 septiembre 2025

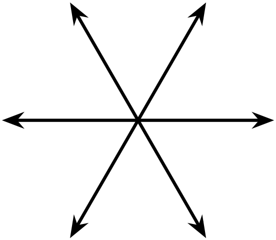
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

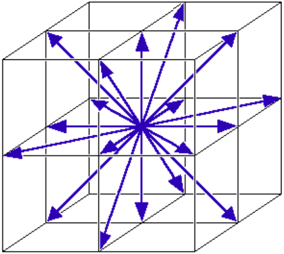
"la Caixa" Foundation

Sistemas de raíces

Motivación

Queremos estudiar conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^n$ con **simetría**.





Motivación

Symmetry in mathematics

13 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

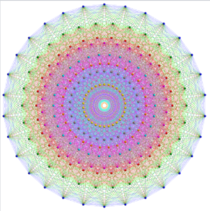
From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see Symmetry (disambiguation) and Bilateral (disambiguation).

Symmetry occurs not only in geometry, but also in other branches of mathematics. Symmetry is a type of invariance: the property that a mathematical object remains unchanged under a set of operations or transformations.[1]

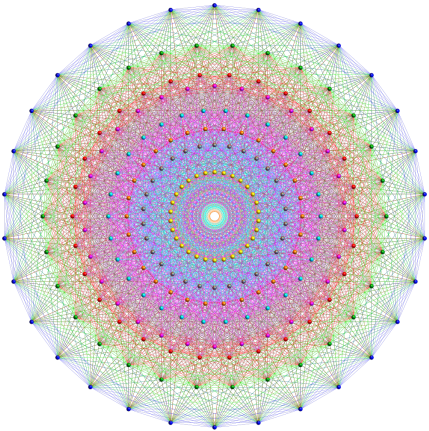
Given a structured object X of any sort, a symmetry is a mapping of the object onto itself which preserves the structure. This can occur in many ways; for example, if X is a set with no additional structure, a symmetry is a bijective map from the set to itself, giving rise to permutation groups. If the object X is a set of points in the plane with its metric structure or any other metric space, a symmetry is a bijection of the set to itself which preserves the distance between each pair of points (i.e., an isometry).

In general, every kind of structure in mathematics will have its own kind of symmetry, many of which are listed in the given points mentioned above.



The root system of the exceptional Lie group E_8. Lie groups have many symmetries.

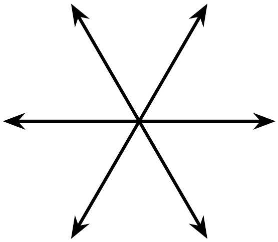
Motivación



The root system of the exceptional Lie group E_8. Lie groups have many symmetries.

Definición

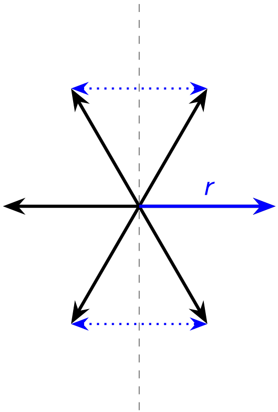
Un **sistema de raíces** es un conjunto generador de vectores $R \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que cumple:



Definición

Un **sistema de raíces** es un conjunto generador de vectores $R \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que cumple:

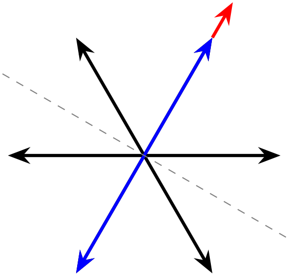
- Para todo $r \in R$, es invariante por la simetría s_r en dirección de r.



Definición

Un **sistema de raíces** es un conjunto generador de vectores $R \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que cumple:

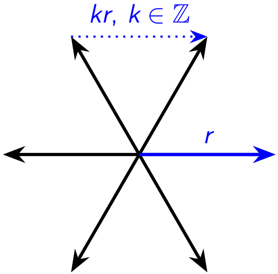
- Para todo $r \in R$, es invariante por la simetría s_r en dirección de r.
- Si $r, \lambda r \in R$, entonces $\lambda \in \{\pm 1\}$.



Definición

Un **sistema de raíces** es un conjunto generador de vectores $R \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que cumple:

- Para todo $r \in R$, es invariante por la simetría s_r en dirección de r.
- Si $r, \lambda r \in R$, entonces $\lambda \in \{\pm 1\}$.
- Si $r \in R$, la simetría s_r desplaza el resto de elementos un **número entero** de veces en dirección de r.

