Acciones de $\mathbb{C}^\times$, subvariedades lagrangianas y fibrados muy estables

Miguel González (ICMAT)

Geometry and Topology for the Future III
UCM

18 de Junio, 2025

Acciones de $\mathbb{C}^\times$

- X variedad sobre $\mathbb{C}$ (quasiproyectiva, normal).
- **Acción de $\mathbb{C}^\times$:**
$$g_\lambda : X \to X,$$
para cada $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, con $g_\lambda \circ g_\beta = g_{\lambda\beta}$, $g_1 = \mathrm{Id}_X$.
- Si $q \in X$ y existe $p = \lim_{\lambda \to 0} \lambda q$, entonces p es un punto fijo.

Definición

El **conjunto atractor** de $p \in X^{\mathbb{C}^\times}$ es:

$$W_p^+ := \{q \in X \mid p = \lim_{\lambda \to 0} \lambda q\} \subseteq X$$

- Asumiremos que ese límite siempre existe: X es **semiproyectiva**.
$$X = \bigsqcup_{p \in X^{\mathbb{C}^\times}} W_p^+.$$

Descomposición de Białynicki-Birula

- Descomposición estudiada por A. Białynicki-Birula (1973, *Annals of Mathematics*).
- **Propiedad 1:** Las piezas W_p^+ son **espacios afines**, localmente cerradas y forman un fibrado sobre cada componente de $X^{\mathbb{C}^\times}$.
- Sea $p \in X^{s\mathbb{C}^\times}$ un punto fijo liso. Tenemos $dg_\lambda : T_pX \to T_pX$ y por tanto $\mathbb{C}^\times$ actúa en el tangente:

$$T_pX := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} T_p^kX$$

y se tiene

$$T_p^+X := \bigoplus_{k>0} T_p^kX \simeq W_p^+$$

- **Propiedad 2:**

$$H_m(X,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{Y\in\pi_0(X^{\mathbb{C}^\times})} H_{m-d_Y}(Y,\mathbb{Z}).$$

Geometría simpléctica

- Forma simpléctica $\omega \in \Omega^2(X^s)$.
- Supongamos que $g_\lambda^* \omega = \lambda \omega$.
- Si $p \in X^{s\mathbb{C}^\times}$ y $v_i \in T_p^i X$, $v_j \in T_p^j X$, entonces

$$\lambda \omega(v_i, v_j) = \omega(dg_\lambda v_i, dg_\lambda v_j) = \lambda^{i+j} \omega(v_i, v_j).$$

- $\omega(v_i, v_j) = 0$ a menos que $i + j = 1$. En particular $\omega|_{T_p^+ X} = 0$.
- A través de $T_p^+ X \simeq W_p^+$ (y contando dimensiones):

Proposición

La subvariedad $W_p^+ \subseteq X$ es lagrangiana.

Ejemplo

- Sea Z una variedad proyectiva lisa sobre $\mathbb{C}$.
- $X := T^*Z$ tiene la forma simpléctica $\omega = d\theta$ natural.
- También una acción de $\mathbb{C}^\times$, y $g_\lambda^*\omega = \lambda\omega$.
- $X^{\mathbb{C}^\times} \simeq Z$ (sección cero).
- Para $z \in Z$, $W_z^+ = T_z^*Z$.

Fibrados vectoriales

- Pensemos en $Z = \mathcal{N}(n, d)$ el **espacio de móduli de fibrados vectoriales estables** de rango n y grado d coprimos sobre una curva proyectiva lisa C.
- Por tanto $X = T^*\mathcal{N}(n, d)$.
- Si $E \to C$ es un fibrado vectorial estable, ¿qué es $T^*_E\mathcal{N}(n, d)$?
- $T_E\mathcal{N}(n, d)$ = **deformaciones** de E.
- E localmente trivial $\implies$ **pegar** deformaciones triviales $\implies$ dar un cociclo de endomorfismos.
- $T_E\mathcal{N}(n, d) = H^1(C, \mathrm{End}(E))$.
- $T^*_E\mathcal{N}(n, d) = H^1(C, \mathrm{End}(E))^* = H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes T^*C)$ (**dualidad de Serre**).

Fibrados de Higgs

- Podemos *agrandar* $T^*\mathcal{N}(n,d)$ considerando pares (E,φ) con $E \to C$ un fibrado vectorial y $\varphi \in H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes T^*C)$ (**fibrados de Higgs**).
- Nuevo espacio de móduli: $\mathcal{M}(n,d) \supseteq T^*\mathcal{N}(n,d)$.
- **Mantiene** la **forma simpléctica** y la **acción de** $\mathbb{C}^\times$. También es **semiproyectivo**.
- Incluso (n,d) arbitrarios y para G-fibrados con G un grupo semisimple complejo $\rightsquigarrow \mathcal{M}(G)$.

Mirror symmetry

- Las lagrangianas de $\mathcal{M}(n,d)$ y $\mathcal{M}(G)$ son especialmente relevantes. **Dualidad:**

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(G) \arrow[dr, "h_G"] & & \mathcal{M}(G^\vee) \arrow[dl, "h_{G^\vee}"'] \\ & \mathbb{C}^{N_G} & \end{tikzcd}$$

- **Lagrangianas** $\leftrightarrow$ haces hiperholomorfos
- ¿Qué pasa con $W^+_{(E,\varphi)}$?
- El estudio depende del $(E,\varphi) \in \mathcal{M}(G)^{s\mathbb{C}^\times}$.

Definición equivalente a (Hausel–Hitchin, 2022)

Un fibrado de Higgs $(E,\varphi) \in \mathcal{M}^{s\mathbb{C}^\times}$ es **muy estable** si $W^+_{(E,\varphi)} \cap h^{-1}(a)$ es finito para todo $a \in \mathcal{A}(G)$.

¿Qué se sabe sobre fibrados de Higgs muy estables?

Teorema (Laumon, 1988), (Pal, 2023)

En el caso $\varphi = 0$ (luego E estable) los fibrados muy estables son un abierto denso en $\mathcal{N}(n, d) \subseteq \mathcal{M}(n, d)^{s\mathbb{C}^\times}$. El complemento es un divisor.

Teorema (Hausel–Hitchin, 2022)

Clasificación en $\mathcal{M}(n, d)$ cuando φ es **regular** en términos de un divisor asociado. Densos en **cada componente** de este tipo.

Teorema (Peón-Nieto, 2024, 2025+), (Pauly–Peón-Nieto, 2025+)

Identificación de los fibrados muy estables restantes en $\mathcal{M}(n, d)$.

Teorema (G., 2025)

Clasificación en $\mathcal{M}(G)$ cuando φ es **regular** en términos de un divisor asociado y la teoría de representaciones de G. Densos en **algunas componentes** de este tipo, en otras no hay.

¡¡Muchas gracias!!