Teoría de la Integral y la Medida

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Enero de 2021

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Revisado en 2022
Apuntes de la asignatura impartida por Dmitry Yakubovich
en la Universidad Autónoma de Madrid en Enero de 2021.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Teoría de la Integral y la Medida del grado en matemáticas, tomados en Enero de 2021 por Miguel González. La asignatura fue impartida por Dmitry Yakubovich. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Teoría de la Integral y la Medida

En esta asignatura se desarrollan las bases de la teoría de la medida y se define la integral de Lebesgue, motivada como una extensión de la integral de Riemann que presenta mejores propiedades, además de poder definirse en *espacios de medida* abstractos, no necesariamente euclídeos.

Se presentan los teoremas de convergencia monótona y convergencia dominada, dos de los principales resultados de la integral de Lebesgue. Así mismo, se tratan las medidas de Lebesgue-Stieltjes y la derivada de Radon-Nikodym.

Requisitos previos

1. Conocimientos de cálculo/análisis matemático.

Índice

1. Introducción

1.1. La integral de Riemann

Comenzaremos con un recordatorio sobre la definición *clásica* de integral (la de Riemann). Recordemos que se define mediante particiones.

Definición 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Damos una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ y asociamos las sumas inferior y superior de Riemann:

$$U_f(\mathcal{P}) = \sum_j s_j(x_j - x_{j-1}),$$

$$L_f(\mathcal{P}) = \sum_j i_j(x_j - x_{j-1}).$$

Con $s_j = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$, y además $i_j = \inf\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$.

Entonces f es **integrable Riemann** en $[a, b]$ si $\inf\limits_{\mathcal{P}} U_f(\mathcal{P}) = \sup\limits_{\mathcal{P}} L_f(\mathcal{P})$, y ese valor se denomina **integral**.

Observación 1. Si f es integrable Riemann en $[a, b]$, entonces ha de ser acotada. Asimismo, si es continua (salvo en una cantidad finita de puntos), es integrable.

La justificación de que tenga que ser acotada es porque en caso contrario se pueden obtener sumas inferiores tan grandes como se quiera (suponiendo que no es acotada por arriba) o sumas superiores tan negativamente grandes como se quiera (si no lo es por abajo), y por tanto no existiría el ínfimo/supremo correspondiente. Asimismo, la justificación en el caso de las continuas es que, para una partición adecuada de norma los suficientemente pequeña $U_f(\mathcal{P}) - L_f(\mathcal{P}) = \sum_j(s_j - i_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_j \frac{\epsilon}{b-a}(x_j - x_{j-1}) = \epsilon$, por lo que $U_f(\mathcal{P}) \leq L_f(\mathcal{P}) + \epsilon$. Si denominamos U y L al ínfimo/supremo correspondiente, sigue entonces que $U \leq L + \epsilon$, y como ϵ es arbitrario, se tiene que $U \leq L$ y por tanto $U = L$ (siempre se da que $U \geq L$). En caso de que haya una cantidad finita de puntos sin continuidad, basta con aislarlos, cada uno en un intervalo de la partición lo suficientemente pequeño para contrarrestar su efecto.

1.2. Motivación de la medida y la integral de Lebesgue

La integral de Riemann se queda insuficiente en algunos escenarios. Por ejemplo, Joseph Fourier en 1822, resolviendo la ecuación de calor, encontró un escenario en el que necesitaba lo siguiente:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Las condiciones bajo las que eso es posible no son tan satisfactorias para la integral de Riemann como lo son para la integral que desarrolló Henri Lebesgue a principios del siglo XX, la conocida como integral de Lebesgue. A continuación vemos la idea principal.

Sea f una función acotada en $[a, b]$, es decir $M < f(x) < N$ $\forall x \in [a, b]$. Entonces es posible aproximar f a través de unas ciertas *funciones simples*, de las que definiremos su integral, y a través de ellas se obtendrá la de f. En parte es lo que se hace con la integral de Riemann mediante funciones constantes a trozos, pero en este caso serán algo más complicadas. Damos una partición de $[M, N]$, $\mathcal{P} = \{y_0 = N < y_1 < \ldots < y_n = M\}$. Obsérvese que la partición se realiza en los valores de la imagen de f. Ponemos $A_j = \{x \in [a, b] : y_{j-1} < f(x) < y_j\}$. Ahora, si ponemos en $[a, b]$ la función $\varphi_{\mathcal{P}}(x) = y_{j-1}$

para $x \in A_j$, entonces $\sup |f(x) - \varphi_{\mathcal{P}}(x)| \leq \|\mathcal{P}\|$ por como se ha construido (dado que si $x \in A_j$, se tiene $f(x) - \varphi_{\mathcal{P}}(x) \leq y_j - y_{j-1} \leq \|\mathcal{P}\|$).

