Geometría Diferencial

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Mayo de 2021

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Revisado en 2022
Apuntes de la asignatura impartida por Gabino González y Ernesto Girondo en la Universidad Autónoma de Madrid en Mayo de 2021.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Geometría Diferencial del grado en matemáticas, tomados en Mayo de 2021 por Miguel González. La asignatura fue impartida por Gabino González y Ernesto Girondo. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Geometría Diferencial

Esta asignatura se trata de una introducción a las nociones básicas de la geometría diferencial. Se introducen los objetos a estudiar: las variedades, y se exploran algunos de los elementos más básicos de la teoría (funciones diferenciables, campos vectoriales, formas diferenciales).

Uno de los resultados más elegantes que se demuestran se trata del teorema de Stokes en su total generalidad, relacionando integrales en una variedad con integrales en su borde.

Requisitos previos

1. Conocimientos de álgebra lineal.
2. Conocimientos de cálculo/análisis matemático.
3. Puede ser enriquecedor tener conocimientos de geometría de curvas y superficies al ser los casos más básicos de variedades.

Índice

1. Variedades y aplicaciones diferenciables

El objetivo es extender el cálculo usual de $\mathbb{R}^n$ a otros conjuntos que solo *se parecen* a $\mathbb{R}^n$ localmente, denominados **variedades diferenciables**. Con estas técnicas, lograremos deducir propiedades geométricas de estos conjuntos usando el cálculo.

Definición 1. Una **variedad diferenciable de dimensión** n es un espacio topológico Hausdorff M que satisface:

1. $\forall p \in M$, hay un abierto U con $p \in U$ y un homeomorfismo $\varphi_U : U \to \mathbb{R}^n$. El par (U, φ_U) se denomina **carta local** alrededor de p. Se dice que la carta está **centrada** en p si $\varphi_U(p) = 0$.
2. Dadas dos cartas (U, φ_U), (V, φ_V), con $U \cap V \neq \emptyset$, el homeomorfismo $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ de *cambio de coordenadas* definido sobre $\varphi_U(U \cap V)$ es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$.

Observación 1 (El espacio proyectivo). Un ejemplo de variedad: el espacio proyectivo real de dimensión n, denotado $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. El conjunto es $M = \{$espacios vectoriales reales de dimensión 1$\}$. Es decir, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}{\sim}$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en la que $v \sim w \iff v = \lambda w$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. La topología sobre M es la topología cociente. Las cartas vienen dadas por: $U_k = \{[z] = [(z_0, z_1, \ldots, z_n)] : z_k \neq 0\}$ (este conjunto está bien definido porque si la coordenada k-ésima es no nula en un representante, lo es en todos), y los homeomorfismos $\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^n$, con $\varphi_k([(z_0, z_1, \ldots, z_n)]) = (\frac{z_0}{z_k}, \frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k})$. Está bien definida porque z_k y los demás z_i van escalados por el mismo número en caso de dos representantes distintos. Es biyectiva puesto que tiene la inversa $(x_1, \ldots, x_n) \to [(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1, x_k, \ldots, x_n)]$. Para la composición uno puede comprobar fácilmente que $\varphi_k(U_k \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k \neq 0\}$, y las funciones transición $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_k}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j})$.

Este conjunto de abiertos y morfismos que basta para proporcionar cartas para todos los puntos se denomina **atlas**.

Definición 2. Dos atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$, $\mathcal{B} = \{(V_j, \beta_j)\}_{j=1}^m$ sobre una misma variedad se dicen **equivalentes** si todas las aplicaciones $\beta_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap V_j) \to \beta_j(U_i \cap V_j)$ son difeomorfismos, es decir, si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es también un atlas.

Observación 2 (Dos atlas no equivalentes). Consideramos sobre $\mathbb{R}$ los atlas: $\{(\mathbb{R}, f)\}$ y $\{(\mathbb{R}, g)\}$, donde $f(x) = x$, y $g(x) = x^3$. Se tiene que la composición $g \circ f^{-1} = x^3$ sobre $\mathbb{R}$ **no** es un difeomorfismo.

Definición 3. Una aplicación continua entre dos variedades (asociadas a su atlas), $f : M \to N$ es **diferenciable** en $x \in M$ si hay una carta (U, α) alrededor de x, y otra (V, β) alrededor de $f(x)$, tales que $f(U) \subset V$ y la aplicación $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \to \beta(f(U))$ es diferenciable en $\alpha(x)$.

Es decir, *bajamos* la función a los abiertos locales que tenemos, y allí consideramos la diferenciablidad que conocemos. Obsérvese que solo hemos tenido que pedir que haya una carta donde se cumple eso, porque:

Proposición 1. *Si f es diferenciable gracias a un par de cartas (U_1, f_1) y (V_1, g_1), y consideramos otra de las cartas posibles en el punto, (U_2, f_2), y su correspondiente (V_2, g_2), entonces la función $g_2 \circ f \circ f_2^{-1}$ es diferenciable también, en $f_2(x)$.*

Demostración. Esto es gracias a que la función de paso, $f_2 \circ f_1^{-1}$, entre un entorno de $f_1(x)$ en U_1 y su correspondiente en U_2, es difeomorfismo, así como $g_2 \circ g_1^{-1}$ entre V_1 y V_2. Por tanto: $g_2 \circ f \circ f_2^{-1} = (g_2 \circ g_1^{-1}) \circ (g_1 \circ f \circ f_1^{-1}) \circ (f_1 \circ f_2^{-1})$, donde todo es diferenciable. □

Naturalmente, esta proposición es válida para cartas de distintos atlas, mientras que sean equivalentes. Si tenemos dos atlas no equivalentes, podrá haber aplicaciones que sean diferenciables en un punto con un atlas, pero no en el otro.

Observación 3 (Un atlas para la esfera). La **proyección estereográfica** proporciona un atlas para la esfera $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Se basa en la idea usual de proyección estereográfica de la esfera de dimensión 2. Consta de dos cartas: (U_N, φ_N), (U_S, φ_S), donde $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ y $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\}$, y los morfismos van sobre $\mathbb{R}^n$ y están definidos por:

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \tag{1}$$

$$\varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \tag{2}$$

Y puede verificarse que su composición adecuada es un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y sí mismo.

Gracias a esa carta, por ejemplo, puede probarse que $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, la aplicación de paso al cociente, que es continua (lo que, por cierto, prueba que el espacio proyectivo es compacto), es también diferenciable: cada punto tiene una carta estereográfica y una carta de la imagen (del espacio proyectivo) tal que la composición es diferenciable localmente.

1.1. Construcción de variedades nuevas

En esta sección se tratan distintas construcciones de variedades a partir de otras.

1.1.1. Variedades producto

Definición 4. Si $M_1^{n_1}$ y $M_2^{n_2}$ son dos variedades, n_1 y n_2-dimensionales, respectivamente, con atlas $A_1 = \{(U_i, \alpha_i)\}_i$, $A_2 = \{(V_j, \beta_j)\}_j$, se define la **variedad producto** como $M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ con el atlas $A_1 \times A_2 = \{(U_i \times V_j, \alpha_i \times \beta_j)\}_{i,j}$. Es una nueva variedad $(n_1 + n_2)$-dimensional.

