

Modelización

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Mayo de 2021

$$\begin{cases} S' = -rSI \\ I' = rSI - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases}$$

Revisado en 2022
Apuntes de la asignatura impartida por Daniel Faraco
en la Universidad Autónoma de Madrid en Mayo de 2021.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Modelización del grado en matemáticas, tomados en Mayo de 2021 por Miguel González. La asignatura fue impartida por Daniel Faraco. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Modelización

Esta asignatura explora distintas aplicaciones de las matemáticas para modelizar procesos de la realidad. Principalmente se tratan ecuaciones diferenciales ordinarias en procesos de la naturaleza, y cálculo de variaciones en el contexto de procesos físicos.

Requisitos previos

1. Conocimientos de álgebra lineal.
2. Conocimientos de cálculo/análisis matemático.
3. Conocimientos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Índice

1. Sistemas dinámicos. Dinámica de poblaciones.	3
1.1. Modelo de Malthus	3
1.2. Modelo logístico	3
1.3. Análisis cualitativo de EDOs autónomas	4
2. Análisis dimensional	5
3. Modelos multidimensionales	6
3.1. Sistemas de EDOs	6
3.2. Modelo de Lotka-Volterra	8
3.3. Modelos epidemiológicos	9
3.3.1. El modelo SR	9
3.3.2. El modelo SIR	10
4. Cálculo de Variaciones	11
5. Mecánica	13
5.1. Mecánica lagrangiana	13
6. Modelos discretos unidimensionales no lineales	15
7. Sistemas dinámicos lineales discretos	17

1. Sistemas dinámicos. Dinámica de poblaciones.

La **dinámica de poblaciones** estudia una población que varía en el tiempo, es decir, un sistema dinámico. Un ejemplo sencillo puede ser $N(k+1) = aN(k)$, es decir, en cada unidad de tiempo que pasa se multiplica la población por a . Esto puede complicarse si la tasa de variación es instantánea (modelo continuo), si la relación es no lineal, si hay varias cantidades en juego...

1.1. Modelo de Malthus

Se trata de un sencillo modelo inicial publicado en 1798 que fue motivado por conocer cuántas personas puede mantener el planeta.

Si $x(t)$ es la población en el instante t , introducimos una tasa de nacimiento β y una tasa de defunción μ , ambas por unidad de tiempo, de tal modo que consideramos:

$$x(t+h) = x(t) + (\beta - \mu)hx(t). \quad (1)$$

Y por lo tanto, si $h \rightarrow 0$:

$$x'(t) = (\beta - \mu)x(t). \quad (2)$$

En este modelo, definimos la **tasa de crecimiento per capita o tasa de cambio** $r = \beta - \mu$, y a x' se le suele denominar **tasa de crecimiento**. Es una sencilla ecuación de solución $x(t) = e^{rt}x_0$, donde x_0 es la población inicial en $t = 0$. Si $r > 0$, se tiene un crecimiento exponencial, para $r < 0$ un decrecimiento exponencial que tiende a la extinción, y si $r = 0$ no cambia.

Esto precisamente plantea un ejemplo de **bifurcación**, es decir, un cambio claro de comportamiento dependiendo del parámetro. Para condensar esto, y evitar la dependencia de r de las unidades:

Definición 1. El **número reproductivo básico** de este modelo se define como $R_0 = \frac{\beta}{\mu}$.

Observación 1. En este modelo, el tiempo que tarda la población, desde el comienzo, en multiplicarse por $K > 0$ está dado por $Kx_0 = e^{rt}x_0$, luego $t = \frac{\log(K)}{r}$.

1.2. Modelo logístico

Para mejorar el modelo previo, se consideran tasas de cambio variables, que pueden depender tanto de la población como del tiempo: $r = r(t, x)$. En concreto, en este modelo, se usarán *ecuaciones autónomas*, es decir, $r = r(x)$. La tasa de cambio, por tanto, va a depender de la población. Una de las razones por la cual esto puede ocurrir es la existencia de una *máxima capacidad* del sistema, que denotaremos por K , de tal forma que si la población se acerca a tal capacidad, la tasa de cambio se reduce. Así:

$$r(x) = b(K - x). \quad (3)$$

Y por lo tanto:

$$x' = bx(K - x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right). \quad (4)$$

Si $x \approx 0$, entonces la ecuación es similar a $x' = rKx$ y estamos en el caso previo: crecimiento exponencial. Pero, como se ha discutido, si $x \approx K$, entonces $x' = r(K - x)$ y por tanto $(K - x)' = -r(K - x)$, luego $K - x = e^{-rt}$ y por tanto $x \approx K - e^{-rt}$. Es decir, en efecto, va ralentizándose para no exceder K .

Con un reescalado en el que $\tau = rt$, y $\tilde{x}(\tau) = \frac{x(\tau)}{K}$, la ecuación se convierte en $\tilde{x}'(\tau) = \tilde{x}(\tau)(1 - \tilde{x}(\tau))$, es decir, de la forma $x = x(1 - x)$. Es decir, el cambio ha eliminado los parámetros de la ecuación diferencial, quedando así únicamente el valor inicial.

Una manera de resolver la ecuación logística $x' = r(1 - \frac{x}{K})$ es tratándola como una ecuación de Bernoulli, para lo cual consideramos $v = \frac{1}{x}$. De esta manera, $v' = (-\frac{x'}{x^2}) = r(\frac{1}{K} - v)$. De esta manera, se obtiene que $v = \frac{1}{K} - Ce^{-rt}$, de donde $x = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}$. Si resolvemos la C para el valor inicial $x(0) = x_0$:

$$x = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}. \quad (5)$$

1.3. Análisis cualitativo de EDOs autónomas

Como hemos visto, los dos modelos obtenidos previamente vienen modelados por ecuaciones diferenciales autónomas. Vamos a dedicar esta sección a recordar los conceptos relevantes acerca del estudio cualitativo de ecuaciones del tipo:

$$x' = f(x), \quad (6)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (7)$$

Teorema 1 (Picard). *Si f es Lipschitz, el problema descrito anteriormente tiene una solución, y es única.*

Recordemos que si f es C^1 , entonces es Lipschitz. Denotaremos $x(t, t_0, x_0)$ a tal solución única, y su intervalo máximo de definición es (α, β) . Este teorema implica que dos trayectorias (para distintos valores iniciales) **no** pueden cortarse, dado que de hacerlo, el problema de valores iniciales que comienza en tal punto de corte, tendría dos soluciones locales por lo menos, contradiciendo el teorema.