Por tanto, si tomamos particiones $\mathcal{P}_k$ cuya norma tienda a 0 ($\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_k\|) = 0$, se tiene uniformemente que $\varphi_{\mathcal{P}_k}(f) \to f$ en $[a, b]$, y por tanto la idea es que si logramos integrar las φ, estas integrales deberán converger a un valor que podremos definir como la integral de f. Ahora ya solo basta con establecer una integral para estas funciones simples:

$$\int_a^b \varphi_{\mathcal{P}_k} = \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \cdot m(A_j).$$

Siendo $m(A_j)$ alguna *medida* de esos conjuntos (análogo a como en la integral de Riemann se tomaba la longitud del intervalo. Obsérvese que la complejidad de la integral de Lebesgue radica en los conjuntos sobre los que se integra la función simple). El problema de la teoría de la medida será establecer cómo medir esos conjuntos, y determinar qué conjuntos son tan patológicos como para no poder ser medidos. De esta manera se conseguirá tener esta integral de Lebesgue, más versátil que la de Riemann siempre que los conjuntos A_j se puedan medir.

Definición 2. En caso de que todos los A_j obtenidos como anteriormente para una función f se puedan medir mediante cierta medida μ, se dice que f es **medible**. La palabra **integrable** se reserva a que $\int_X |f| d\mu < \infty$, con la noción vista anteriormente. Para la integral de Lebesgue se toma como μ la conocida como **medida de lebesgue** en $\mathbb{R}$, y extiende correctamente la de Riemann.

Las ventajas que tendrá la integral de Lebesgue son, principalmente:

1. El límite puntual de funciones medibles siempre va a ser medible. Esto no ocurre siempre con la de Riemann. Por ejemplo, las funciones $f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \cos(k! x\pi)^{2n}$ son integrables Riemann (valen 0 salvo en una cantidad finita de racionales cuyo denominador divide a $k!$), pero $\lim_{k\to\infty} f_k = \chi_{\mathbb{Q}}$ no es integrable Riemann. Sí que será integrable Lebesgue, porque de hecho es simple (solo toma 2 valores), luego su integral es $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Veremos más adelante cómo se define la medida de Lebesgue, pero para conjuntos numerables será cero siempre.

2. Existen simples y poderosos teoremas de intercambio de límite e integral para la noción de Lebesgue. Por ejemplo, el **teorema de convergencia monótona**, que afirma que $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu$ si las f_n son integrables y monótonas ($f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ en cada punto x), o el **teorema de convergencia dominada**, que indica que si $f_n \to f$ y $|f_n(x)| \leq g(x)$, con g integrable Lebesgue, entonces se puede intercambiar el límite y la integral.

3. Es conocido que si f es continua en $[a, b]$, entonces $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$, mediante la teoría de Riemann. Con la teoría de Lebesgue, las funciones medibles no continuas **también** van a verificar eso, salvo en un conjunto de medida cero.

2. σ-álgebras y medidas

El objetivo es, como hemos discutido en la sección anterior, construir una teoría de medida de conjuntos. El problema es que no todos los conjuntos van a ser medibles. Para ello, definimos el concepto de σ-álgebra, que es una familia de conjuntos con buenas propiedades (cierre a unión y complemento), sobre la cual podremos definir medidas sin grandes problemas.

Definición 3. Sea X un conjunto. Se define $\mathcal{P}(X) = \{B : B \subset X\}$ el conjunto de **partes de X**. Entonces, se dice que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$) es una **$\sigma$-álgebra** si verifica:

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. $B \in \mathcal{A} \implies X \backslash B \in \mathcal{A}$.
3. Si $\{A_n\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ es una familia numerable, entonces $\bigcup_1^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Observación 2 (Algunas propiedades de σ-álgebras). Se tienen las propiedades:

1. Una σ-álgebra es siempre cerrada por intersecciones numerables, puesto que $\bigcap A_i = (\bigcup A_i^c)^c$.
2. Asimismo una σ-álgebra es cerrada por diferencias, puesto que $A \backslash B = A \cap B^c$.
3. La condición de que $X \in \mathcal{A}$ equivale a decir que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, puesto que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup A^c = X \in \mathcal{A}$.
4. Si solo se pide que $\mathcal{A}$ sea cerrada por uniones finitas, entonces se dice que es un **álgebra**.
5. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ siempre es una σ-álgebra de X.

Proposición 1. *Sea X un conjunto y $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una colección de σ-álgebras en X. Entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es una σ-álgebra de X.*

Definición 4. Sea $B \subset \mathcal{P}(X)$. Se define la σ-álgebra **generada** por B, $\mathcal{A}(B)$, es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a B. Es decir, es la menor de las σ-álgebras que contienen a B.

Definición 5. En $\mathbb{R}$ se define **la σ-álgebra de Borel** como la generada por los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. En general, la misma definición se aplica a cualquier espacio topológico.

Por ejemplo, el intervalo $(1, 2)$ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ (puesto que directamente es abierto), así como $[1, 2]$, porque es el complemento de dos abiertos. También, por ejemplo el $(1, 2]$, porque es $(1, 3) \cap [1, 2]$ por ejemplo. También es de Borel el conjunto $\mathbb{Q}$, al ser unión numerable de cerrados (puntos), y en general todo conjunto numerable.