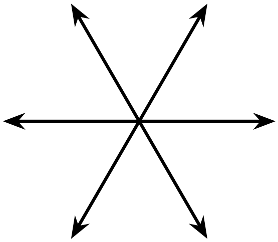


Definición

Un **sistema de raíces** es un conjunto generador de vectores $R \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que cumple:

- Para todo $r \in R$, es invariante por la simetría s_r en dirección de r.
- Si $r, \lambda r \in R$, entonces $\lambda \in \{\pm 1\}$.
- Si $r \in R$, la simetría s_r desplaza el resto de elementos un **número entero** de veces en dirección de r.

Los elementos $r \in R$ se llaman **raíces** y n es el **rango** del sistema.



Primeros ejemplos

Solo hay un sistema de raíces de rango 1:

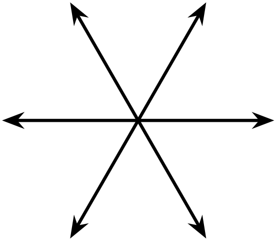
A_1

Primeros ejemplos

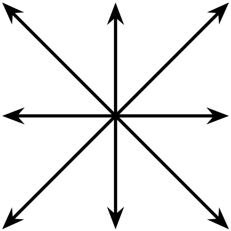
Solo hay un sistema de raíces de rango 1:

A_1

Estos son dos ejemplos de rango 2:



A_2



B_2

El ángulo entre dos raíces

La última condición es muy restrictiva. Si $r, q \in R$, entonces:

$$s_r(q) = q - \underbrace{2\frac{(r,q)}{(r,r)}}_{\in \mathbb{Z}} r.$$

El ángulo entre dos raíces

La última condición es muy restrictiva. Si $r, q \in R$, entonces:

$$s_r(q) = q - \underbrace{2\frac{(r,q)}{(r,r)}}_{\in \mathbb{Z}} r.$$

Consideramos el **ángulo** $\theta := \widehat{rq}$ **entre dos raíces**:

$$4(\cos\theta)^2 = 4\frac{(r,q)^2}{(r,r)(q,q)} = \left(2\frac{(r,q)}{(r,r)}\right) \cdot \left(2\frac{(r,q)}{(q,q)}\right) \in \mathbb{Z}$$

El ángulo entre dos raíces

La última condición es muy restrictiva. Si $r, q \in R$, entonces:

$$s_r(q) = q - \underbrace{2\frac{(r,q)}{(r,r)}}_{\in \mathbb{Z}} r.$$

Consideramos el **ángulo** $\theta := \widehat{rq}$ **entre dos raíces**:

$$4(\cos\theta)^2 = 4\frac{(r,q)^2}{(r,r)(q,q)} = \left(2\frac{(r,q)}{(r,r)}\right) \cdot \left(2\frac{(r,q)}{(q,q)}\right) \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, $4(\cos\theta)^2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

El ángulo entre dos raíces

La última condición es muy restrictiva. Si $r, q \in R$, entonces:

$$s_r(q) = q - \underbrace{2\frac{(r,q)}{(r,r)}}_{\in\mathbb{Z}} r.$$

Consideramos el **ángulo** $\theta := \widehat{rq}$ **entre dos raíces**:

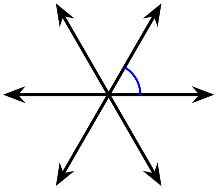
$$4(\cos\theta)^2 = 4\frac{(r,q)^2}{(r,r)(q,q)} = \left(2\frac{(r,q)}{(r,r)}\right)\cdot\left(2\frac{(r,q)}{(q,q)}\right) \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, $4(\cos\theta)^2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

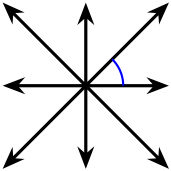
Observación

Los únicos ángulos θ permitidos entre raíces son $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ y sus suplementarios.