Definición 2. Un **punto de equilibrio** de la ecuación autónoma es un x_0 tal que $f(x_0) = 0$, en cuyo caso la solución $x(t) = x_0$ verifica el problema.

Si f es Lipschitz, entonces esta solución constante actúa como *barrera* dado que el resto de soluciones no pueden atravesarla.

Proposición 1. *Se tiene que (bajo el supuesto del teorema de Picard):*

1. Si $x(t)$ es solución tal que $x'(t_0) = 0$ para cierto punto t_0 , entonces es constante.
2. Toda solución es estrictamente monótona, o constante.
3. Si $x(t)$ es solución, también lo es $x(t + t_0)$, así que podemos simplificar la notación $x(t, t_0, x_0)$ a $x(t, x_0)$.
4. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \xi$, entonces ξ es un punto crítico. Por tanto, si no hay ningún punto crítico al que converger (por ejemplo, si crece y no hay críticos superiores al valor inicial), entonces ha de divergir a ∞ .

Demostración. Para 1, si $x'(t_0) = 0$, entonces $f(x(t_0)) = 0$, luego la función constante $x(t_0)$ es solución, y por unicidad ha de coincidir con $x(t)$. Para 2, es un corolario de lo anterior. Si no es monótona, tendría un punto t_0 de derivada nula, luego no sería constante. Para 3 basta con verificar que $\frac{d}{dt}x(t + t_0) = x'(t + t_0) = f(x(t + t_0))$ luego satisface la ecuación. Para 4, podemos tomar por la convergencia un t_n suficientemente grande tal que $|x(t_{n+1}) - x(t_n)| < \frac{1}{n}$. Por el teorema del valor medio, entonces, hay un τ_n entre ellos que verifica que $x'(\tau_n) = x(t_{n+1}) - x(t_n)$. Es decir, que $|f(\tau_n)| = |x(t_{n+1}) - x(t_n)| \leq \frac{1}{n}$ luego $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(\tau_n)| = 0$, y por continuidad de f entonces se tiene que ese límite coincide con $f(\xi)$ (dado que si $n \rightarrow \infty$, entonces $\tau_n \rightarrow \infty$). \square

Definición 3. Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$.

1. El x_0 es **estable** si $\forall \epsilon > 0$, se tiene un $\delta > 0$ tal que $|x_0 - z| \leq \delta$ implica que $x(t; z)$ está definida y $|x(t; z) - x_0| \leq \epsilon$ si $t \geq 0$. Si no, se denomina **inestable**.
2. El x_0 es **atractor local** si hay un ρ tal que si $|z - x_0| \leq \rho$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; z) = x_0$. La **región de atracción** o **cuenca de atracción** es el $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, con ρ maximal. Se denota $A(x_0)$.
3. El x_0 es **asintóticamente estable** si es estable y atractor (en una dimensión, equivale a atractor).
4. El x_0 es **repulsor** si hay un $\rho > 0$ tal que todo z con $|z - x_0| \leq \rho$, se tiene que $x(t; z) \rightarrow x_0$ si $t \rightarrow -\infty$.

Proposición 2. Se tienen, en la ecuación $x' = f(x)$ con crítico en x_0 :

1. Si $f \geq 0$ en $[x_0 - \delta, x_0]$ y después $f \leq 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$, para cierto δ , entonces x_0 es estable.
2. Si $z < x_0$ verifica que $f(\xi) > 0$ en todo $\xi \in (z, x_0)$, entonces $z \in A(x_0)$. Análogamente por la derecha y el signo de f cambiado.
3. Si las desigualdades del primer punto son estrictas, entonces x_0 es asintóticamente estable.
4. Si las desigualdades del primer punto son estrictas y en sentido contrario, el x_0 es repulsor.
5. Por tanto, si $f'(x_0) < 0$, el x_0 es atractor, y si $f'(x_0) > 0$ es repulsor.

2. Análisis dimensional

Definición 4. Una **magnitud** es una medida asignada a cada objeto de un conjunto que se puede medir. Se denominan **elementales** aquellas que no se pueden descomponer en otras.

Por ejemplo, en la ecuación de Newton $F = mx''$, $x(0) = x_0$, $t \in [0, T]$ tenemos las magnitudes: F, m, x, t, x_0, T . Obsérvese que las constantes también tienen magnitudes. En este caso, el tiempo, la masa y la longitud son elementales que podemos denotar L_1, L_2 y L_3 , y el resto de magnitudes pueden obtenerse con esas: $[F] = L_1^{-2}L_2L_3$, $[T] = L_1$, $[x_0] = L_3$, $[v_0] = L_3L_1^{-1}$.

Definición 5. Una magnitud A tiene **dimensión** $[A] = L_1^{a_1} \dots L_n^{a_n}$, donde $\{L_1, \dots, L_n\}$ son magnitudes elementales, si, suponiendo que $a \in \mathbb{R}$ es la medida de a en el sistema de unidades de $\{L_1, \dots, L_n\}$, entonces el cambio $L'_1 = \lambda_1 L_1, \dots, L'_n = \lambda_n L_n$ modifica la medida de A como sigue: $a' = a\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_n^{a_n}$.

Proposición 3. Si A, B son magnitudes tales que $[A] = L_1^{a_1} \dots L_n^{a_n}$ y $[B] = L_1^{b_1} \dots L_n^{b_n}$, y C es una magnitud que depende de A y B y verifican que $c = da^p b^q$, entonces $[C] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \dots L_n^{a_n p + b_n q}$.