Definición 6. Dada $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X, decimos que el par $(X, \mathcal{A})$ es un **espacio medible**.

A partir de esta base, definimos el concepto de medida:

Definición 7. Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X, se dice que la función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una **medida sobre** $\mathcal{A}$ si verifica:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $\{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ es una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos ($A_j \cap A_i = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces $\mu(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu(A_j)$.

Definición 8. Dado un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y una medida μ en ese espacio, se dice que la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un **espacio de medida**.

Veremos que en general es posible definir múltiples medidas distintas en un espacio dado de medida.

Definición 9. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se dice que la función $f : X \to \mathbb{R}$ es **medible** si para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A}$.

Proposición 2. *Equivalen las siguientes afirmaciones:*

1. *f es medible.*
2. *En todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{A}$.*
3. *En todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A}$.*
4. *En todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{A}$.*
5. *En todos $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Cualquiera de esos intervalos puede expresarse como unión/intersección numerable de intervalos de la forma (a, ∞) y sus complementos. Como f^{-1} preserva esas operaciones y $\mathcal{A}$ es cerrado por ellas, sigue la proposición. (Por ejemplo, $[a, \infty) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a - \frac{1}{i}, \infty)$). $\square$

Observación 3 (Algunos ejemplos de medidas). Algunos ejemplos de medidas son:

1. En $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, fijamos $x_0 \in \mathbb{R}$. Podemos definir la *delta de dirac*:

$$\delta_{x_0}(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_0 \in B \\ 0 \text{ si } x_0 \notin B \end{cases}$$

2. En $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, ponemos $\mu(B) = \begin{cases} card(B) \text{ si } B \text{ finito} \\ \infty \text{ si no} \end{cases}$

3. En $\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ se tiene $\mu(B) = \sum_{n \in B} \frac{1}{1+\sqrt{|n|}}$.

Definición 10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que μ es una **medida finita** si $\mu(X) < \infty$.

Definición 11. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que μ es **σ-finita** si existe un recubrimiento de X numerable, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, y $\mu(X_n) < \infty$ para todos los $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 3. *Dados $f, g : X \to \mathbb{R}$ medibles, se tiene que* $\text{máx}(f, g)$, $\text{mín}(f, g)$ *son asimismo medibles.*

Demostración. Consideremos $C_a = \{x \in \mathbb{R} : \text{mín}(f(x), g(x)) > a\}$. Queremos comprobar que C_a es medible. Observemos que $C_a = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) > a\}$, que es intersección de dos conjuntos medibles, luego es medible. Análogo para el máximo. $\square$

Proposición 4. *El ínfimo y el supremo de una familia numerable de funciones medibles es medible.*

Demostración. Tomamos la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $f_n : X \to \mathbb{R}$, medibles. Consideramos la función $\sup f_n$. Veamos que $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}\{f_n > a\}$, que es unión numerable de conjuntos medibles. Análogo para el ínfimo. $\square$

Proposición 5. *Dada $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ familia numerable de funciones medibles, entonces* $\limsup f_n = \text{ínf}_m \sup_{n \geq m} f_n$ *y* $\liminf f_n = \sup_m \text{ínf}_{n \geq m} f_n$ *son medibles.*

Demostración. Ya sabemos de la proposición previa que supremo e ínfimo no alteran la medibilidad, luego se tiene lo que se quería. $\square$

Proposición 6. *Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ medibles, su suma $f + g$ también es medible.*

Demostración. Consideramos $C_a = \{f + g > a\}$. Veamos que esto puede escribirse como $C_a = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{f > q\} \cap \{g > a - q\}$. En efecto, si $x \in C_a$, es porque $f(x) + g(x) > a$, luego $f(x) > a - g(x)$. Sea $q \in (a - g(x), f(x)) \cap \mathbb{Q}$. Se verifica por definición que $f(x) > q$ y que $q > a - g(x)$, luego $g(x) > a - q$. Asimismo, si $x \in \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{f > q\} \cap \{g > a - q\}$, hay un q_0 tal que $f(x) > q_0$ y $g(x) > a - q_0$, luego $f(x) + g(x) > q_0 + a - q_0 = a$. Entonces, como C_a es union numerable de conjuntos medibles (al ser f, g medibles y $\mathbb{Q}$ numerable), sigue que C_a es medible y por tanto $f + g$ también. □

Proposición 7. *Dado $f : X \to \mathbb{R}$ medible, y $G \subset \mathbb{R}$ abierto, entonces $f^{-1}(G)$ es medible.*

Demostración. Es un resultado conocido (*Lindelöf*) que todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos. Por tanto, $f^{-1}(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(I_n)$ para ciertos intervalos abiertos I_n, y por tanto es medible dado que $f^{-1}(I_n)$ son medibles por serlo f. □

Proposición 8. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con f medible y g continua, se tiene que $g \circ f$ es medible.*

Consideramos $A = (a, \infty)$ un intervalo abierto. Como g es continua, entonces $g^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Invocamos entonces la proposición previa para afirmar que $f^{-1}(g^{-1}(A))$ es medible, y hemos acabado. □

2.1. Un espacio de medida para la medida de Lebesgue

Nos preguntamos si podemos definir la medida de Lebesgue (generalización de la longitud de un intervalo) en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, o necesitamos una σ-álgebra estrictamente menor que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Esta medida, si ha de generalizar una longitud, debería verificar ciertas condiciones naturales: invarianza por traslaciones y que la medida de los intervalos sea finita.