Sistemas de rango 2

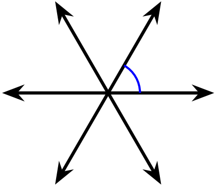


A_2

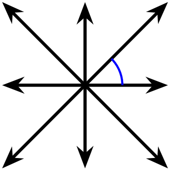


B_2

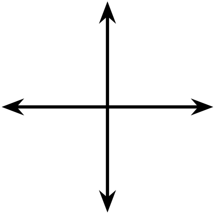
Sistemas de rango 2



A_2

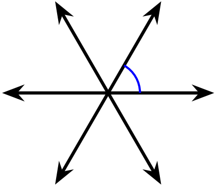


B_2

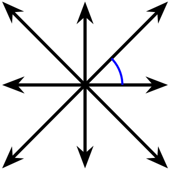


$A_1 \times A_1$

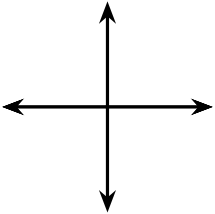
Sistemas de rango 2



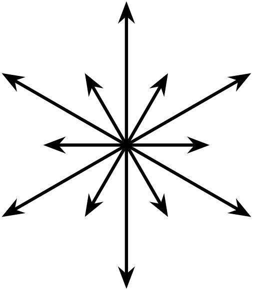
A_2



B_2

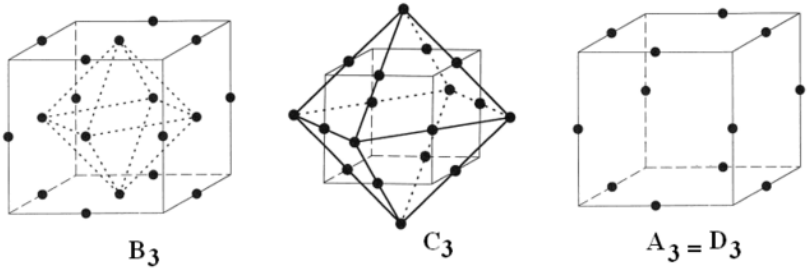


$A_1 \times A_1$



G_2

Sistemas de rango 3



(y productos de sistemas con menor rango)

La clasificación completa

Wilhelm Killing

La clasificación completa

Wilhelm Killing

Élie Cartan

La clasificación completa

Wilhelm Killing

Élie Cartan

Eugene Dynkin

La clasificación completa

СТРУКТУРА ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Е. Б. Дынкин

Алгебры Ли вошли в математику в связи с теорией групп Ли. Три основные теоремы Софуса Ли устанавливают взаимно-однозначное соответствие и тесную связь между локальными группами Ли и алгебрами Ли и сводят изучение локальных групп Ли к изучению алгебр Ли.

Классическая теория имеет дело исключительно с алгебрами Ли над полем действительных или полем комплексных чисел. Наиболее изученными из них являются полупростые алгебры. Основные результаты относительно структуры таких алгебр были найдены около шестидесяти лет тому назад

Estructura de álgebras de Lie semisimples, E.B. Dynkin, 1947

СТРУКТУРА ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Е. Б. Дынкин

Алгебры Ли вошли в математику в связи с теорией групп Ли. Три основные теоремы Софуса Ли устанавливают взаимно-однозначное соответствие и тесную связь между локальными группами Ли и алгебрами Ли и сводят изучение локальных групп Ли к изучению алгебр Ли.

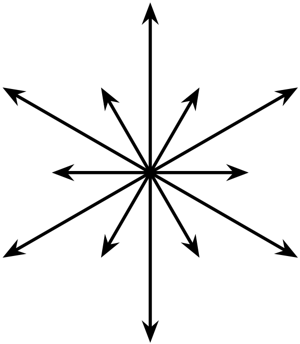
Классическая теория имеет дело исключительно с алгебрами Ли над полем действительных или полем комплексных чисел. Наиболее изученными из них являются полупростые алгебры. Основные результаты относительно структуры таких алгебр были найдены около шестидесяти лет тому назад

Estructura de álgebras de Lie semisimples, E.B. Dynkin, 1947

En este artículo, utilizando solo matemáticas elementales y comenzando con casi nada, Dynkin desarrolló de manera brillante y elegante la estructura y la maquinaria de las álgebras de Lie semisimples. Lo que logró con este trabajo fue abordar un tema hasta ahora esotérico y convertirlo en una matemática hermosa y poderosa. - Bertram Kostant, Selected papers, p. 363.

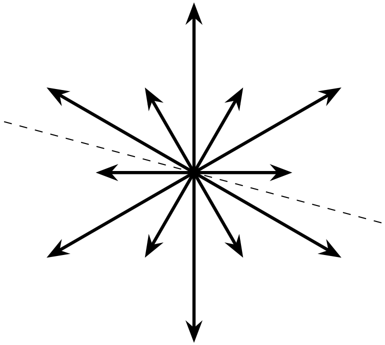
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



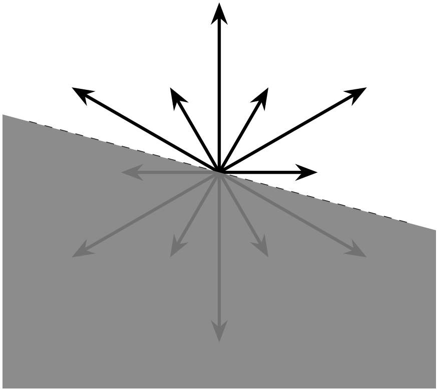
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