Demostración. Consideramos el cambio $L'_1 = \lambda_1 L_1, \dots, L'_n = \lambda_n L_n$. Sabemos que entonces la magnitud A cambia como sigue: $a' = a\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_n^{a_n}$, y la magnitud B : $b' = b\lambda_1^{b_1} \dots \lambda_n^{b_n}$. Como $c = da^p b^q$, entonces ha de darse que $c' = d{a'}^p {b'}^q = da^p (\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_n^{a_n})^p b^q (\lambda_1^{b_1} \dots \lambda_n^{b_n})^q = c(\lambda_1^{a_1 p + b_1 q} \dots \lambda_n^{a_n p + b_n q})$, como se quería. \square

Definición 6. Una magnitud A es **adimensional** si $[A] = 1$, es decir, un cambio de unidades no altera el valor.

Definición 7. Se define la **matriz de dimensiones** como aquella que tiene en la entrada a_{ij} el exponente de la magnitud elemental L_i en la dimensión de la magnitud j .

Proposición 4. Si la matriz de dimensiones es de $n \times m$, es decir hay n magnitudes elementales L_1, \dots, L_n y m magnitudes q_1, \dots, q_m en el problema, y tiene rango r , se tienen $m - r$ cantidades adimensionales independientes relacionadas con las magnitudes.

Demostración. Una magnitud $\pi = q_1^{\alpha_1} \dots q_m^{\alpha_m}$ es adimensional si resuelve $A\alpha = 0$, donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Esto se obtiene poniendo las dimensiones de cada $q_i^{\alpha_i}$ en términos de las de cada L_j a través de la matriz, en cuyo caso los exponentes que se obtienen son $A\alpha$ y necesitamos que eso se anule para tener adimensionalidad. Pero entonces, el teorema de Rouché-Frobenius indica que hay $m - r$ soluciones linealmente independientes. \square

Definición 8. Una ley $f(q_1, \dots, q_m) = 0$ entre magnitudes se dice que es **invariante** frente a cambios de unidades, si todo cambio $L'_1 = \lambda_1 L_1 \dots L'_n = \lambda_n L_n$, verifica que las cantidades resultantes tras el cambio, $q'_1 \dots q'_m$, cumplan $f(q'_1, \dots, q'_m) = 0$.

Teorema 2 (Teorema Pi). Sea $f(q_1, \dots, q_m) = 0$ una ley invariante. Sea $n < m$ y el rango de la matriz de dimensiones es $r \leq n$. Entonces, hay $m - r$ cantidades adimensionales π_1, \dots, π_{m-r} , relacionadas con las magnitudes q_1, \dots, q_m , y una función $F : \mathbb{R}^{m-r} \mapsto \mathbb{R}$, tales que la ley previa es equivalente a $F(\pi_1, \dots, \pi_{m-r}) = 0$.

3. Modelos multidimensionales

Vamos a tratar modelos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que están acopladas. Por ejemplo, dos poblaciones cuyas tasas de variación dependen de ambas poblaciones: $(x(t), y(t))' = F(x(t), y(t))$, con $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$.

3.1. Sistemas de EDOs

Supongamos inicialmente que el sistema es lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Con $A \in \mathcal{M}_2$, y $|A| \neq 0$. Si ponemos la matriz en su forma de Jordan: $A = PBP^{-1}$, podemos resolver más fácilmente $Y' = BY$, y los diagramas de fases de Y van a ser *topológicamente equivalentes* (es decir, *parecidos* en comportamiento) a los de X .

Observación 2. Tenemos los siguientes casos para $X' = BX$ con B de Jordan (denotamos $X = (z, w)$):

- Para **autovalores reales** $\lambda_1 \neq \lambda_2$, no nulos, sabemos que la solución general (u, v) es $\alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_2$.

Consideramos $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Si α o β son cero, la trayectoria es una semirrecta en la dirección de v_2 o v_1 respectivamente. Si ambos son no nulos, y escribimos las coordenadas $z = \alpha e^{\lambda_1 t}$, $w = \beta e^{\lambda_2 t}$, tenemos que $\frac{w}{\beta} = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, una ecuación de *tipo parábola* (obviamente el exponente depende de λ_1 y λ_2 , pero es positivo en todo caso). Se corresponde con un **nodo inestable**, dado que las trayectorias comienzan en el punto crítico, y se alejan de él, dado que como los λ son positivos, según aumenta t , aumentan z y w . (Y para t cercano a $-\infty$, se tiene $z = w = 0$)

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, tenemos los mismos cálculos que previamente, pero ahora las trayectorias comienzan lejanas al crítico, y tienden hacia él (por la misma discusión en la t hecha anteriormente). Por tanto el crítico es **asintóticamente estable**.

Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces, si z o w son cero (por serlo α o β), tenemos las mismas semirrectas que anteriormente, pero una de ellas se acerca (la correspondiente a $w = 0$, dado que $z \rightarrow 0$ si

$t \rightarrow \infty$), y la otra se aleja del punto crítico. Si ninguna es cero, la ecuación $\frac{w}{\beta} = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ pasa a tener el exponente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, que se corresponde a $\frac{w}{\beta} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = 1$, que es una ecuación de *tipo hiperbólico* (sería una hipérbola salvo el exponente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$), y no tienden ni se alejan del crítico (del mismo modo en que una hipérbola $xy = 1$ no se acerca ni aleja al $(0,0)$). El punto es **inestable** pese a que algunas trayectorias (unas de las semirrectas anteriores, las que van en dirección del v_1 con $\lambda_1 > 0$) tiendan al crítico.

Obsérvese que en todos los casos, el signo de α y β determina en qué cuadrante está la trayectoria, dado que siempre se tiene $e^{\lambda_i t} \geq 0$, luego coinciden con el signo de z y w .