1.1.2. Variedades cociente

Definición 5. Sea M una variedad y $G < \mathrm{Diff}(M)$ un grupo finito de difeomorfismos de M en M que *actúa libremente* en M (es decir, ningún punto de M queda fijo por estos difeomorfismos, a excepción de la identidad), y de manera *propiamente discontinua*, es decir, para todo $x \in M$ existe un entorno U_x con $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{Id\}$.

Se define en M la relación $x \sim y \iff \exists g \in G$ tal que $y = g(x)$.

Dotamos al conjunto cociente M/G (con la topología cociente) de una estructura diferenciable como sigue: consideramos el paso al cociente $\pi : M \to M/G$. Si $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ es una carta alrededor de $x \in M$ tal que $g(U) \cap U = \emptyset \ \forall g \in G \setminus \{Id\}$, entonces tenemos la carta natural $(\pi(U), q_{\pi(U)} = \varphi_U \circ (\pi|_U)^{-1})$ en torno a $[x]$. La aplicación de la carta está bien definida y es inyectiva (y por tanto homeomorfismo), gracias a la propiedad exigida sobre U, que permite que $\pi|_U$ sea homeomorfismo.

Esta estructura se denomina **variedad cociente**.

Observación 4. En la variedad cociente, la aplicación $\pi : M \to M/G$ es diferenciable. Esto es así porque podemos tomar las cartas definidas anteriormente en U y $\pi(U)$, dando lugar a: $\varphi_U \circ (\pi|_U)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_U^{-1} = Id$, que es $\mathcal{C}^\infty$.

Definición 6. Una variedad M se dice **orientable** si existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ tal que $|D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})| > 0$, $\forall x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$, $\forall i, j$.

Es decir, existe un atlas donde todos los jacobianos de las funciones transición son positivos.

Observación 5. Todas las variedades definidas por una sola carta son orientables. Asimismo, si están formadas por dos cartas con intersección conexa, también. Esto es así porque al ser conexa, el determinante de la función de transición tendrá siempre el mismo signo, y si es negativo, basta con cambiar la segunda carta $\varphi_2(p) = (x_1, \dots, x_n)$, por $\tilde{\varphi}_2(p) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, que cambia el signo del determinante en todos los puntos.

Observación 6 (Ejemplo: La botella de Klein). Se trata de $K = \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$, donde la acción de $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}^2$ es: $(m,n)(x,y) = (x+n, (-1)^n y + m)$, y por tanto es un subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$. Esta acción identifica los puntos de tal modo que en todo cuadrado de lados 1 que se escoja, las únicas identificaciones son entre los lados superior e inferior, a la misma coordenada x, y entre los lados izquierdo y derecho, con la coordenada y reflejada. Es decir, es como el toro pero la identificación entre las circunferencias del *cilindro intermedio* que resulta en la visualización se hace invirtiendo los puntos.

1.1.3. Suma conexa de variedades

La *idea* de la suma conexa de dos variedades (con misma dimensión) es retirar un disco de cada una de ellas y *pegar* el resultado por el borde que deja ese disco.

Observación 7. Una primera aproximación a la **suma conexa** de dos variedades M_1, M_2, con un atlas orientable, de dimensión n, denotada por $M_1\#M_2$, se define como sigue:

1. Se toma un punto $p_i \in M_i$, y la carta (U_i, φ_i) en torno a ese punto. Ponemos $M_i' = M_i \setminus \varphi_i^{-1}(B_n(0,1))$, es decir, hemos retirado de cada variedad lo que es homeomorfo al disco unidad a través de la carta.

2. Para *conectar* ambas variedades por el borde restante, necesitaremos un difeomorfismo $\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ que revierta la orientación (es decir, que los jacobianos de $\varphi_j \circ \alpha \circ \varphi_i^{-1}$ sean siempre negativos). Suponemos que lo tenemos por ahora.

3. Entonces, la variedad que consideraremos es el espacio topológico $M_1\#M_2 = \frac{M_1' \sqcup M_2'}{\sim}$, donde la relación es $q_1 \sim q_2 \iff q_1 \in \varphi_1^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, $q_2 \in \varphi_2^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, y $\alpha(\varphi_1(q_1)) = \varphi_2(q_2)$.

Aquí $\sqcup$ denota la *unión disjunta* de espacios topológicos, que consiste en puntos de la forma $(q_1, 1)$ y $(q_2, 2)$, donde $q_1 \in M_1'$, $q_2 \in M_2'$, y un conjunto A es abierto si y solo si $\{(a,1) \in A\}$ y $\{(a,2) \in A\}$ son abiertos en sus sendas topologías, respectivamente. Es una forma de considerar un espacio topológico que contenga una única vez cada punto de sus componentes.

Esta primera aproximación nos da un espacio topológico, pero tiene el problema de que no se mantiene la estructura diferenciable dada por el atlas a causa del *corte abrupto* que ocurre en el borde del disco unidad. Las cartas en esos puntos quedan cortadas y dejan de funcionar. Esto lo solventaremos *dejando hueco* alrededor de las circunferencias que pegamos:

Definición 7. La **suma conexa** de dos variedades M_1, M_2, con un atlas orientable, de dimensión n, denotada por $M_1\#M_2$, se define como sigue:

1. Se toma un punto $p_i \in M_i$, y la carta (U_i, φ_i) en torno a ese punto. Ponemos $M_i' = M_i \setminus \varphi_i^{-1}(\overline{B}_n(0, \frac{1}{2}))$, es decir, hemos retirado de cada variedad lo que es homeomorfo a un disco cerrado.

2. Para *conectar* ambas variedades por el borde restante, necesitaremos un difeomorfismo $\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ que revierta la orientación (es decir, que los jacobianos de $\varphi_j \circ \alpha \circ \varphi_i^{-1}$ sean siempre negativos). Por ejemplo, α envía cada punto a su *conjugado*.

3. Con ese difeomorfismo, definimos la siguiente relación de equivalencia: $q_1 \sim q_2 \iff q_1 \in \varphi_1^{-1}(B_n(0,2) \setminus B_n(0, \frac{1}{2}))$, $q_2 \in \varphi_2^{-1}(B_n(0,2) \setminus B_n(0, \frac{1}{2}))$, y además, si $\varphi_1(q_1) = r \cdot v$, con $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, y $r \in (0,2)$, entonces se tiene $\varphi_2(q_2) = \frac{1}{r} \cdot \alpha(v)$. Es decir, el *pegado* se hace reviertiendo la dirección e invirtiendo el radio para poder *encajar de frente* las dos partes.