Teorema 1. *Sea $X = [0, a)$. No existe ninguna medida $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$, finita, no nula, e invariante por traslaciones.*

Demostración. Basta con considerar el caso $a = 2\pi$, dado que si existe la medida en algún a, uno puede reescalarla convenientemente a ese intervalo. Consideramos ahora $f(t) = e^{it}$ la biyección entre $[0, 2\pi)$ y la circunferencia unidad. Las rotaciones $e^{it} \to e^{it+i\theta}$ se corresponden con *traslaciones* $t \to t + \theta$ mód 2π en el espacio de partida. Supongamos ahora que $A \subset [0, 2\pi)$. Se afirma que $\mu(\varphi_\theta(A)) = \mu(A)$, siendo φ_θ la rotación de ángulo θ. En efecto, $\mu(\varphi_\theta(A \cap [0, 2\pi - \theta))) = \mu(A \cap [0, 2\pi - \theta))$, al ser meramente una traslación, y del mismo modo $\mu(\varphi_\theta(A \cap [2\pi - \theta, 2\pi))) = \mu(A \cap [2\pi - \theta, 2\pi))$. Como la unión estos dos conjuntos es todo A y son disjuntos, sigue que $\mu(\varphi_\theta(A)) = \mu(A \cap [2\pi - \theta, 2\pi)) + \mu(A \cap [0, 2\pi - \theta)) = \mu(A)$.

Por tanto, ahora basta demostrar que si $\mathbb{T}$ es la circunferencia unidad, no existe una medida $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ finita, no nula e invariante a rotaciones. Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{T}$: $z \sim w \iff \exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $w = ze^{i2\pi q}$, es decir, si y solo si uno se obtiene rotando al otro una cantidad racional de circunferencia, que denotamos q. Por ejemplo, $1 \sim i \sim e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Sea $\mathcal{N} \subset \mathbb{T}$ un conjunto con exactamente un punto de cada clase de equivalencia (es decir, un conjunto de representantes).

Dado ahora un $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] = R$, ponemos $\mathcal{N}_r = e^{2\pi ir}\mathcal{N} \subset \mathbb{T}$. Entonces está claro que $\mathcal{N}_r \cap \mathcal{N}_s = \emptyset$, si $r \neq s$ y $r, s \in R$. Si hubiese un punto común z, entonces, como $\mathcal{N}_s = e^{2\pi i(s-r)}\mathcal{N}_r$, se tiene que $z = e^{2\pi i(s-r)}w$, con $w \in \mathcal{N}_r$, y son equivalentes z y w, además de distintos (porque $r \neq s$), cosa que no puede ser porque entonces tenemos dos elementos equivalentes distintos $e^{-2\pi ir}z$, $e^{-2\pi ir}w$ en $\mathcal{N}$.

Por otro lado, $\bigcup_{r\in R}\mathcal{N}_r = \mathbb{T}$, dado que si $z \in \mathbb{T}$, es equivalente a algún elemento w de $\mathcal{N}$, y por tanto hay un racional $r \in R$ tal que $z = e^{2\pi ir}w$, luego $z \in \mathcal{N}_r$. Pero entonces, si $\nu(\mathcal{N}) = 0$, todos los $\nu(\mathcal{N}_r) = 0$ (por invarianza rotacional), y son numerables de ellos y disjuntos, luego $\nu(\mathbb{T}) = \sum \nu(\mathcal{N}_r) = 0$ y por tanto la medida sería nula. Si, por otro lado, $\nu(\mathcal{N}) > 0$, entonces todos los $\nu(\mathcal{N}_r) = \nu(\mathcal{N}) > 0$ y por tanto la medida de $\mathbb{T}$ sería infinita. □

Esto nos indica que nuestro espacio de medida no va a poder contener todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Vamos a comenzar a observar cómo se podría definir la medida de Lebesgue en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Dado $G \subset [a,b]$ un abierto relativo en $[a,b]$, tenemos que $G = [a,b] \cap \tilde{G}$, con $\tilde{G}$ abierto de $\mathbb{R}$. Todos los abiertos de $\mathbb{R}$ pueden ponerse como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos, digamos $\{I_j\}$. Concluimos entonces que $G = \bigcup [a,b] \cap I_j$, y por tanto es una unión numerable de abiertos relativos disjuntos. Todos ellos van a ser de hecho intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, salvo a lo sumo 1 o 2 que contengan al punto a o b. Definimos:

$$m(G) = \sum |I_j \cap [a,b]|.$$

Es decir, la medida del abierto relativo es la suma de las longitudes de los intervalos abiertos relativos que componen G. De esta manera hemos definido una función en conjuntos abiertos de $[a,b]$. Así, podemos definirla también en cerrados $F \subset [a,b]$, como $m(F) = (b-a) - m([a,b] \backslash F)$, dado que el complemento es abierto.