- Si los **autovalores reales son iguales y los autovectores forman base**, entonces $\lambda_1 = \lambda_2$, han de tener forzosamente el mismo signo, luego estamos en los casos previos, pero la ecuación pasa a ser (sustituyendo en la ya obtenida) $\frac{w}{\beta} = \frac{z}{\alpha}$, luego las trayectorias, en la base v_1, v_2 , forman rectas. Si el signo de ambos autovalores es negativo, como antes, convergen al origen (*estable*), y si es positivo, se alejan del origen (**inestable**).
- Si los **autovalores reales son iguales y los autovectores no forman base**, entonces tenemos la solución general es $\alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_1 t} (v_2 + t v_1)$. Por tanto, si la expresamos una vez más en coordenadas $z v_1 + w v_2$, sigue que $z = e^{\lambda_1 t} (\alpha + \beta t)$, y $w = \beta e^{\lambda_1 t}$. Si $w = 0$, entonces $\pm z > 0$, obteniéndose el eje horizontal. Si no, hacemos como antes y $\frac{z}{w} = \frac{\alpha}{\beta} + t = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\lambda_1} \log\left(\frac{w}{\beta}\right)$. Esto se conoce como **punto impropio**. Para $\lambda_1 > 0$ es **inestable**, y para $\lambda_1 < 0$ es **asintóticamente estable**, analizando z y w como siempre.
- Si los **autovalores** son complejos, $\lambda = a \pm ib$, con $b > 0$, tenemos soluciones $\alpha \Re(e^{\lambda t} v) + \beta \Im(e^{\lambda t} v)$. Si $v = v_1 + i v_2$, se tiene que la expresión general es:

$$e^{at}(\alpha \cos(bt) + \beta \sin(bt))v_1 + e^{at}(\alpha \cos(bt) - \beta \sin(bt))v_2$$

Lo expresamos de nuevo como $z v_1 + w v_2$, para esos z y w .

Si $a = 0$ (es decir, el autovalor es imaginario puro), tenemos que $z^2 + w^2 = \alpha^2 + \beta^2$, y entonces las trayectorias se mueven de forma circular en torno al punto crítico. Al deshacer a coordenadas u, v son elipses. Estos puntos críticos se denominan **centros**.

Si $a > 0$, entonces e^{at} crece con t , luego se obtiene lo mismo de antes, pero se va alejando del crítico con t . Se trata de una **espiral inestable**.

Si $a < 0$, entonces e^{at} decrece con t y, razonando como anteriormente, es una **espiral asintóticamente estable**.

Si el sistema no es lineal ($(x, y)' = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$), existe el **Teorema de Liapunov-Poincaré**, que nos permite estudiar el comportamiento cerca del punto crítico (x_0, y_0) en el que $F(x_0, y_0) = 0$. Para ello estudiamos su linealización, es decir, si:

$$A = DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

entonces $F(x, y) \approx F(x_0, y_0) + A(x, y)^t = A(x, y)^t$, así que cerca del punto crítico el sistema debería comportarse como ese caso lineal, exceptuando algunos casos límite.

Teorema 3. Con la notación anterior, (x_0, y_0) es *asintóticamente estable* si $Re(\lambda_i) < 0$ siendo λ_i todos los autovalores de la linealización, y es *inestable* si $Re(\lambda_i) > 0$ para cierto i .

Poincaré probó que no solo la estabilidad se transfiere de la linealización al sistema no lineal, sino que también la *naturaleza* de los puntos críticos (es decir, hay un difeomorfismo local que transforma las trayectorias).

Definición 9. Una trayectoria que permanece en una curva cerrada se conoce como **trayectoria cerrada**. Una trayectoria es **periódica** si es no constante y $x(t+T) = x(t)$, $y(t+T) = y(t)$ para cierto $T > 0$ y para $t \geq t_0$.

En los sistemas en dos dimensiones puede ocurrir que una trayectoria no converja a un punto crítico sino a una trayectoria cerrada, *enrollándose*.

Teorema 4 (Poincaré-Bendixon). *Si una trayectoria permanece en una región acotada en la que no hay puntos críticos, ha de converger a una trayectoria periódica límite.*

Teorema 5. *Toda trayectoria cerrada encierra un punto crítico.*

Teorema 6. *Si en una región se tiene $\text{div}(F) \neq 0$, entonces el sistema no tiene trayectorias cerradas en esa región.*

Definición 10. Una función $E : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, no constante, es una **integral primera** del sistema $(x, y)' = F(x, y)$ si $E(x(t), y(t))$ es constante, es decir, si $\frac{d}{dt}E(x, y) = E_x f + E_y g = 0$, a lo largo de las trayectorias.

Es decir, las trayectorias deben estar en los conjuntos de nivel de E . Una generalización de esto son las funciones de Liapunov, que representan disipación de energía en lugar de conservación:

Definición 11. Dada $E(t) = E(x(t), y(t))$ para $E : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, y $E'(t) \leq 0$, entonces se dice que E es una **función de Liapunov**.

3.2. Modelo de Lotka-Volterra

El modelo canónico en dos dimensiones es el de Lotka-Volterra. Se tiene una población de presas, $x(t)$, y otra de predadores, $y(t)$. Las presas tienden a aumentar con tasa de cambio $a > 0$ pero disminuyen en proporción $b > 0$ con sus encuentros con predadores. Los predadores tienden a disminuir con tasa de cambio $c > 0$, pero crecen en proporción $d > 0$ con sus encuentros con presas. Es decir:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}.$$

Los puntos críticos de este sistema son $(0, 0)$ y $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. De la linealización sigue que el origen es un punto de silla (se obtienen autovalores a y $-c$ en las direcciones de los ejes), y el otro punto crítico es un centro, al ser la matriz: $\begin{pmatrix} 0 & -bc \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$. De este centro no se puede conocer el comportamiento exacto en el no lineal, solo que será centro o espiral.

Intentamos, por tanto, resolver la ecuación de trayectorias: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-(c+dx)y}{(a-by)x}$. Esto es, $\frac{(a-by)\partial y}{y} = \frac{-(c+dx)\partial x}{x}$. Se obtiene entonces $a \log(\frac{y}{y_0}) - b(y - y_0) = -c \log(\frac{x}{x_0}) + d(x - x_0)$, es decir, $y^a e^{-by} y_0^{-a} e^{by_0} = x_0^c x^{-c} e^{dx} e^{-dx_0}$.