4. Entonces, consideraremos es el espacio topológico $M_1\#M_2 = \frac{M_1' \sqcup M_2'}{\sim}$. Como la relación de equivalencia coincidía con la dada en la observación previa para los puntos difeomorfos a $\mathbb{S}^{n-1}$, el espacio es el mismo que en la observación previa.

5. No obstante, ahora se tiene una estructura diferenciable dada por el cociente. En concreto, dado un punto $q \in M_1'$ de tal forma que cualquier entorno suyo $q \in U_1$ interseca a puntos identifcados con M_2' mediante la relación de equivalencia, digamos a un punto $p \in M_2'$ y su carta $p \in U_2$, se tiene que la función transición $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es la que envía el punto $r \cdot v$ al $\frac{1}{r} \cdot \alpha(v)$, que es diferenciable (lo es la inversión y α), y su derivada es:

$$D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & D\alpha \end{pmatrix}$$

   Y su jacobiano entonces es $|D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})| = -\frac{1}{r^2}|D\alpha| > 0$ al revertir α la orientación. Por tanto, además $M_1 \# M_2$ es orientable.

6. Evidentemente, los puntos *alejados* de la zona donde se hace la relación de equivalencia no tienen problema dado que pueden restringirse las cartas a entornos separados de esa zona.

Teorema 1 (Clasificación de superficies compactas)**.** *Dada una variedad M de dimensión 2 y orientable, se tiene que $M \simeq \mathbb{S}^2$ o bien $M \simeq T_2 \# T_2 \# \ldots \# T_2$, siendo T_2 el toro.*

Si la variedad es no orientable, de dimensión 2 y compacta, entonces $M \simeq \mathbb{RP}^2 \# \ldots \# \mathbb{RP}^2$.

Definición 8. Dada M una variedad de dos dimensiones compacta y orientable, se define su **género** como el número de toros en la suma conexa del teorema previo (si es la esfera, este género es 0).

Definición 9. Si M^2 es una superficie compacta dotada de una **triangulación**, es decir, $M = \bigcup P_i$ con $\varphi_i(P_i)$ un polígono en $\mathbb{R}^2$ y $\varphi_i(P_i \cap P_j) = \emptyset$, o bien un vértice, o bien una arista, se define su **característica de Euler** por $\chi(M) = v - a + c$, donde v es el número de vértices, a es el número de aristas, y c el número de polígonos (caras).

Se tiene que no depende de la triangulación, y se tiene la relación $\chi(M) = 2 - 2g$, donde g es el género de M.

2. Espacio tangente

2.1. Definición del espacio tangente

El objetivo es definir el espacio tangente a una variedad en un punto, con la *dificultad* de que este espacio ya no puede ser un plano inscrito en un $\mathbb{R}^n$ dado que la propia variedad no está inscrita en $\mathbb{R}^n$.

Definición 10. Sea M una variedad diferenciable. Dos curvas $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p \in M$, **definen el mismo vector tangente**, si $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$, siendo (U, φ) una carta en p.

Se define $[\alpha]$, o bien $\alpha'(0)$, como la clase de equivalencia de α bajo esa relación de *definir el mismo vector tangente*.

Esta definición no depende de la carta elegida (es inmediato comprobarlo componiendo una función de transición adecuada): aunque los valores concretos de derivadas sí cambian con ella, la *igualdad* entre los valores (es decir, la relación de equivalencia), no lo hace. El espacio tangente, entonces, puede definirse como el espacio vectorial de todas las clases de equivalencia de curvas. Otra forma equivalente de definirlo, más algebraica, es mediante la teoría de derivaciones:

Definición 11. Sea $\lambda : U \to \mathbb{R}$ una función suave definida en un entorno de p. Definimos la **derivación dada por** α como el valor real $\alpha'(0)(\lambda) := (\lambda \circ \alpha)'(0)$

Este funcional está bien definido, es decir, no depende del α elegido como representante de la clase. Puede interpretarse como una generalización de la *derivada direccional* de λ en la dirección de α, con el matiz de que ahora lo que llamamos *dirección de α* no es una dirección vectorial concreta, sino que es la clase de equivalencia de todas las curvas que comparten dirección al pasar por una carta.

Asimismo, como es lógico, su valor solo depende de lo que vale λ en un entorno local a p, lo que tiene una ventaja: **podemos definir la derivación $\alpha'(0)$ sobre un espacio vectorial**, en lugar de sobre las *funciones locales a p*, que era lo que habíamos hecho hasta ahora. Nótese que estas funciones locales no tienen porqué poder sumarse ni siquiera, al no tener necesariamente dominios comunes. La siguiente definición, motivada por estas apreciaciones, resuelve el problema:

Definición 12. Se define el **anillo de gérmenes** de funciones, $\theta_{M,P} = A/\sim$, donde A es el conjunto de funciones suaves $\lambda : U \to \mathbb{R}$, con U entorno de p, y $\sim$ es la relación $(\lambda, U) \sim (\mu, V)$ si $\lambda \equiv \mu$ en algún abierto W con $p \in W \subset U \cap V$.

Con ello, se tiene que la derivación $v : \theta_{M,P} \to \mathbb{R}$ dada por $\lambda \to \alpha'(0)(\lambda)$ sigue estando bien definida (solo dependía del comportamiento local), pero ahora actúa sobre un espacio vectorial, y es inmediato comprobar con las reglas usuales de derivación que $v(a\lambda + b\mu) = av(\lambda) + bv(\mu)$, y $v(\lambda\mu) = \lambda(p)v(\mu) + \mu(p)v(\lambda)$. Pues bien, estas derivaciones forman en sí mismas un espacio vectorial, y se tiene finalmente la definición deseada:

Definición 13. Se define T_pM, el **espacio tangente a M en** p, como el **espacio vectorial de todas las derivaciones** $v : \theta_{M,p} \to \mathbb{R}$.

Proposición 2. *Si f es el germen de una función constante en torno a p, y $v \in T_pM$, entonces $v(f) = 0$. Asimismo, si λ y μ son gérmenes que se anulan en p, entonces $v(\lambda\mu) = 0$.*

Demostración. Para 1, basta con ver que el germen 1 se anula, dado que por la linealidad se tendrá el resultado para $f \neq 0$ (y para $f = 0$ se tiene por linealidad). Se tiene que $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) = 2v(1)$, luego $v(1) = 0$. Para 2, basta con usar que $v(\lambda\mu) = \lambda(p)v(\mu) + \mu(p)v(\lambda) = 0 + 0 = 0$. □

2.2. Una base de $T_p(M)$

Definición 14. Sea (U, φ) una carta alrededor de p, dada por $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ de componentes $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Se define la **derivada parcial** como la derivación: $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p := v \in T_pM$ dada por: $v(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t_i}(\lambda \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

Es decir, derivamos en $\mathbb{R}^n$ para obtener el valor que denominamos derivada parcial. Este vector depende de la carta elegida.

Observación 8. Se tiene que, con la notación previa, y si denotamos por $x_j : U \to \mathbb{R}$ el germen de la función que asocia a cada punto su j-ésima componente por la carta, se tiene $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$.