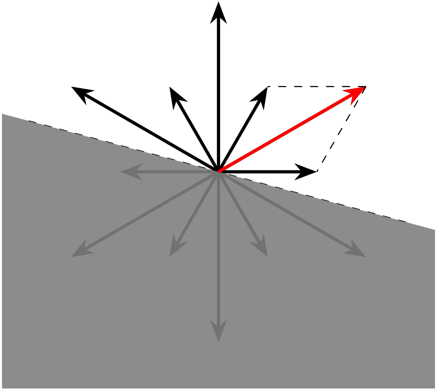
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



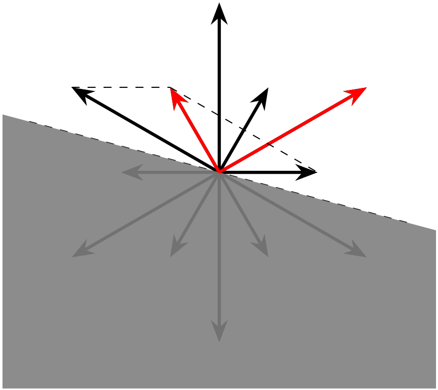
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



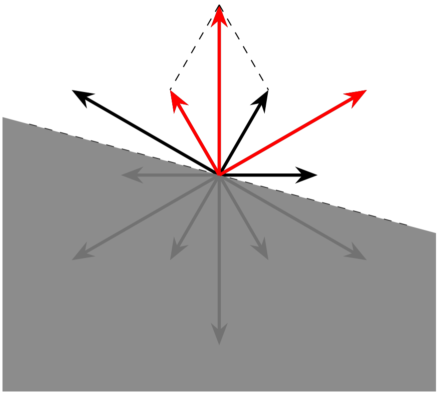
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



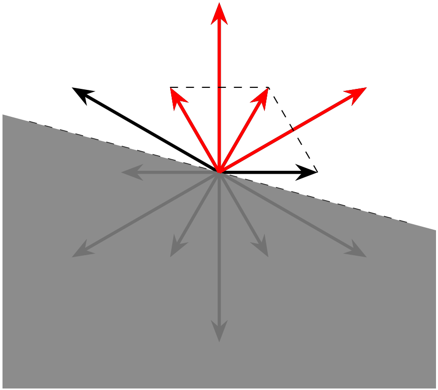
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



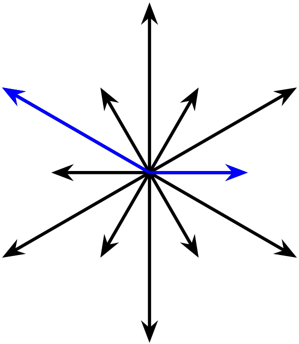
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



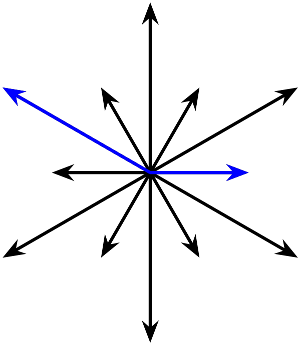
Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



Raíces simples

Primera idea: encontrar una *base* adecuada. Ejemplo en G_2:



- Mismo procedimiento en general.
- Estas n raíces se denominan **raíces simples**.
- Contienen **toda la información** del sistema.

Diagramas de Dynkin

La información del sistema se representa con un **diagrama de Dynkin**, un (multi) grafo con:

- Un **vértice** por cada raíz simple r_i.

Diagramas de Dynkin

La información del sistema se representa con un **diagrama de Dynkin**, un (multi) grafo con:

- Un **vértice** por cada raíz simple r_i.
- Entre r_i y r_j tantas **aristas** como $4(\cos(\widehat{r_i r_j}))^2$.

Ángulo	Aristas
90°	0
120°	1
135°	2
150°	3

Diagramas de Dynkin

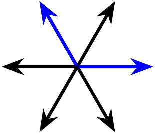
La información del sistema se representa con un **diagrama de Dynkin**, un (multi) grafo con:

- Un **vértice** por cada raíz simple r_i.
- Entre r_i y r_j tantas **aristas** como $4(\cos(\widehat{r_i r_j}))^2$.

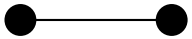
Ángulo	Aristas
90°	0
120°	1
135°	2
150°	3

- Si hay más de una arista se indica la raíz más grande con una flecha.