Definición 12. Dado $A \subset [a,b]$, diremos que es **Lebesgue-medible** si $\forall \epsilon > 0$ hay un cerrado F y un abierto C relativos en $[a,b]$, tales que $F \subset A \subset G$ y $m(G) - m(F) < \epsilon$.

Puede comprobarse que estos conjuntos forman una σ-álgebra, sobre la que podemos definir una medida:

Definición 13. Dado $A \subset [a,b]$ un conjunto Lebesgue-medible, se define su **medida de Lebesgue** como $m(A) = \sup_{F \subset A, F \text{ cerrado}} m(F) = \inf_{A \subset G, G \text{ abierto}} m(G)$.

Además de esta definición, se tiene otra equivalente (se comprueba de inmediato) en términos de sucesiones:

Definición 14. El conjunto $A \subset [a,b]$ es medible de Lebesgue $\iff \exists F_n, G_n$ con $F_n \subset A \subset G_n$, los G_n abiertos y los F_n cerrados, tales que $\lim_{n \to \infty} m(F_n) = \lim_{n \to \infty} m(G_n) := m(A)$

Y se puede extender la definición para conjuntos no acotados:

Definición 15. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no acotado es medible Lebesgue si $A \cap [-N,N]$ lo es, $\forall N > 0$. En este caso, $m(A) = \lim_{N \to \infty} m(A \cap [-N,N])$.

2.2. Propiedades de medidas

Proposición 9. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y sean $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subset B$. En ese caso:*

1. $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, *siempre que la expresión de la derecha tenga sentido (no sean ambos infinito, es decir, basta que $\mu(A)$ sea finito).*

Demostración. $B = A \cup (B \backslash A)$, al ser unión disjunta, indica que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$, luego como ambas son positivas, $\mu(B) \geq \mu(A)$, y además, restando $\mu(A)$ de ambos lados, se obtiene la segunda propiedad. □

Proposición 10. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Si $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ es una sucesión creciente de conjuntos ($A_i \subset A_{i+1}$ $\forall i$), entonces $\mu(\bigcup A_j) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$.*

Demostración. Veamos primero que el límite (finito o infinito) existe. Esto es porque la sucesión $\{\mu(A_j)\}$ es creciente, en virtud de la proposición previa. Entonces, escribimos la unión que estamos considerando de manera disjunta: $\bigcup_1^\infty A_n = A_1 \uplus \biguplus_{n=2}^\infty (A_n \backslash A_{n-1})$. Entonces, tomando medidas, gracias a la σ-aditividad: $\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_{i=2}^\infty (\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})) + \mu(A_1) = \lim_{n \to \infty} (\sum_{i=2}^n (\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})) + \mu(A_1)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$. □

Proposición 11. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Si $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ es una sucesión decreciente de conjuntos ($A_i \supset A_{i+1}$ $\forall i$), y además $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(\bigcap A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.*

Demostración. Definimos $\forall j \in \mathbb{N}$, $B_j = A_1 \backslash A_{j+1}$. Entonces $\bigcup B_j = A_1 \backslash \bigcap A_n$. Por tanto, como ya sabemos, $\mu(A_1) - \mu(\bigcap A_n) = \mu(A_1 \backslash \bigcap A_n) = \mu(\bigcup B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$, dado que $\mu(A_1) < \infty$. Basta con despejar para obtener la proposición. □

Obsérvese que basta con que uno de los A_j sea finito, no necesariamente A_1, para aplicar la proposición con la sucesión $C_n = A_{n-j+1}$. No obstante, si ninguna de las medidas es finita, la proposición es falsa. Por ejemplo, si $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ y $\mu(A) := card(A)$. Tomamos $A_n = \{m \in \mathbb{Z}, m \geq n\}$. Son claramente decrecientes, y de medida infinita, pero $\mu(\bigcap A_n) = 0$ al ser $\bigcap A_n = \emptyset$.

Observación 4. Dada μ una medida en $(X, \mathcal{A})$, y $c \geq 0$, la función $c\mu$ también es una medida en $(X, \mathcal{A})$. Asimismo, dadas medidas $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$, la función $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ también es una medida.

Esto puede verificarse comprobando fácilmente las dos propiedades de medida.

3. Integración

Vamos a tratar entonces de definir una integral mejor que la de Riemann, empleando las ideas de medida exploradas en la sección anterior y siguiendo con lo discutido en la introducción. Para ello, iremos por pasos, en primer lugar definiéndola para funciones simples, después para funciones no negativas, y finalmente la definiremos para cualquier función. Todas las funciones en las que la definamos han de ser **medibles**.

Observación 5. En adelante, denotaremos, dado $A \subset X$, la función indicatriz $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$.