Razón. $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \frac{\partial}{\partial t_i} x_j \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial t_i} t_j = \delta_{ij}$.

Teorema 2. *Para cada carta $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ alrededor de $p \in M$, las derivaciones $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\} \subset T_pM$ forman una base del espacio. En particular, $\dim T_pM = n = \dim M$.*

Demostración. Para ver que son linealmente independientes, supongamos que $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = 0$. Evaluando la función en cada $x_j : U \to \mathbb{R}$ explicado en la observación previa, sigue que $a_j = 0$. Para ver que son generadores, sea $v \in T_pM$. Se afirma que $v = \sum_j v(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$. Para ver eso, tenemos que tomar un germen $\lambda \in \theta_{M,p}$, y evaluarlo en ambos lados de la igualdad para ver que coinciden. Tenemos, del polinomio de Taylor, que $\lambda = \lambda(p) + \sum_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}|_p (x_i - x_i(p)) + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i x_j}|_\xi (x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))$. Nótese que en realidad ese desarrollo se hace primero en $\mathbb{R}^n$ para la función $\lambda \circ \varphi^{-1}$, suave, y luego lo escribimos con la notación nueva.

Entonces, $v(\lambda) = v(\lambda(p)+\sum_i \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}|_p(x_i-x_i(p))+\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i x_j}|_\xi(x_i-x_i(p))(x_j-x_j(p))) = \sum v(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i|_p}(\lambda)$. Hemos usado la linealidad de la derivación, así como que se anulan las constantes $\lambda(p)$, $x_i(p)$, $x_j(p)$, y el producto $(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))$, valen 0 a través de v por la propiedad del producto que se anula en un punto (p), vista previamente. □

Proposición 3. *Si tenemos dos cartas, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ de componentes $(x_1, \ldots, x_n)$, y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, de componentes $(y_1, \ldots, y_n)$, en la intersección se tiene esta relación entre las bases de los espacios tangentes:*

$$\frac{\partial}{\partial y_j}|_p = \sum \frac{\partial x_k}{\partial y_j}|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}|_p$$

Obsérvese que $\frac{\partial x_k}{\partial y_j}$ se refiere a derivar la función x_k, pero respecto a y_j, es decir, componemos con la carta ψ y derivamos la j-ésima. Es decir, la matriz de cambio es justo $D(\varphi \circ \psi^{-1})$.

Demostración. Ponemos $\frac{\partial}{\partial y_j}|_p = \sum a_{jk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}|_p$. Evaluando en x_k, se tiene que $\frac{\partial}{\partial y_j}|_p x_k = a_{jk}$. □

Proposición 4. *Se tiene que $c'(0) = (x_1 \circ c)'(0)\frac{\partial}{\partial x_1}|_p + \cdots + (x_n \circ c)'(0)\frac{\partial}{\partial x_n}|_p$.*

Demostración. Esto es así porque si $c'(0) = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$, basta con evaluar en x_j para obtener: $a_j = c'(0)(x_j)$. □

2.3. Diferencial de f

Ahora vamos a ver cómo una aplicación diferenciable $f : M \to N$ induce una aplicación entre los espacios tangentes.

Definición 15. Sea $f : M \to N$ diferenciable. Para cada $p \in M$, se define $df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$, por aquella tal que $v \to df|_p(v)$, siendo $df|_p(v)$ aquella que cumple: $df|_p(v)(\lambda) = v(\lambda \circ f)$.

Esta aplicación es lineal en T_pM. De hecho, se tiene una expresión explícita en coordenadas:

Proposición 5. *Se tiene que $df(\frac{\partial}{\partial x_k}|_p) = \sum_i \frac{\partial y_i \circ f}{\partial x_k}|_p \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)}$.*

Demostración. Ponemos $df(\frac{\partial}{\partial x_k}|_p) = \sum_i a_{ik} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)}$. Evaluamos en la aplicación $y_i : N \to \mathbb{R}$ en ambos lados, de donde sigue que: $a_{ik} = df|_p(\frac{\partial}{\partial x_k}|_p)(y_i) = \frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_k}|_p$. □

Proposición 6. *Sea $f : M \to N$ diferenciable. Entonces, si M es conexa y $df \equiv 0$ (la aplicación nula entre T_pM y T_pN) en todos los p, se tiene que f es constante.*

Demostración. Tomamos $x \in M$, con una carta (U, φ), y sea $y_0 = f(x) \in N$, con una carta (V, ψ) a su alrededor. Queremos ver que $f^{-1}(y_0)$ es abierto y habremos acabado (siempre es cerrado por ser N de Hausdorff, y como M es conexo eso implicaría que es todo M). Por la proposición previa, tenemos que $\frac{\partial y_i \circ f}{\partial x_k}|_p = 0$ en todo $p \in M$. Eso quiere decir, entonces, que $y_i \circ f \circ \varphi^{-1}$ tiene todas las parciales nulas en todo punto, o lo que es lo mismo, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ tiene jacobiano nulo en todo punto, por lo que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es constante, de donde sigue que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es constante, de tal modo que en toda la carta U, la f vale y_0, luego $f^{-1}(y_0)$ es en efecto unión de abiertos luego abierta. □

Definición 16. Dada $f : M \to N$ una función suave, donde M tiene dimensión m y N tiene dimensión n, entonces:

1. f es una **inmersión** si $df|_p$ es inyectiva en todo $p \in M$. Equivalentemente, si la matriz de coordenadas de df en p vista en una proposición previa tiene rango máximo en las columnas (m).
2. (M, f) es una **subvariedad** de N si f es una inmersión inyectiva.
3. f es una **submersión** si tanto f como $df|_p$, para todo p, son sobreyectivas. Equivalentemente, si la matriz de coordenadas de df en p vista en una proposición previa tiene rango máximo en las filas (n).

2.4. Campos vectoriales

A continuación generalizamos el concepto de *campo vectorial* a una variedad, es una manera de asociar un vector tangente a cada punto de la variedad:

Definición 17. Un **campo vectorial** es un aplicación $X : M \to \bigcup T_pM := TM$, que verifica que $X(p) \in T_pM\ \forall p \in M$.

Definición 18. Se dice que el campo $X : M \to TM$ es **diferenciable** si en toda carta $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, se tiene que dado $q \in U$ arbitrario, si escribimos $X(q) = \sum \lambda_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}|_q$, se tiene que cada $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ en U.

2.5. Curvas integrales. Flujo.

Definición 19. Se dice que una curva $\alpha : (a, b) \to M$ es una **curva integral** de un campo $X : M \to TM$ si en todos punto se tiene que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$.

Dado $p \in M$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ una carta centrada en p, si escribimos $X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, con las f_i suaves, lo que ha de verificar la curva es que $\alpha'(t) = X(\alpha(t)) = \sum f_i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\alpha(t)}$. Pero, por otro lado, ya sabemos que $\alpha'(t) = \sum (x_i \circ \alpha)'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\alpha(t)}$. Así que:

Proposición 7. *Dado $p \in M$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ una carta en p, y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ una carta que pasa por p en 0. Entonces, es una curva integral si y solo si $(x_k \circ \alpha)'(t) = f_k(\alpha(t))$, $\forall k$.*

Esto es un sistema de EDOs con solución única.