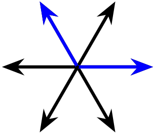
Diagramas de Dynkin de rango 2



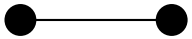
A_2

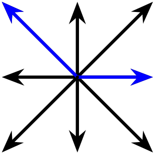


Diagramas de Dynkin de rango 2

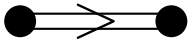


A_2

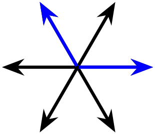




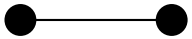
B_2

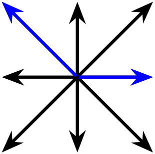


Diagramas de Dynkin de rango 2

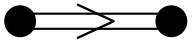


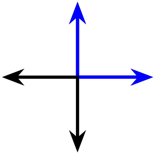
A_2





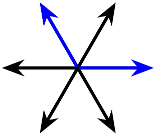
B_2



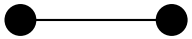


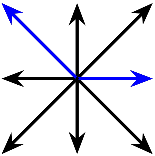
$A_1 \times A_1$

Diagramas de Dynkin de rango 2

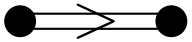


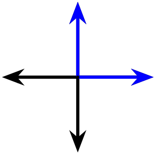
A_2



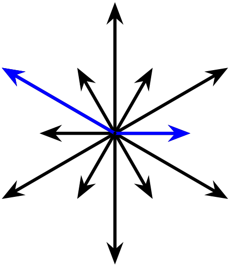


B_2





$A_1 \times A_1$



G_2

Reglas de clasificación I

Solo queda **clasificar** los posibles diagramas de Dynkin, usando ciertas **reglas** obtenidas algebraicamente.

Regla I

En un diagrama de Dynkin **no hay ciclos**.

Reglas de clasificación I

Solo queda **clasificar** los posibles diagramas de Dynkin, usando ciertas **reglas** obtenidas algebraicamente.

Regla I

En un diagrama de Dynkin **no hay ciclos**.

Demostración:

1. Supongamos que $r_1, \ldots, r_k$ son raíces simples. Las normalizamos: $s_1, \ldots, s_k$ y las sumamos $s := s_1 + \cdots + s_k$.
2. Ahora
$$(s, s) = k + \sum_{i<j} 2(s_i, s_j).$$
3. Observación: $(2(s_i, s_j))^2 = 4\cos(\widehat{r_i r_j})^2$ luego si r_i y r_j son adyacentes, la cantidad $2(s_i, s_j)$ es menor que -1.
4. Por tanto, si hay un ciclo, $(s, s) \leqslant k - k = 0$.

Reglas de clasificación II

Regla II

De un vértice de un diagrama de Dynkin **no salen más de tres aristas**.

Reglas de clasificación II

Regla II

De un vértice de un diagrama de Dynkin **no salen más de tres aristas**.

Regla III

Existen **subgrafos prohibidos** que no pueden aparecer en un diagrama de Dynkin.

49. Лемма XI. *Схема углов* (П)*-системы не может иметь вид*

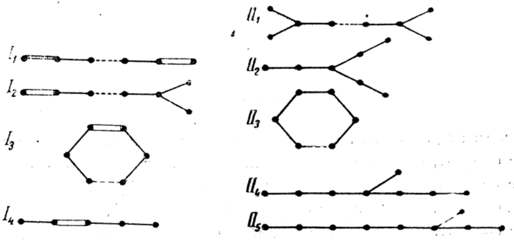
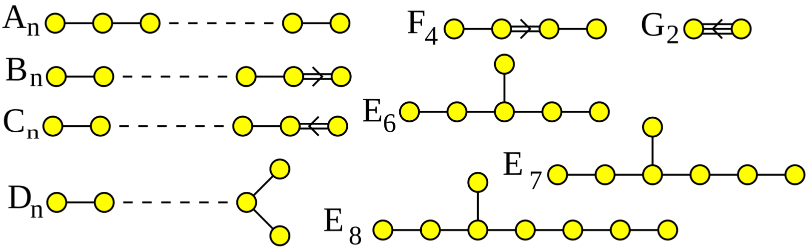


Схема 4.