Con esto, pueden pasarse todos los términos constantes a un lado, y queda entonces $E(x, y) := \frac{y^a x^c}{e^{by} e^{dx}} = K$, o lo que es lo mismo, la E es una integral primera del sistema y las trayectorias son sus curvas de nivel. Además, se descompone como un producto $E(x, y) = f_1(y)f_2(x)$, siendo $f_1(y) = \frac{y^a}{e^{by}}$, $f_2(x) = \frac{x^c}{e^{dx}}$. Estas funciones tienen un máximo en $y = \frac{c}{d}$ y $x = \frac{a}{b}$, respectivamente, que denotamos M_y y M_x . luego $E(x, y)$ tiene un máximo en el punto crítico, $M_x M_y$.

Si ahora estudiamos $E(x, y) = K$, la ecuación de las trayectorias, observamos que si $K > M_x M_y$ no hay solución, si $K = M_x M_y$ se trata del punto crítico, y falta por analizar el caso más complicado,

$K < M_x M_y$. Escribimos $K = \lambda M_y$, con $\lambda \in (0, M_x)$. La ecuación $f_2(x) = \lambda$ tiene exactamente dos soluciones, x_m y x_M , dado que el único máximo de f_2 es M_x . Estos valores cumplen $x_m < \frac{c}{d} < x_M$. Para $x \in (x_m, x_M)$, se tiene que $f_2(x) > \lambda$, por lo que $1 > \frac{\lambda}{f_2(x)}$. De este modo, la ecuación de interés, $f_1(y) = \frac{\lambda}{f_2(x)} M_y$, verifica:

- No tiene soluciones fuera de (x_m, x_M) , porque se tendría $f_1(y) \geq M_y$ dado que $1 \leq \frac{\lambda}{f_2(x)}$.
- Si estamos justo en x_m o x_M , la ecuación se convierte en $f_1(y) = M_y$ luego solo tiene un posible valor de y , $y = \frac{c}{d}$.
- Si $x \in (x_m, x_M)$, entonces se tienen dos soluciones $y_1(x) < \frac{c}{d} < y_2(x)$.

De este análisis se sigue que las trayectorias de interés son cerradas (porque cada x tiene 2 valores de y posibles salvo en el extremo que tiene una), así que podemos concluir que el punto crítico es un centro. Si repetimos el argumento pero con $K = \lambda M_x$, llegamos al mismo comportamiento en las y , es decir, para cada y hay 2 valores de x o bien 1 en los extremos. Por tanto, las trayectorias definen regiones **convexas**.

3.3. Modelos epidemiológicos

3.3.1. El modelo SR

En este modelo, los infectados mueren con una probabilidad $p(t)$ y la probabilidad de infectarse es $q(t)$. Estos dos los asumiremos constantes. También se tiene $m(t)$ una probabilidad de muerte por causas naturales. Tenemos $S(t)$ los susceptibles y $R(t)$ los inmunes. Si $P(t)$ es la población total, se tiene $P(t) = S(t) + R(t)$.

$$\begin{cases} S'(t) = -qS - m(t)S \\ R'(t) = q(1-p)S - m(t)R \end{cases} .$$

El término $q(1-p)S$ de los retirados/inmunes representa que hay probabilidad q de que los S se infecten, y estos con probabilidad $(1-p)$ no mueren y se recuperan. La sencillez de este modelo permite denotar $x = \frac{S}{P}$, y entonces se tiene que:

$$x' = -qx + pqx^2. \quad (8)$$

Véase que $m(t)$ ha desaparecido de la ecuación. Esto se consigue sumando las 2 ecuaciones para obtener que $P' = -pqS - m(t)P$, y luego sustituir $m(t) = -q - \frac{S'}{S}$. Esta ecuación es de Bernoulli y puede resolverse con $x = \frac{1}{z}$, que da lugar a $z' = qz - pq$. Finalmente se tiene:

$$x(t) = \frac{1}{e^{qt}(1-p) + p}. \quad (9)$$

Es decir, a la larga todos se infectan porque $x(t) \rightarrow 0$. Ahora supongamos que P_* es otra versión de la población en la que $P_*' = -m(t)P_*$, es decir, se han vacunado y solo mueren con causas naturales $m(t)$. Vamos a ver como se compara con P , es decir, estudiamos $w(t) = \frac{P}{P_*}$. Para ello, usamos que $-\frac{P'}{P} - pq\frac{S}{P} = m = \frac{-P_*'}{P_*}$. Esto equivale a $-\frac{PP_*'}{P_*^2} + \frac{P'}{P_*} = -pq\frac{S}{P_*}$, se obtiene finalmente que $w' = -pqxw$. Es decir, $w' = -pq\frac{e^{-qt}}{(1-p)+pe^{-qt}}w$.

De aquí sigue que $\frac{w'}{w} = -\frac{((1-p)+pe^{-qt})'}{(1-p)+pe^{-qt}}$, de tal modo que $w(t) = (1-p) + pe^{-qt}$, imponiendo que $w(0) = 1$. Es decir, tiende a $(1-p)$ luego a la larga P_* es mayor que P .

3.3.2. El modelo SIR

Ahora se añade una nueva clase, I , que son los infectados. La población total es N , luego se tiene $N = S + I + R$. La cantidad de susceptibles que pasan a infectados es proporcional al número de encuentros, con una tasa de infección r . Se tiene una tasa de curación/retiro γ asimismo.

$$\begin{cases} S' = -rSI \\ I' = rSI - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases} .$$

Podemos resolver las trayectorias $\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma}{rS}$, luego $I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \log(\frac{S}{S_0})$, donde S_0 e I_0 son los valores iniciales, y $\rho = \frac{\gamma}{r}$. Representando estas trayectorias se ve que se tienden a un crítico $(S_\infty, 0)$ de modo que no toda la población desaparece. Asimismo, si $S < \rho$, los infectados decrecen con el tiempo, y si $S > \rho$, crecen.