Teorema 3. *Por cada $p \in M$ se tiene una única curva integral $\gamma_p : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $\gamma_p(0) = p$, dado un campo diferenciable.*

Definición 20. Dado el campo diferenciable X sobre M y $t \in \mathbb{R}$, los difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$ dados por $\varphi_t(p) = \gamma_p(t)$, siendo γ_p el del teorema previo, forman lo que se conoce como el **grupo uniparamétrico** o **flujo** del campo. Esta definición supone que el campo es **completo**, es decir, que las curvas integrales se definen en todo $\mathbb{R}$.

Estos difeomorfismos *mueven* los puntos a lo largo de sus curvas integrales una cantidad fija t.

2.6. El corchete de Lie

El corchete de Lie está relacionado con identificar si los flujos de dos campos X e Y conmutan, es decir, si dada φ_t en el flujo de X y φ_s en el de Y, se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t$ como difeomorfismos de M.

Definición 21. Se define el **corchete de Lie de dos campos** como el campo tal que $[X, Y]_p$ es el elemento de T_pM dado por: $[X, Y]_p(\lambda) = X_p(Y(\lambda)) - Y_p(X(\lambda))$. Las funciones $X(\lambda), Y(\lambda) : U \to \mathbb{R}$ son aquellas tales que $X(\lambda)(q) = X_q(\lambda)$, y el subíndice representa el campo evaluado en ese punto.

Proposición 8. *Se tiene:*

1. *Cada $[X, Y]_p$ es efectivamente una derivación de T_pM.*
2. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Y] + \beta[Y, Z]$
3. $[X, Y] = -[Y, X]$
4. $[X, [Y, Z]]_p + [Y, [Z, X]]_p + [Z, [X, Y]]_p = 0$

Demostración. Para 1, $[X,Y]_p(a\lambda+b\mu)=X_p(Y(a\lambda+b\mu))-Y_p(X(a\lambda+b\mu))=X_p(Y(a\lambda+b\mu))-Y_p(X(a\lambda+b\mu))=a(X_p(Y(\lambda))-Y_p(X(\lambda)))+b(X_p(Y(\mu))-Y_p(X(\mu)))=a[X,Y]_p(\lambda)+b[X,Y]_p(\mu)$, y la regla de Leibniz se tiene así $[X,Y]_p(\lambda\mu)=X_pY(\lambda\mu)-Y_pX(\lambda\mu)=\lambda(p)Xp(Y(\mu))+Y_p(\mu)X_p(\lambda)+\mu(p)X_p(Y(\lambda))+Y_p(\lambda)X_p(\mu)-(\lambda(p)Y_p(X\mu)+X_p\mu Y_p\lambda+\mu(p)Y_pX\lambda+X_p\lambda Y_p\mu)=\lambda(p)[X,Y]_p(\mu)+\mu(p)[X,Y]_p(\lambda)$. Se utiliza la regla de Leibniz en varios casos: $X_p(\lambda\cdot Y(\mu))$, $X_p(\mu\cdot Y(\lambda))$, y los análogos en Y_p. Los otros tres puntos se hacen del mismo modo: poniendo la definición y usando las propiedades de los campos. □

3. Formas diferenciales e integración

3.1. Formas en $\mathbb{R}^n$

Comenzamos con una definición informal de las formas en $\mathbb{R}^n$, para luego extenderla y formalizarla en variedades.

Definición 22. Una **forma diferencial de grado** k en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una expresión:

$$\omega = \sum_{I_j} f_{I_j}(x_1, \dots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

donde cada $I_j = (i_1, \dots, i_k)$ es uno de los posibles multi-índices y va tomando valores en todos los posibles subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, y cada función $f : U \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

El conjunto de tales formas se denota $\Omega^k(U)$, y está dotado de una suma definida de manera obvia (se suman las funciones f_{I_j} con mismo índice de ambas formas).

Por el momento, tomamos $dx_1, \dots, dx_n$ como simples símbolos, y $\wedge$ como un operador que verifica $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ (y, por tanto, $dx_i \wedge dx_i = 0$).

Definición 23. Se define la **derivada exterior** $d : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)$ como sigue:

1. Si $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces se tiene que $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Nótese que efectivamente es una 1-forma.

2. Si $\omega = \sum_I f_I dx_I$, entonces $d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$. Nótese que la mayoría de sumandos en esta suma desaparecen, al ser i uno de los índices de I.

Definición 24. Se define el **producto exterior** de una q-forma $\omega = \sum_I f_I dx_I$ y una p-forma $\tau = \sum_J q_J dx_J$ como la $(p+q)$-forma $\omega \wedge \tau = \sum_{I,J} f_I q_J dx_I \wedge dx_J$.

Observación 9. De la definición, sigue:

1. $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^q \omega \wedge d\tau$, si q es el grado de ω.

2. $d(d(\omega)) = 0$.

Definición 25. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, y $f : U \to V$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$. Se define el **pullback** $f^* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, de este modo:

1. Si $\varphi \in \Omega^0(V)$, entonces $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

2. f^* es lineal.

3. $f^* \circ d = d \circ f^*$ (conmuta con la derivada exterior)

4. $f^*(\eta \wedge \omega) = f^*(\eta) \wedge f^*(\omega)$.

Es fácil demostrar, a partir de estas propiedades, que debe ser $f^*(\sum_I f_I dx_I) = \sum_I (f_I \circ f) d(f_{i_1}) \wedge d(f_{i_k})$, donde cada $f_{(i_k)}$ es la i_k-ésima componente de f. Basta con aplicar primero la linealidad, luego la propiedad 1 para obtener el pullback de las funciones escalares, luego la propiedad 4 para aplicar el pullback a cada x_i, y finalmente, pensando en x_i como la *función coordenada i-ésima* (tendrá mucho más sentido en variedades arbitrarias), se tiene $f^*(x_i) = x_i \circ f = f_i$ y se usa la conmutatividad con la derivada exterior para deducir que $f^*(dx_i) = d(f_i)$.

Observación 10. Por ejemplo, si tenemos $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$, con U, V abiertos, y denotamos $f(x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots, y_n)$. Vamos a calcular el pullback de $\omega = dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$. Usando la expresión vista, se tiene que $f^*(\omega) = d(f_1) \wedge \cdots \wedge d(f_n) = (\sum \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j) \wedge \cdots \wedge (\sum \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j) = \begin{vmatrix} \partial_1 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n & \ldots & \partial_n f_n \end{vmatrix} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

3.2. El fibrado cotangente

Definición 26. Si M es una variedad y $p \in M$, se denota T_pM^* el espacio dual de T_pM. Se denomina **espacio cotangente a M en p**.