Доказательство. Допустим, что некоторая (П)-система Γ имеет

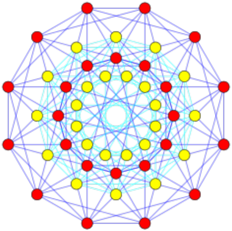
Diagramas de Dynkin

Los que quedan **se pueden construir**. Son:



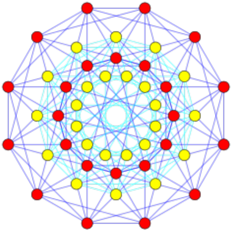
(Y *productos* de estos)

Sistemas excepcionales

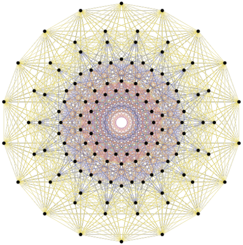


F_4

Sistemas excepcionales

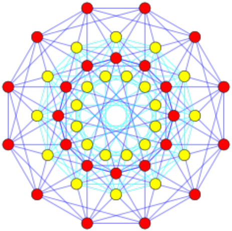


F_4

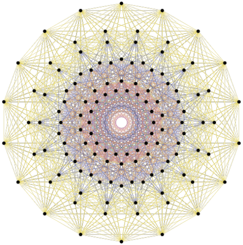


E_7

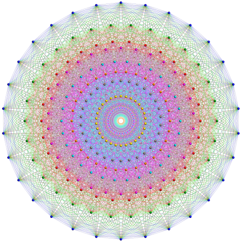
Sistemas excepcionales



F_4



E_7



E_8

Álgebras de Lie

Definición

Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con un operador bilineal (**corchete de Lie**)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que cumple

- $[x, y] = -[y, x]$ (**antisimetría**)
- $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ (**Jacobi**)

Definición

Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con un operador bilineal (**corchete de Lie**)

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que cumple

- $[x, y] = -[y, x]$ (**antisimetría**)
- $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ (**Jacobi**)

Ejemplo:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \{\text{matrices } n \times n \text{ con coeficientes en } \mathbb{C}\}$$

con el conmutador $[A, B] := AB - BA$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

- La estructura de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ no es la más sencilla posible: para cualquier $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $[\lambda \operatorname{Id}_n, B] = \lambda B - \lambda B = 0$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

- La estructura de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ no es la más sencilla posible: para cualquier $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $[\lambda \operatorname{Id}_n, B] = \lambda B - \lambda B = 0$.
- Más sencilla (álgebra de Lie ***simple***):

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

- La estructura de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ no es la más sencilla posible: para cualquier $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $[\lambda \operatorname{Id}_n, B] = \lambda B - \lambda B = 0$.
- Más sencilla (álgebra de Lie ***simple***):

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

- Por ejemplo

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & x_1 & x_3 \\ x_4 & -h_1 - h_2 & x_2 \\ x_6 & x_5 & h_2 \end{pmatrix} : h_1, h_2, x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Una base de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ es:

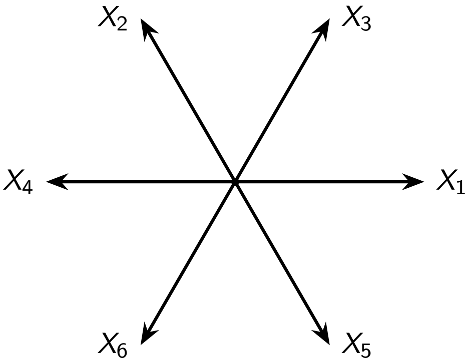
$$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

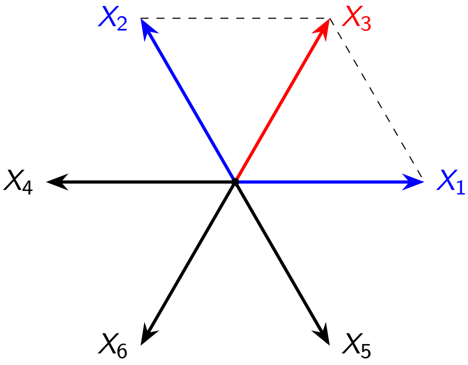
$$X_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cómo describir el corchete $[\cdot,\cdot]$ en esta base?

¡Mirando a A_2!



¡Mirando a A_2!

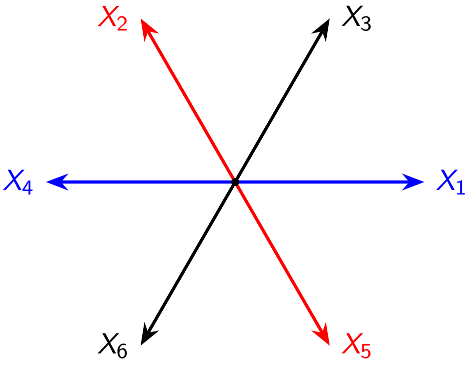


$$[X_1, X_2] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_3$$

¡Mirando a A_2!



$$[X_1, X_4] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_1$$

$$[X_2, X_5] = H_2$$

Más álgebras de Lie

Otra álgebra de Lie (simple) es

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A \text{ es antisimétrica}\}$$