Si en $I' = rSI - \gamma I$ introducimos $S = \rho$ se obtiene que $I' = I(r\rho - \gamma) = 0$, de tal modo que el número de infectados tiene un máximo en ese punto. Ese máximo puede obtenerse introduciéndolo en las trayectorias: $I_m = I_0 + (S_0 - \rho) + \rho \log(\rho S_0^{-1})$.

Teorema 7. Sea $S_0 = \rho + \nu$ con $\nu > 0$ y $\frac{\nu}{\rho} \ll 1$. Sea $I_0 \ll 1$. Entonces el número de infectados final, aproximadamente, es 2ν .

Demostración. Tomando límite con $t \rightarrow \infty$ en la ecuación de las trayectorias, se tiene que $0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \log(\frac{S_\infty}{S_0})$. Como $I_0 \ll 1$ lo eliminamos de la ecuación, luego $0 = S_0 - S_\infty + \rho \log(\frac{S_\infty}{S_0}) = S_0 - S_\infty + \rho \log(1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0})$. Ahora, como había pocos infectados iniciales, se va a tener que $S_0 - S_\infty$ es mucho menor que S_0 , luego podemos usar la aproximación de Taylor: $\log(1 - x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ con $x = \frac{S_0 - S_\infty}{S_0}$. Así, resulta que $0 = (S_0 - S_\infty)(1 - \frac{\rho}{S_0} - \frac{\rho}{2S_0^2}(S_0 - S_\infty))$ tras desarrollar. Como $S_0 \neq S_\infty$, igualamos a 0 la segunda parte para obtener que $S_0 - S_\infty = \frac{2S_0^2}{\rho}(\frac{S_0 - \rho}{S_0}) = 2\frac{S_0}{\rho}\nu \approx 2\nu$

4. Cálculo de Variaciones

El cálculo de variaciones se origina para responder a la pregunta de qué camino minimiza el tiempo de viaje entre dos puntos A y B en un plano vertical. La longitud de una curva entre $A = (a, y_a)$ y $B = (b, y_b)$, es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

y el tiempo en recorrerla:

$$T = \int_0^T dt = \int_A^B \frac{dt}{ds} ds = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} dx.$$

La fuerza que actúa es la gravedad, $F = -gm(0, 1) = -\nabla(mgy)$. Por lo tanto, como la energía se conserva: $mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_a$ (suponemos velocidad inicial nula). Así, sigue que $v = \sqrt{2g(y_a - y)}$. Es decir:

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}} dx,$$

y el objetivo es encontrar $y(x)$ que minimiza esta expresión, y verifica $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

En general, el cálculo de variaciones trata de minimizar integrales funcionales. Supongamos que f , la densidad, depende de x, y, y' . El problema consta de tres partes:

1. $J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$, el funcional a minimizar. Normalmente se denomina **lagrangiano** y se denota con L .
2. Las condiciones de frontera, $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.
3. El espacio de funciones a considerar (por ejemplo $\mathcal{C}^1([a, b])$).

Nos centramos en *mínimos locales* del funcional en el espacio en cuestión, pero, para ello, debemos definir una métrica en el espacio de funciones, que nos permita hablar de extremos locales. Además, en espacios de funciones, no todas las normas son equivalentes como en \mathbb{R}^n , así que es importante la elección.

Consideramos $h = \epsilon\eta$ para una función η fija con $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Ponemos entonces la función $y = \tilde{y} + h$, y se tiene entonces que y es una **variación** de \tilde{y} , dado que sigue teniendo los mismos extremos. Esto da lugar a una función $J(x) = J[\tilde{y} + x\eta]$, que obtiene el valor del funcional en las variaciones de \tilde{y} en dirección de η . Sea $\Delta J = J(\epsilon) - J(0)$ la **variación total**. Se tiene:

$$J(\epsilon) = J(0) + \epsilon\delta J + \frac{\epsilon^2}{2}\delta^2 J + O(\epsilon^3) \quad (10)$$

donde $\delta J = \frac{dJ}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}$ se denomina **primera variación**, y $\delta^2 J = \frac{d^2 J}{d\epsilon^2}|_{\epsilon=0}$ se denomina **segunda variación**.

Suponiendo suficiente regularidad, $\frac{dJ}{d\epsilon}(\epsilon) = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} f(x, \tilde{y} + \epsilon\eta, \tilde{y}' + \epsilon\eta') dx = \int_a^b [f_y(x, \tilde{y} + \epsilon\eta, \tilde{y}' + \epsilon\eta')\eta + \eta' f_{y'}(x, \tilde{y} + \epsilon\eta, \tilde{y}' + \epsilon\eta')] dx$. Evaluando $\epsilon = 0$:

$$\delta J = \int_a^b f_y(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta + \eta' f_{y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx \quad (11)$$

y análogamente:

$$\delta^2 J = \int_a^b (f_{yy}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta^2 + 2\eta\eta' f_{yy'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') + f_{y'y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta'^2) dx. \quad (12)$$

Proposición 5. Una condición necesaria para que J tenga un extremo local en \tilde{y} , que sigue de la expansión de Taylor, es que $\delta J = 0$.

Integrando por partes: $\int_a^b \eta' f_{y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = \eta f_{y'}|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx}(f_{y'}) dx$, así que debe cumplirse:

$$\delta J = \epsilon \int_a^b \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) dx = 0. \quad (13)$$

Para obtener el resultado final, necesitamos el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones:

Lema 1. Si $M, \eta \in C[a, b]$, y $\eta(a) = \eta(b) = 0$, y se tiene que $\int_a^b M \eta dx$ para todo $\eta \in C^1[a, b]$, entonces sigue que $M(x) = 0$ en $[a, b]$.