Definición 27. Dada una carta (U, φ) de M en p, que defina coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces sabemos que se tiene una base de T_pM, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$. Su correspondiente base dual en el cotangente se denota $\{dx_1|_p, \ldots, dx_n|_p\}$.

Definición 28. Fijamos una función $f : M \to \mathbb{R}$. Sabemos que tenemos una función $T_pM \to \mathbb{R}$ dada por $v \to v(f)$. Esta aplicación es lineal, luego pertenece a T_pM^*. Vamos a calcular sus coordenadas. Denotamos (U, φ) la carta que tomamos en p, y $\bar{u} = (\bar{u_1}, \ldots, \bar{u_n})$ las coordenadas de p. Denotamos asimismo $f \circ \varphi^{-1} = F$.

Sabemos entonces que esta aplicación manda $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial u_i}|_p$ en el valor $v(f) = \sum a_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(\bar{u})$. En concreto, $\frac{\partial}{\partial u_j} \to \frac{\partial F}{\partial u_j}(\bar{u})$, y por tanto esa aplicación del cotangente es, en la base dual inducida: $\sum_j \frac{\partial F}{\partial u_j}(\bar{u})(du_j)_p$.

Esta aplicación de T_pM^*, $\sum_j \frac{\partial F}{\partial u_j}(\bar{u})(du_j)_p$, se denota df_p y se denomina **diferencial de f en p**.

Obsérvese que ya se había definido otro concepto de diferencial para $f : M \to N$, que era $df_p : T_pM \to T_pN$, pero son la misma si ponemos $N = \mathbb{R}$ e identificamos $T_p\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ (asociando $b\frac{\partial}{\partial t}|_p$ con el valor b). Es fácil de ver si se recuerda que la matriz local de df_p era $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$, pero ahora estamos tomando $\psi = Id$.

Otra observación interesante es que si tomamos la función $u_j : U \subset M \to \mathbb{R}$, que nos da la j-ésima coordenada, entonces $d(u_j)|_p = \sum_j \frac{\partial(u_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\bar{u})(du_j)_p = (du_j)_p$. La notación funciona.

Proposición 9. *Sean $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi = (u_1, \ldots, u_n)$ dos cartas en torno a p. La aplicación de cambio de coordenadas de la base $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ en $\{(du_1)_p, \ldots, (du_n)_p\}$ es $[D(\phi \circ \psi^{-1})|_{[p]_\psi}]^t$.*

Demostración. Ya sabemos que $D(\phi \circ \psi^{-1})|_{[p]_\psi}$ realiza este cambio de bases en TpM, desde la inducida por ψ hasta la inducida por ϕ. Basta con aplicar el hecho de que entre bases duales (en este caso, desde la dual de la inducida por ϕ a la de ψ) el cambio está dado por la aplicación transpuesta. □

Definición 29. El **fibrado cotangente** de M, denotado por TM^*, es la unión disjunta de todos los T_pM^*, es decir, $TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^*$. Tiene estructura de variedad $2\dim(M)$-dimensional, haciendo que cada carta $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ de M induzca una carta $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ tal que, dada $\omega \in T_pM^*$, con $p \in U$ y $\omega = \sum u_j d(x_j)_p$, se tiene $\hat{\varphi}(\omega) = (\varphi(p), u_1, \ldots, u_n)$.

Definición 30. Una **1-forma diferencial** $\mathcal{C}^\infty$ es una sección diferenciable del fibrado cotantente, es decir, una aplicación $\omega : M \to TM^*$ tal que $\omega_p := \omega(p) \in T_pM^*$ y diferenciable como aplicación entre variedades.

Por ejemplo, si (U, φ) es una carta de M con coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$, la expresión du_i es una forma diferencial en U, la que asigna a cada $p \in U$ el elemento $(du_i)_p$.

Observación 11. Dado una carta (U, φ), uno puede expresar una 1-forma ω como lo siguiente:

$$\omega = g_1(u_1, \dots, u_n)du_1 + \cdots + g_n(u_1, \dots, u_n)du_n$$

siendo g_i funciones $\mathcal{C}^\infty$. Es decir, es una combinación lineal de las 1-formas du_j, o, lo que es lo mismo, en el punto p de coordenadas $(u_1, \dots, u_n)$, se tiene $\omega_p = g_1(u_1, \dots, u_n)(du_1)_p + \cdots + g_n(u_1, \dots, u_n)(du_n)_p$. Lo que se observa es que, dadas cartas, se tiene una forma diferencial de las habituales de $\mathbb{R}^n$.

Definición 31. Dado $f : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo, tenemos $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ que transforma los espacios tangentes correspondientes. Dado un campo $X : M_1 \to TM_1$, se tiene otro campo $f_*(X) : M_2 \to TM_2$, dado por $(f_*(X))_{f(p)} = df_p(X_p)$, conocido como **push-forward** de X por f.

Definición 32. Dado $f : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo y ω una 1-forma en M_2, se define $f^*(\omega)$ como la 1-forma en M_1 dada como sigue: $f^*(\omega)_p : T_pM_1 \to \mathbb{R}$, con $f^*(\omega)_p(v) = \omega_{f(p)}(df_p(v)) = \omega_{f(p)}(f_*(v))$. Esta forma se conoce como el **pull-back** de ω por f.

Observación 12 (Expresión en coordenadas del pull-back). Tomamos unas coordenadas $(U, \varphi = (u_1, \dots, u_n))$ en M_1 alrededor de p, y (V, ψ) en M_2 alrededor de $f(p)$. Sea $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (x_1, \dots, x_n)$ el cambio de coordenadas.

Damos una 1-forma en M_2 alrededor de $f(p)$, con coordenadas: $\omega = \sum g_j(x_1, \dots, x_n)dx_j$. Entonces, $f^*(\omega) = \sum h_j(u_1, \dots, u_n)du_j$, y el objetivo es calcular las funciones h_j.

Si p tiene coordenadas $u_1, \dots, u_n$, entonces:

$$h_j(u_1, \dots, u_n) = f^*(\omega)_p(\frac{\partial}{\partial u_j}|_p) = \omega_{f(p)}(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_i g_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n)$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son funciones de $u_1, \dots, u_n$ dadas por F.

Es decir, simplemente resulta ser tomar la expresión $\omega = \sum g_j(x_1, \dots, x_n)dx_j$ y reemplazar cada dx_j por su expresión en las u_j como se hacía en las formas de $\mathbb{R}^n$, interpretando x_j como una 0-forma y aplicando la derivada exterior: $dx_j = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial u_i}du_i$.

3.3. Formas diferenciales en variedades

Definición 33. Una **forma diferencial de grado** k **en** M es una colección $\omega = \{\omega_i \in \Omega^k(\varphi_i(U_i))\}$ de *k-formas locales*, cada una definida en el abierto $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, donde $\{(\varphi_i, U_i)\}$ es un atlas de M, sujetas a la condición de cambio de coordenadas: si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $\omega_i = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^*(\omega_j)$.