Definición 16. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida. Se dice que $s : X \to \mathbb{R}$ es **simple** si se expresa como una combinación lineal de funciones características, es decir, si:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x)$$

Para una cantidad finita de subconjuntos $A_j \in \mathcal{A}$, y reales $c_j \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente, s es simple si y solo si es medible y toma un número finito de valores, dado que podemos ponerla como $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{f^{-1}(\{c_j\})}(x)$, siendo las preimágenes medibles por serlo s. Si s es simple, puede representarse de varias maneras como combinación de características, pero siempre hay una única manera en la que los A_j son disjuntos.

Definición 17. Dada s simple, expresada como en la definición anterior, se define su **integral** como

$$\int_X s d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$$

Siempre que todas las $\mu(A_j) < \infty$, o bien que todas las $c_j \geq 0$.

Pedimos al menos una de estas dos últimas condiciones para evitar llegar a una suma no definida.

Definición 18. Sea $f : X \to [0, \infty]$ medible y no negativa. Se define su **integral** como:

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \right\}$$

Donde s son funciones simples con $0 \leq s \leq f$.

Puede suceder que esa integral sea infinita. Por ejemplo, si f tiene valor infinito en un conjunto A de medida positiva, se comprueba que $\int f d\mu = \infty$, dado que, por ejemplo, las funciones $s_n(x) = n\chi_A(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ tienen integral arbitrariamente grande para n grande, y verifican $0 \leq s \leq f$. De esta definición es inmediato que si $0 \leq f \leq g$, se tiene que $\int f \leq \int g$.

Observación 6. Dada f medible, no negativa y $g : X \to [0, \infty]$, no negativa con $\mu\{f \neq g\} = 0$, entonces g también es medible y además $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Observación 7. En $(X, \mathcal{A}, \mu)$, dadas dos funciones $u, v : X \to \mathbb{R}$ simples, se tiene que $\int(u + v)d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu$, siempre que u, v sean ambas no negativas, o bien ambas estén soportadas en un conjunto de medida finita.

3.1. Teorema de convergencia monótona

En primer lugar, unos resultados previos:

Definición 19. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}\mu)$, y f medible y positiva. Se define $\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$.

Observación 8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y $B \in \mathcal{A}$ medible. La función $\eta : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dada por $\eta(A) = \mu(A \cap B)$ es también una medida, y se suele denotar $\mu|_B$.

La comprobación de ambas propiedades de medida es inmediata.

Observación 9. En $(X, \mathcal{A}, \mu)$, si $s = \sum_{i=1}^n c_j\chi_{A_j}$ es una función simple no negativa (y por tanto los $c_j > 0$ con los A_j disjuntos), puede definirse una medida $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dada por $\nu(A) = \int_A s d\mu = \int_X s\chi_A d\mu$. Se suele denotar en este caso que $d\nu = s d\mu$.

Razón. Puede comprobarse que $\nu = \sum_{j=1}^n c_j\mu|_{A_j}$, que es medida por ser combinación lineal de medidas con los $c_j > 0$.

Teorema 2 (De convergencia monótona). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión monótona creciente de funciones medibles positivas de $\mathcal{A}$ en $[0, \infty]$. Es decir, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \ldots$. Denotamos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0, \infty]$, que existe por monotonía. Entonces, la función f es medible, y se tiene:*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración. f es medible por ser el supremo de funciones medibles. Observamos que las integrales forman una sucesión creciente por la monotonía de las integrales: $0 \leq \int f_1 \leq \int f_2 \leq \ldots$, y por tanto $\exists \lim_{n\to\infty} \int f_n$. Como $f_n \leq f$ para todo n, se tiene asimismo que $\int f_n \leq \int f$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f$. Para ver la otra desigualdad, seleccionamos una función simple s no negativa arbitraria que cumple $0 \leq s \leq f$, y un número auxiliar $\alpha \in (0, 1)$.

Sea $A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$. Es fácil ver que A_n es medible, dado que $f_n - \alpha s$ es una función medible, y está bien definida porque αs nunca adquiere valores infinitos. Por la monotonía de las f_n, se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$ en todo $n \in \mathbb{N}$. Asimismo, $\bigcup A_n = X$, dado que tal y como se ha seleccionado s, se tiene que, si $s(x) > 0$, entonces $f(x) \geq s(x) > \alpha s(x)$, y por tanto, $f_n(x) \in (\alpha s(x), f(x))$ para n grande, luego $x \in A_n$. Si $s(x) = 0$ es trivial que $x \in A_n$, de hecho para todo n.