Si M es estrictamente positiva (sin perder generalidad) en un valor $x_0 \in (a, b)$, por continuidad se tiene que es positiva en (x_1, x_2) un entorno. Se escoge entonces $\eta = (x - x_1)^2(x - x_2)^2 \chi_{[x_1, x_2]}$, y entonces sucede que $\int_a^b \eta M dx = \int_{x_1}^{x_2} M(x)(x - x_1)^2(x - x_2)^2 > 0$, que es una contradicción. \square

Luego, una función extremal del funcional cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad (14)$$

que se conoce como **ecuación de Euler-Lagrange**. Si se aplica la regla de la cadena para hacer la derivada respecto a x , sigue:

$$0 = f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y} - y'' f_{y'y'}. \quad (15)$$

Se observa que si f no depende de x , se reduce a $f_y - f_{y'y'} - f_{y'y'} y'' = 0$, lo que lleva a:

Proposición 6. Si el lagrangiano es autónomo, es decir, f solo depende de y e y' , entonces, si y resuelve Euler-Lagrange, se tiene que $f - y' f_{y'}$ es constante.

Demostración: $\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) = f_y y' + f_{y'} y'' - (y'' f_{y'} + y' f_{y'y} y' + y' f_{y'y'} y'') = y'(f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'') = 0$, por la observación previa. \square

Observación 3. En caso de tener que minimizar un funcional $J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$ ligado a la restricción $\int_a^b g(x, y, y') dx = K$ para $K \in \mathbb{R}$ fijo, existe el método de multiplicadores de Lagrange que permite hacerlo simplemente aplicando Euler-Lagrange al lagrangiano $f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')$.

5. Mecánica

5.1. Mecánica lagrangiana

La mecánica lagrangiana comienza estudiando la evolución de la posición de una partícula, $q(t) = (q_1, q_2, q_3)$. Sobre ella actúa una fuerza conservativa (derivada de un potencial V).

Teorema 8 (Mínima acción de Hamilton). *Una partícula sometida a una fuerza conservativa $F = -\nabla V$ que en t_1 está en P y en t_2 está en Q , recorre la trayectoria que hace estacionaria la acción definida por:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, q') dt,$$

donde el lagrangiano $L = T - V$ es la energía mecánica (potencial más cinética). Aquí, $T = \frac{1}{2}m(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2)$.

Por ello, necesitamos ahora un método para minimizar un funcional $J(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) dx$ con varias funciones $y_j \in C^2(\mathbb{R})$. Las condiciones de contorno son $y_i(a) = y_{ia}$, $y_i(b) = y_{ib}$. Para resolver el problema, definimos variaciones $h_i = \epsilon \varphi_i$, con $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$, y derivamos:

$$\delta J(y, \varphi) = \int_a^b \sum_{i=1}^n (f_{y_i} \varphi_i + f_{\dot{y}_i} \dot{\varphi}_i)$$

y después, como en el caso de una función, integramos por partes:

$$\delta J(y, \varphi_i) = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_{y_i} - \frac{d}{dx}(f_{\dot{y}_i})) \varphi_i dx$$

usamos el lema fundamental del cálculo de variaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0$$

se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange aplicada a todos los y_i por separado.

Observación 4. Si el lagrangiano es autónomo, es decir, no depende de x , entonces $L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ es constante a lo largo de las funciones que minimizan el funcional. Esto es similar a lo que ocurría con una función, y se demuestra derivando la expresión respecto a x y viendo que se obtiene 0.

En el caso en el que $L = T - V$ es la energía mecánica (potencial más cinética), con $T = \frac{1}{2}m(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2)$, se obtiene que $L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{q}_i^2 - V(q) - \sum_i m \dot{q}_i^2 = -V(q) - \frac{1}{2}m \sum_i \dot{q}_i^2$. Es decir:

Proposición 7. *Los minimizadores de un lagrangiano $L = T - V$ donde T es la energía cinética conservan $E = T + V$, la suma de energía cinética y potencial.*

Demostración. Se ha visto antes que conserva $-T - V$, así que conserva $T + V$. □

Definición 12. Se dice que una coordenada q_i es **cíclica** si L no depende de q_i . Asimismo, se define $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ el **momento generalizado**.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, si q_j es cíclica, entonces $\frac{d}{dt} p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, luego se conserva el momento generalizado.

Teorema 9 (Noether). *Supongamos que las coordenadas generalizadas q_i dependen de otro parámetro además del tiempo, es decir, $q_i = q_i(t, h)$, de manera que $L(q_i(t, h)) = L(q_i(t, 0))$ para todo h , es decir, el Lagrangiano no varía con el nuevo parámetro. Entonces, la cantidad:*

$$l_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}$$

*conocida como **momento noetheriano**, se conserva en el tiempo para todo h . Es decir, fijado el h , l_h es constante en el tiempo.*

Demostración. Como el lagrangiano es constante en h , sigue que $\frac{\partial}{\partial h} L(t, h) = 0$. Por la regla de la cadena, entonces, $0 = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial h} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial h} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial h} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \right)$. \square

Por ejemplo, si el lagrangiano solo depende de la distancia relativa de las partículas, como por ejemplo $L = \frac{1}{2} \sum_i (m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{j>i} V(\|(x_i, y_i, z_i) - (x_j, y_j, z_j)\|))$, entonces es invariante a traslaciones: $L(q, \dot{q}) = L(q + h, \dot{q} + h)$, luego la cantidad $\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = \sum_{i=1}^n m_i q_i$ se conserva. Esto se conoce como momento lineal.

6. Modelos discretos unidimensionales no lineales

El objetivo de los modelos discretos es estudiar cantidades $x(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ que cambian en cada paso con respecto al anterior: $x(n+1) = f(x(n))$.

Por ejemplo, se tiene el modelo discreto de Malthus: $x(n+1) = kx(n)$, de tal modo que $x(n) = k^n x(0)$, así que la bifurcación es clara: si $k > 1$ la población tiende a ∞ y si $k < 1$ se extingue.