Más álgebras de Lie

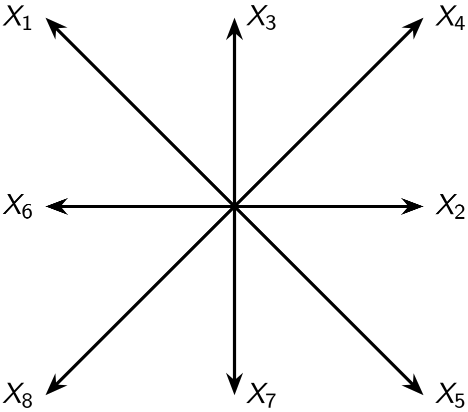
Otra álgebra de Lie (simple) es

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A \text{ es antisimétrica}\}$$

Como antes, consideraremos

$$\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & x_1 & x_3 & x_4 & 0 \\ x_5 & h_2 & x_2 & 0 & -x_4 \\ x_7 & x_6 & 0 & -x_2 & -x_3 \\ x_8 & 0 & -x_6 & -h_2 & -x_1 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & -x_5 & -h_1 \end{pmatrix} : h_1, h_2, x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{C} \right\}$$

De nuevo, podemos leer el corchete en B_2:



Clasificación de álgebras de Lie

- En general, dado un sistema de raíces podemos construir su álgebra de Lie como en los ejemplos.

Clasificación de álgebras de Lie

- En general, dado un sistema de raíces podemos construir su álgebra de Lie como en los ejemplos.
- Dada un álgebra de Lie (sobre $\mathbb{C}$) **semisimple** siempre podemos extraer un único sistema de raíces.

Clasificación de álgebras de Lie

- En general, dado un sistema de raíces podemos construir su álgebra de Lie como en los ejemplos.
- Dada un álgebra de Lie (sobre $\mathbb{C}$) **semisimple** siempre podemos extraer un único sistema de raíces.

Teorema

Hay una correspondencia biyectiva entre álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ y sistemas de raíces.

Por tanto, todas las álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ están clasificadas.

Álgebras de Lie simples

- El sistema de raíces A_n corresponde a $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces B_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

Álgebras de Lie simples

- El sistema de raíces A_n corresponde a $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces B_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces C_n corresponde a $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

Álgebras de Lie simples

- El sistema de raíces A_n corresponde a $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces B_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces C_n corresponde a $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces D_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.

Álgebras de Lie simples

- El sistema de raíces A_n corresponde a $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces B_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces C_n corresponde a $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces D_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.
- Hay **álgebras de Lie excepcionales** $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$.

Álgebras de Lie simples

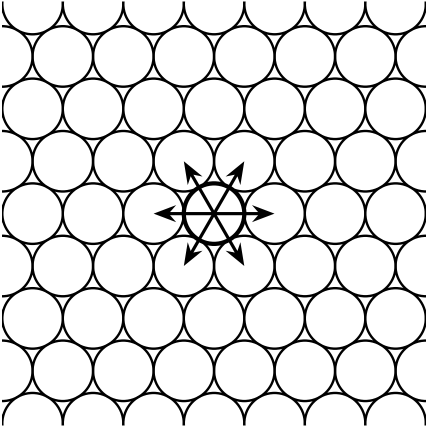
- El sistema de raíces A_n corresponde a $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces B_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces C_n corresponde a $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.
- El sistema de raíces D_n corresponde a $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.
- Hay **álgebras de Lie excepcionales** $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$.

Carta de Killing a Engel, 8 de mayo de 1887

Die Bemerkung in meine letzten Briefe, dass für kleine Werthe von l nur die beiden angeführten Arten von einfachen Gruppen existiren, beruhte auf Rechenfehlern. **Wenn ich mich nicht sehr irre, gibt es noch mehr einfache Gruppen.**

Otras aplicaciones

Empaquetamiento de esferas



A_2

A_3

Empaquetamiento de esferas II

Home | Fields Medal

Photo credit: Matteo Fieni

Maryna Viazovska

For the proof that the E_8 lattice provides the densest packing of identical spheres in 8 dimensions, and further contributions to related extremal problems and interpolation problems in Fourier analysis.

citation | video | popular scientific exposition | CV/publications

interview | laudatio | proceedings | Plus magazine! article (intro)

Correspondencias *ADE*: Teorema de Gabriel

- Un **quiver** es un grafo dirigido.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Correspondencias *ADE*: Teorema de Gabriel

- Un **quiver** es un grafo dirigido.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- Una **representación** de un quiver es una elección de un **espacio vectorial** por cada vértice y una **aplicación lineal** por cada arista.

Correspondencias *ADE*: Teorema de Gabriel

- Un **quiver** es un grafo dirigido.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- Una **representación** de un quiver es una elección de un **espacio vectorial** por cada vértice y una **aplicación lineal** por cada arista.