Definición 34. Se define la **derivada exterior** y el **producto exterior** de una k-forma en una variedad, aplicando la definición en $\mathbb{R}^n$ a cada una de las formas locales que la componen.

Está bien definido porque $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^*(d\omega_j) = d((\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^*(\omega_j)) = d\omega_i$, y análogo para el producto exterior.

Definición 35. Sea $f : M \to N$ diferenciable. Sean $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}$ sendos atlas en M y N, con la condición de que $f(U_i) \subset V_{j_i}$ para cierto j_i. Dada una $\omega = \{\omega_j\} \in \Omega^k(N)$, se define su **pullback** $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ como:

$$f^*(\omega) := \{(\psi_{j_i} \circ f \circ \varphi_i^{-1})^*(\omega_j)\}$$

Puede comprobarse fácilmente que efectivamente es una forma en M, y que se cumple la condición de cambio de carta.

Proposición 10. *Si $f, g : M \to N$ son diferenciables:*

1. *f^* conmuta con d.*
2. *$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*
3. *Si $M = N$ y $f \equiv Id$, entonces se tiene $(Id_M)^* = Id_{\Omega_M}$.*

Esto se debe a que se tienen todas esas propiedades en $\mathbb{R}^n$ luego al aplicarlo de uno en uno a las formas locales se sigue cumpliendo.

Definición 36. Una forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ se **anula** en p si las formas locales que la componen valen 0 (son la forma nula) en las coordenadas de p correspondientes (equivalentemente por el cambio de cartas, si una de ellas lo hace). Es decir, si en una carta $(U, \varphi = (u_1, \ldots, u_n))$ cerca de p, se tiene que $\omega|_U = \sum_I f_I du_I$, con $f_I(\varphi(p)) = 0$ en todo I.

Nótese que darle un valor concreto a una forma no está bien definido, porque cada una de las componentes locales *valdrá distinto* (es decir, como vector en la base del espacio cotangente correspondiente, no serán las mismas coordenadas), pero el hecho de que se anulen o no sí está bien definido: si tenemos otra carta $(V, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ en torno de p, tenemos que $(\varphi \circ \psi^{-1})^*(\omega|_U) = \sum_I f_I(\varphi \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_n))d(\varphi \circ \psi^{-1})_I = 0$, dado que $f_I(\varphi \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_n))$ vale 0 en las coordenadas de p.

Definición 37. El **soporte** de $\omega \in \Omega^k(M)$ es el cierre del conjunto de puntos donde no se anula.

3.4. Integración en variedades

El objetivo es ahora definir la integral en una variedad. Como es habitual, se hará mediante un inteligente paso a las integrales en $\mathbb{R}^n$, que son las que están bien definidas y podemos calcular.

Vamos a hacer un primer intento integrando en M una 0-forma o colección de funciones locales que respetan el cambio de coordenadas. Tomamos dos cartas $(U, \varphi = (u_1, \ldots, u_n))$ y $(V, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$, y consideramos $F : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ la función $F = \psi \circ \varphi^{-1}$ de cambio. Pongamos que la 0-forma ω que queremos integrar tiene como función coordenada $f(x_1, \ldots, x_n)$ en V. Si intentamos darle un valor a la *integral de* ω, digamos en $U \cap V$, bajándola a $\mathbb{R}^n$, haríamos: $\int_{\psi(U\cap V)} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$, pero sabemos del teorema de cambio de variable en $\mathbb{R}^n$ que eso equivale a:

$$\int_{\varphi(U\cap V)} f(F(u_1, \ldots, u_n))|\det(DF(u_1, \ldots, u_n))|du_1 \ldots du_n$$

Véase que la integral pasa a ser la de la función coordenada en U de la 0-forma, es decir, la de $F^*(f)$, pero ha sido multiplicada por un factor adicional. Es decir: el valor de la integral difiere dependiendo de la carta escogida, lo cual es indeseable.

El segundo intento va a ser con una n-forma ω, donde n coincide con la dimensión de la variedad. En este caso, integrar respecto de la expresión en V podría definirse integrando la función coordenada (la que acompaña a $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$), es decir: $\int_{\psi(U\cap V)} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$. Respecto de la expresión en U sería: $\int_{\varphi(U\cap V)}(f \circ F(u_1, \ldots, u_n)) \det(DF(u_1, \ldots, u_n))du_1 \ldots du_n$, debido al hecho de que:

$$F^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (f \circ F) \det(DF(u_1, \ldots, u_n))du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$$

Es decir, ahora, esta operación de *tomar la función coordenada e integrarla* **sí** que es invariante de la carta elegida, por el teorema del cambio de variable, **siempre y cuando** se tenga que $|\det(DF)| = \det(DF)$, es decir, que siempre sea $\det(DF) > 0$ en todos los puntos. Por tanto, parece que la integral debe ser definida únicamente en n-formas, donde n coincide con la dimensión de M, y además solamente sobre variedades orientables, en las que $\det(DF) > 0$. Ahora el problema es *juntar* los valores de las integrales en cada carta.

Definición 38. Sea M una variedad orientable de dimensión n y $\omega \in \Omega^n(M)$, con $\omega = \{\omega|_{U_i} = f_i dx_1^i \wedge \cdots \wedge dx_n^i\}_i$ expresada como colección de formas locales en el atlas orientado $\{(U_i, \varphi_i)\}$, se define su **integral**:

$$\int_M \omega = \sum_{j \in J} \int_{\varphi_i(P_j)} f_i(x_1^i, \dots, x_n^i) dx_1^i \dots dx_n^i$$

donde $\{P_j\}_j$ es una **triangulación** de M, es decir, una partición de M en conjuntos $P_j \subset M$ tales que cada P_j está completamente contenido en (U_i, φ_i) un entorno coordenado , $\varphi_i(P_j) \subset \mathbb{R}^n$ es un poliedro de dimensión n y $\varphi_i(P_{j_1} \cap P_{j_2})$ es un poliedro de dimensión $r < n$, o vacío.

Esta definición no es muy cómoda y faltaría asegurar que toda variedad es triangulable y que la definición no depende de la triangulación (esto puede hacerse con la misma idea que en $\mathbb{R}^n$, refinando ambas triangulaciones para obtener una tercera más fina). A continuación veremos una definición más rigurosa de la integral.

Definición 39. Una **partición de la unidad** subordinada a un recubrimiento de M por abiertos $M = \bigcup U_i$ es una colección de funciones $f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que:

1. $f_i \geq 0$
2. $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$
3. Cada $p \in M$ tiene un entorno U en el que solo una cantidad finita de las f_i son no nulas.
4. $\sum_i f_i = 1$ en todo punto.

La idea de una partición de la unidad es, dado un atlas $\{U_i, \varphi_i\}$ y una partición $\{f_i\}$ subordinada al atlas, puede hacerse $\int_M \omega = \int_M (\sum f_i)\omega = \sum_i \int_M f_i \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega$, lo cual ya puede hacerse exclusivamente en U_i y por tanto en coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Es decir sirve para dar una segunda definición de la integral de ω. Puede calcularse que, elegido otro atlas (V_j, ψ_j), y una partición $\{g_j\}$ subordinada, el valor de la integral es el mismo.