Observación 5 (Dinámica de un préstamo). El modelo para un préstamo en el que la población es $x(n)$ la deuda pendiente, está dado por el tipo de interés $k > 1$ y la cuota de préstamo R . Así: $x(n+1) = kx(n) - R$, luego $x(n) = k^n x(0) - R \sum_{j=0}^{n-1} k^j$. De este modo, si queremos que la deuda acabe en N meses, la R debe ser tal que:

$$0 = x(N) = k^N x(0) - R \frac{1 - k^N}{1 - k}.$$

Despejando, se obtiene que $R = \frac{x(0)(k^N - k^{N+1})}{1 - k^N} = \frac{x(0)(k-1)}{(1-k^{-N})}$.

Definición 13. Denotamos f^n a la composición n veces de f consigo misma. El conjunto $\gamma(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se denomina **órbita** de x_0 y x_0 se denomina su **semilla**.

Los **puntos fijos** son aquellos tales que $f(x_0) = x_0$, por lo tanto, sus órbitas son constantes.

Una semilla es **n -periódica** si $f^n(x_0) = x_0$ y $f^k(x_0) \neq x_0$ para $k < n$. Por tanto, la órbita tiene tamaño n .

Definición 14. Un punto fijo x es **atractor** si existe un entorno U de x tal que si $y \in U$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$. Del mismo modo, es **repulsor** si existe un entorno U tal que si $y \in U$ hay un n_0 tal que si $n > n_0$, $f^n(y) \notin U \setminus \{x\}$.

Teorema 10. Sea x_0 un punto fijo del modelo $x(n+1) = f(x(n))$. Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es atractor. Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces es repulsor.

Demostración. Se comienza por el caso atractor. Por continuidad de f' hay un entorno U donde $\max |f'| = \nu < 1$. Por el teorema de valor medio, entonces, $|f(x) - f(x')| \leq \nu|x - x'|$, y en particular $|f(x) - x_0| \leq \nu|x - x_0|$ para los $x \in U$, luego se tiene además $f(x) \in U$. Así, puede aplicarse sucesivas veces el resultado para obtener $|f^n(x) - x_0| = |f^n(x) - f(x_0)| \leq \nu|f^{n-1}(x) - x_0| \leq \dots \leq \nu^n|x - x_0| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Para el caso repulsor, se tiene un $\nu < 1$ tal que $|f'(x_0)| > \frac{1}{\nu}$, y sea U el entorno de x_0 con $\min |f'| = \frac{1}{\nu} > 1$. Así, la condición de Lipschitz es ahora $|f(x) - f(x_0)| \geq \frac{1}{\nu}|x - x_0|$. Supongamos ahora que dado $x \in U$ existiera una sucesión $f^{n_k}(x) \in U$. Entonces $|x - x_0| \geq \frac{1}{\nu}|f(x) - x_0| \geq \frac{1}{\nu^2}|f^2(x) - x_0| \geq \dots$. Es decir, en general $|x - x_0| \geq \frac{1}{\nu^{n_k}}|f^{n_k}(x) - x_0|$. Esto no es posible para n_k suficientemente grande porque el término izquierdo es constante y el derecho se haría arbitrariamente grande. Se sigue por tanto que a partir de cierto índice n_0 la sucesión ha de abandonar U y no regresar. \square

Como en los sistemas continuos, conviene estudiar cómo cambia el comportamiento dependiendo de un parámetro λ , es decir, $x(n+1) = f(\lambda, x(n)) := f_\lambda(x(n))$.

Teorema 11. Sea \bar{x}_λ un punto fijo de f_λ , con $|f'_\lambda(\bar{x}_\lambda)| \neq 1$. Entonces se tienen intervalos $I = I(\bar{x}_\lambda)$, $J = J(\lambda)$ y una función regular $p : J \mapsto I$ tal que $p(\lambda) = \bar{x}_\lambda$ de tal manera que se tiene $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. Es decir, en un entorno el punto fijo depende de manera regular del parámetro.

Demostración. Se aplica el teorema de la función implícita a $G(\lambda, x) = f_\lambda(x) - x$, pues $G(\lambda, \bar{x}_\lambda) = 0$ y $G_x = f'_\lambda - 1 \neq 0$. \square

Además, se tiene que el punto, en esos entornos, mantiene su carácter de atractor o repulsor, estudiando de nuevo la derivada de f_λ en $p(\lambda)$ con el teorema de la función implícita. En caso de que $|f'_\lambda(\bar{x}_\lambda)| = 1$, pueden pasar distintas cosas como que cambie el carácter del punto crítico, aparezcan nuevos puntos críticos o aparezcan órbitas periódicas.

Definición 15. Dado x_0 y f , se dice que hay **dependencia sensible de los datos iniciales** si hay un d tal que $\forall \delta > 0$, se tiene que si $|x - x_0| < \delta$, entonces hay infinitos n con $|f^n(x) - f^n(x_0)| \geq d$.

Es decir, que aunque el valor inicial comience muy cerca de x_0 , el comportamiento acaba siendo distinto.

Teorema 12 (Li-Yorke). *Toda función continua con un periodo de orden 3 implica que existen órbitas periódicas de cualquier orden, y un conjunto J no numerable de órbitas caóticas (acotadas, no periódicas y con dependencia sensible de los datos iniciales).*

7. Sistemas dinámicos lineales discretos

Definición 16. La función $x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^k$ que cumple $x_{n+1} = Ax_n$ se dice que sigue un sistema discreto con matriz de transición A .

Como la evolución del sistema respecto a x_0 es $x_n = A^n x_0$, el estudio de los autovalores de A aporta gran información acerca de la misma. Supongamos que $k = 2$ y A diagonaliza en la base $\{u_1, u_2\}$ con autovalores $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Escribimos $x_0 = cu_1 + cu_2$, y entonces $x_n = c_1 \lambda_1^n u_1 + c_2 \lambda_2^n u_2 = \lambda_1^n (c_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} u_2) \rightarrow \lambda_1^n c_1 u_1$ si $n \rightarrow \infty$.