Teorema de Gabriel

Los únicos quivers con una **cantidad finita** de representaciones (indescomponibles, salvo isomorfismo) son los de tipo A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

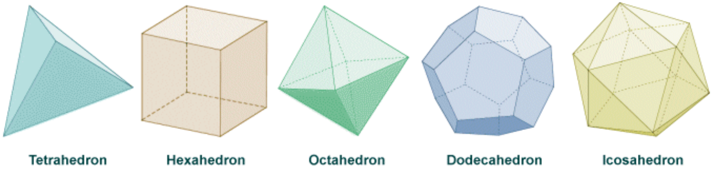
$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[d] & & & \\
\bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Correspondencias ADE: Teorema de McKay

- ¿Cuáles son los subgrupos finitos de $SO(3)$ (rotaciones $3D$)?

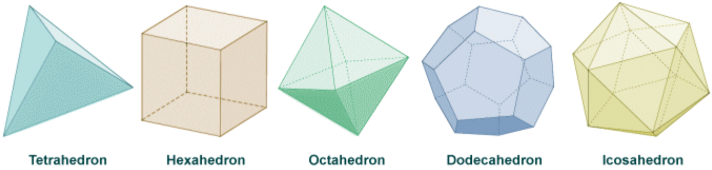
Correspondencias ADE: Teorema de McKay

- ¿Cuáles son los subgrupos finitos de $SO(3)$ (rotaciones $3D$)?
- Los grupos de simetrías de **polígonos regulares 2D** (cíclicos y diédricos) y los de los **sólidos platónicos**:



Correspondencias ADE: Teorema de McKay

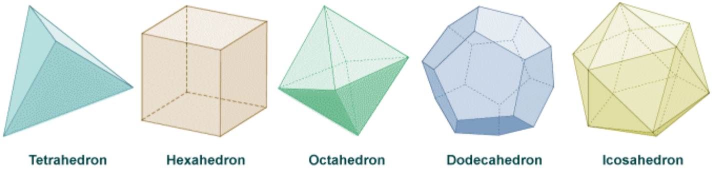
- ¿Cuáles son los subgrupos finitos de $SO(3)$ (rotaciones $3D$)?
- Los grupos de simetrías de **polígonos regulares 2D** (cíclicos y diédricos) y los de los **sólidos platónicos**:



- Dos **familias infinitas** y tres ***excepcionales***.

Correspondencias ADE: Teorema de McKay

- ¿Cuáles son los subgrupos finitos de $SO(3)$ (rotaciones $3D$)?
- Los grupos de simetrías de **polígonos regulares 2D** (cíclicos y diédricos) y los de los **sólidos platónicos**:



- Dos **familias infinitas** y tres ***excepcionales***.

Correspondencia de McKay

Los subgrupos finitos de $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SU}(2)$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ están en correspondencia con los diagramas A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

Correspondencias ADE: Singularidades en superficies

- Consideramos funciones holomorfas $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ en las que 0 es un punto crítico con $f(0) = 0$.

Correspondencias ADE: Singularidades en superficies

- Consideramos funciones holomorfas $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ en las que 0 es un punto crítico con $f(0) = 0$.
- Es decir, **singularidades** en la **superficie** $\{f = 0\}$.
- Consideramos las más sencillas, singularidades **aisladas**.

Correspondencias ADE: Singularidades en superficies

- Consideramos funciones holomorfas $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ en las que 0 es un punto crítico con $f(0) = 0$.
- Es decir, **singularidades** en la **superficie** $\{f = 0\}$.
- Consideramos las más sencillas, singularidades **aisladas**.
- Localmente de la forma $\mathbb{C}^2/G$ para $G \leqslant \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ **finito**: correspondencia de McKay.

Correspondencias ADE: Singularidades en superficies

- Consideramos funciones holomorfas $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ en las que 0 es un punto crítico con $f(0) = 0$.
- Es decir, **singularidades** en la **superficie** $\{f = 0\}$.
- Consideramos las más sencillas, singularidades **aisladas**.
- Localmente de la forma $\mathbb{C}^2/G$ para $G \leqslant \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ **finito**: correspondencia de McKay.

Función f (tipo de singularidad)	**Tipo de Dynkin**
$x^{n+1} + y^2 + z^2 = 0$	A_n
$x^{n-1} + xy^2 + z^2 = 0$	D_n
$x^4 + y^3 + z^2 = 0$	E_6
$x^3y + y^3 + z^2 = 0$	E_7
$x^5 + y^3 + z^2 = 0$	E_8

¡Muchas gracias!