Proposición 11. *Sea M una variedad n-dimensional. Entonces M es orientable $\iff$ existe $\omega \in \Omega^n(M)$ que no se anula en ningún punto. Tal ω se llama **forma o elemento de volumen**, y permite definir la integral de una $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, haciendo que $\int_M f := \int_M f d\omega$.*

3.5. El teorema de Stokes

Definición 40. Denotamos $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$.

Obsérvese que los puntos con $x_n = 0$ tienen entornos que parecen *semibolas*, distintos a los habituales de $\mathbb{R}^n$.

Definición 41. Una **variedad con frontera** es un espacio topológico de Hausdorff con un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, donde φ_α puede ir en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{H}^n$, y con las mismas restricciones (los cambios de carta son difeomorfismos y las cartas homeomorfismos) que en las variedades habituales.

Se define la **frontera de** M, denotado por ∂M como los $m \in M$ tales que $\varphi_\alpha(m) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ para cierta φ_α sobre $\mathbb{H}^n$.

Véase que simplemente se permite que la imagen de las cartas *tenga borde*, es decir, que sea $\mathbb{H}^n$. El resto de condiciones son las mismas. Obsérvese que las variedades con borde **no** son variedades según la definición habitual. Un hecho que se tiene es que:

Proposición 12. *Si M es una n-variedad con borde, entonces ∂M es una $n-1$-variedad habitual, y se mantiene la orientabilidad, de hecho, la orientación de M induce una en ∂M.*

Demostración. Dado un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M, se tiene $\{(U_\alpha \cap \partial M, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$ como atlas en ∂M, donde $\tilde{\varphi}_\alpha(m) = (\varphi_\alpha(m))_{1\leq j\leq n-1}$, es decir, se elimina la última coordenada que vale 0 en ∂M. Es fácil ver que este nuevo atlas es orientado. □

Teorema 4 (Stokes)**.** *Sea M una variedad con borde de dimensión n y $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ una $(n-1)$-forma con soporte compacto. Entonces:*

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega$$

donde integrar ω en ∂M se refiere a integrar su pull-back por la inclusión $i : \partial M \to M$.

Demostración. Comenzamos por el caso en que $M = \mathbb{R}^n$ y por tanto $\partial M = \emptyset$. Supongamos que $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$ sin perder la generalidad. Entonces, $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int \ldots \int \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0$, dado que $\int \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) - \lim\limits_{x\to-\infty} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = 0$ al ser compacto el soporte (en particular, acotado en $\mathbb{R}^n$). Por tanto, el teorema se verifica.

Ahora veremos el caso en que $M = \mathbb{H}^n$. Por simplicidad, se verá si $n = 2$ siendo análogo en el resto. Ponemos $\omega = f dx + g dy$, luego $d\omega = (-f_y + g_x) dx \wedge dy$. Se tiene que $\int_{\mathbb{H}^2} g_x dx dy = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_x dx dy = 0$, por la misma razón que anteriormente (el soporte es compacto). De este modo, $\int_{\mathbb{H}^2} d\omega = -\int_{\mathbb{H}^2} f_y dx dy = -\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f_y dy dx = -\int_{-\infty}^\infty \lim\limits_{y\to\infty} f(x,y) - f(x,0) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x,0) dx = \int_{\partial\mathbb{H}^2} \omega$ (este último paso es inmediato integrando en el eje $y = 0$ con la orientación positiva inducida por el semiplano).

Por último, si M es una variedad con borde cualquiera, con atlas $\{U_\alpha\}$ orientado, y una partición de la unidad ρ_α, de tal modo que $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$, basta con probarlo para cada $\rho_\alpha \omega$, cuyo soporte se contiene en U_α. Pero como U_α es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, casos para los que ya se ha probado, se tiene $\int_M d(\rho_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega$, y por tanto el teorema se cumple localmente, y por tanto globalmente sumando todos los resultados. □

4. Geometría Riemanniana

En esta sección se asume que las variedades son conexas.

Definición 42. Una **métrica riemanniana** en M es una asignación de un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ en cada T_pM, para cada $p \in M$, *que varíe de forma diferenciable respecto del punto.* Es decir, que verifique alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Dados campos cualesquiera X, Y en M, la función $p \to \langle X_p, Y_p\rangle_p$ es $\mathcal{C}^\infty$.
2. Si $(U, \varphi = (u_1, \ldots, u_n))$ es una carta de M en p, entonces las funciones de p que componen la matriz del producto escalar respecto de la base inducida, $g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}|_u, \frac{\partial}{\partial u_j}|_u \right\rangle_{p=\varphi-1(u)}$, son $\mathcal{C}^\infty$.

En coordenadas, la expresión de una métrica Riemanniana suele denotarse $g = \sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ con las coordenadas usuales dadas por la identidad, el producto escalar usual euclídeo es $g = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$.

Otro ejemplo, cuya construcción es útil, es el de las **subvariedades Riemaniannas**. Dada una variedad Riemanniana M, y una subvariedad $N \subset M$ (recordemos que esto quiere decir que $i : N \to M$, la inclusión, es una inmersión), se induce un producto escalar en T_pN dado por $\langle v, w\rangle_p = \langle i_*(v), i_*(w)\rangle_{i(p)}$, es decir, se consideran los vectores tangentes como parte de T_pM (mediante el pushforward) y se hace el producto en M.

Definición 43. Una **variedad riemanniana** es una variedad diferenciable con una métrica riemanniana.

Definición 44. Si M es una variedad Riemanniana y $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva diferenciable, se define su **longitud** como $l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)}}dt$.

Definición 45. Sean $x, y \in M$ dos puntos en una variedad riemanniana conexa. Se define $d(x, y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma$ es diferenciable a trozos y va de x a $y\}$.

La definición es válida dado que el conjunto de puntos *alcanzables* con una curva desde $x \in M$ fijo puede probarse fácilmente que es abierto y cerrado, luego todos los puntos son alcanzables y el conjunto sobre el que se toma el ínfimo es no vacío. Esta definición da lugar a una distancia, lo que puede comprobarse rutinariamente.

Un curioso resultado que se tiene es:

Proposición 13. *La topología inducida por d en une variedad Riemanniana conexa es la misma que la de partida.*

Definición 46. Un difeomorfismo $F : M \to M$ es una **isometría** si $\langle dF_p(X_p), dF_p(Y_p)\rangle_{F(p)} = \langle X, Y\rangle_p$ para todo $p \in M$ y $X, Y \in T_pM$.

Para verificar si una aplicación es isometría, lo más sencillo es hacer el *pullback* de la expresión de la métrica respecto de F. En caso de que coincida la expresión resultante con la nueva, entonces eso quiere decir que los productos escalares coinciden en todo punto y por tanto es isometría.