Pero entonces, aplicamos el resultado de monotonía de conjuntos a la medida $\nu(x)$ inducida con $d\nu = s d\mu$, obteniendo $\nu(\bigcup A_n) = \nu(X) = \int_X s d\mu = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} s(x) d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \lim_{j\to\infty} \int f_j d\mu$. Esta última desigualdad sigue de que, en A_n, se tiene que $\alpha s \leq f_n$, luego $\int_{A_n} s d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f_m d\mu$ para todo $m \geq n$, y por tanto podemos tomar límite. Como s era arbitraria por debajo de f, sigue tomando supremo que $\int f d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \lim_{j\to\infty} \int f_j d\mu$. Asimismo, como α es arbitrario, tomamos límite cuando $\alpha \to 1^-$, y obtenemos que $\int f d\mu \leq \lim_{j\to\infty} \int f_j d\mu$. $\square$

Lema 1. *Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible no negativa. Entonces $\exists\{s_n\}_n$ una sucesión de funciones simples positivas crecientes tales que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ puntualmente.*

Demostración. Consideramos los conjuntos de nivel de f en franjas de altura fija para definir:

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, \text{ en los } x \text{ con } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \\ n, \text{ si } f(x) \geq n \end{cases}.$$

Siendo k un entero entre 1 y $n2^n$. Es decir, las franjas verticales tienen sus extremos desde el 0 hasta el n, y en los puntos en los que la función se encuentra en la franja, le damos a s_n el valor menor de la franja. Estas s_n son simples y no negativas. Ahora, dividimos el eje Y de la forma $\{I_k^n\}_{k=1}^{n2^n+1}$, siendo cada $I_k^n = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$, y el último $I_{n2^n+1}^n = [n, \infty)$.

Ahora veremos que la sucesión $\{s_n\}$ es creciente. Si x verifica que $0 \leq f(x) < n$, es decir, se halla en las franjas de s_n, entonces hay un $k \leq n2^n$ con $x \in I_k^n$. En este caso, $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$. En el siguiente paso, tenemos que $I_k^n = I_{2k-2}^{n+1} \uplus I_{2k-1}^{n+1}$, dado que esta unión disjunta es el intervalo $[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}})$, que es justamente I_k^n. Si $f(x)$ está en el primer trozo, entonces $s_{n+1}(x) = s_n(x)$. Si está en el segundo, entonces $s_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} > \frac{2k-2}{2^{n+1}} = s_n(x)$.

Por otro lado, si x verifica que $f(x) \geq n$, entonces $s_n(x) = n$, y tenemos dos posibilidades. Si también $f(x) \geq n+1$, entonces la monotonía es clara. Si no, es porque $n \leq f(x) < n+1$, y entonces puede caer o bien en el intervalo $I_{(n+1)2^{n+1}-1}^{n+1}$, o bien en el $I_{(n+1)2^{n+1}}^{n+1}$. En cualquier caso, $s_{n+1}(x) \geq \frac{(n+1)2^{n+1}-2}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)2^n-1}{2^n} = n + 1 - \frac{1}{2^n} \geq n$.

Ahora veamos que $s_n \to x$ puntualmente. Si $f(x) < \infty$ es finito, entonces pongamos que $f(x) \leq m$. Tenemos que $\forall n \geq m$, se tiene que $0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$, dado que ambas funciones están en la misma franja de tamaño $\frac{1}{2^n}$, y por lo tanto, tomando límites, $s_n(x) \to f(x)$. Por otro lado, si $f(x) = \infty$, entonces $s_n(x) = n$ siempre, y por tanto $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) = \infty$. □

Observación 10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y f medible y positiva. Sigue que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida sobre A.

Basta con utilizar el lema previo. Construimos la sucesión creciente $\{s_n\}$ de funciones simples con $s_n \to f$. Entonces, véase que $\nu(A) = \int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A)$, donde cada ν_n es la medida inducida por la s_n correspondiente. El límite de una sucesión creciente de medidas es una medida. □

Proposición 12 (Convergencia monótona para series)**.** *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida. Supongamos que tenemos $\{g_n\}_n$ una sucesión de funciones positivas medibles. Entonces:*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n(x) d\mu$$

Demostración. Basta con aplicar el teorema de convergencia monótona a la sucesión de sumas parciales de las g_n. Definimos $S_n = \sum_{k=1}^n g_k$. Son medibles por ser suma de funciones medibles, y son positivas porque todos los sumandos son positivos. Asimismo, $\{S_n\}$ es creciente. Entonces, $\lim_{n\to\infty} S_n$ es medible y $\int \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int S_n$. Lo único que resta ver es que $\int S_n = \sum_{k=1}^n \int g_k d\mu$, es decir, que puede intercambiarse suma (finita) con integral, cosa que veremos inmediatamente a continuación. □

Proposición 13. *Si f y g son no negativas y medibles, entonces:*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demostración. Si las f y g son funciones simples, se tiene el resultado directamente de la definición de función simple como suma. Si no, por el lema visto previamente, tenemos funciones simples $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$, todas no negativas, con $s_n \to f$ y $t_n \to g$ puntualmente. Asimismo, $\{s_n + t_n\}$ es una sucesión de funciones no negativas, simples, y $s_n + t_n \to f + g$. Podemos aplicar el teorema de convergencia monótona, sabiendo que $\int s_n + \int t_n = \int s_n + t_n$, para llegar a $\int f + \int g = \int (f+g)$. □

Observación 11 (Recordatorios de lím sup y lím inf). Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $b_n = \inf\{a_m : m \geq n\}$ y $c_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$. Definimos $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \inf_n c_n$, y también $\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup_n b_n$. Además, $\limsup A_n = \sup\{a : \exists \{n_j\}_j, a_{n_j} \to a\}$, $\liminf A_n = \inf\{a : \exists \{n_j\}_j, a_{n_j} \to a\}$. Asimismo, $\limsup a_n = \liminf a_n \iff \exists \lim_{n\to\infty} a_n$, en cuyo caso todos valen lo mismo.

Lema 2 (Fatou)**.** *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles y no negativas, entonces:*

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

Demostración. Sea $g_n(x) = \inf\{f_m(x) : m \geq n\}$. Estas funciones son no negativas, medibles y crecientes. Aplicando el teorema de convergencia monótona, sigue que $\int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu$, por tanto, $\int \liminf g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu$. Ahora, como cada $g_n \leq f_m$ si $m \geq n$, se tiene que $\int g_n \leq \int f_m$ para todo $m \geq n$, luego $\int g_n \leq \inf_{m\geq n} \int f_m d\mu \leq \liminf_m \int f_m d\mu$. Finalmente, por tanto, $\lim_{n\to\infty} g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \liminf_m \int f_m d\mu = \liminf_m \int f_m d\mu$, como se quería. □

3.2. Integral de una función medible arbitraria

Observación 12. Dada una función medible $f : X \to [-\infty, \infty]$, donde $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, podemos descomponerla así: $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = \max(0, f)$, y $f^- = \max(0, -f)$, ambas medibles, y ambas no negativas.

Demostración. Está claro que son medibles por serlo f y no negativas porque son mayores que 0 (es uno de los argumentos del máximo). Si en $x \in X$ se tiene que $f(x) \geq 0$, entonces $f^+(x) = f(x)$ y $f^-(x) = 0$, con lo que vale la igualdad, y si $f(x) < 0$, entonces $f^+(x) = 0$ y $f^-(x) = -f(x)$, luego también vale. □

Definición 20. Se dice que f es **integrable**, y se denota $f \in L^1(\mu)$, si f es medible y además $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < \infty$.

En este caso, se define:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Obsérvese que, como funciones positivas, $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$, dado que $|f| = f^+ + f^-$. Por tanto, f es integrable $\iff$ f^+, f^- son integrables $\iff$ $|f|$ es integrable.

Definición 21 (Integral extendida)**.** También podemos poner:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Si alguna de esas dos integrales es finita.

Es decir, si alguno de los conjuntos donde f vale ∞ o $-\infty$ tiene medida nula, dado que si ninguno la tiene, ambas integrales valen ∞.

Teorema 3. *Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$. Entonces:*

1. $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

2. $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, *para* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $h = f + g$. Escribimos $h = f^+ - f^- + g^+ - g^- = h^+ - h^-$. Por lo tanto, $f^+ + g^+ + h^- = h^+ + f^- + g^-$, lo que es una igualdad de funciones positivas. Utilizando la linealidad en funciones positivas, sigue que $\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int h^+ + \int f^- + \int g^-$. Sigue ahora que $\int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int h^+ - \int h^-$, luego por definición $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Para la segunda parte, si $\alpha = 0$ es inmediato. Si no, sabemos que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ si $\alpha > 0$, luego hemos acabado con la definición. Si no, se tiene que $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$, y $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. Basta una vez más con aplicar la definición. □

3.3. Integración de funciones complejas

Definición 22. Dada $f : X \to \mathbb{C}$, se dice que es **medible** si $\Re(f)$ e $\Im(f)$ son medibles. Se dice que es **integrable** si esas dos funciones lo son. En este último caso, se pone:

$$\int f d\mu = \int \Re(f) d\mu + i \int \Im(f) d\mu$$

Observación 13. $f : X \to \mathbb{C}$ es integrable $\iff$ $\int |f| d\mu < \infty$.

3.4. Teorema de convergencia dominada

Teorema 4. *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Supongamos que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *y* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tal que* $f_n \to f$ *puntualmente. Supongamos asimismo que* $|f_n| \leq g$ *para cierta función integrable* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *es decir,* $\int_X g(x) d\mu < \infty$. *En ese caso, se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Y asimismo, que:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

El mismo teorema es válido si en vez de $\overline{\mathbb{R}}$ *las funciones van sobre* $\mathbb{C}$.

Demostración. El caso complejo sigue del caso real aplicando la definición previa. Por tanto, demostramos el caso de $\overline{\mathbb{R}}$ únicamente. Sabemos que se tiene $-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$ en todo $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $g + f_n \geq 0$, y $g - f_n \geq 0$. Aplicando el lema de Fatou, sigue que:

$$\int g + \int f \leq \liminf_n \int (g + f_n) = \int g + \liminf_n \int f_n$$

Dado que $\liminf (f_n + g) = f + g$ dado que se tiene convergencia puntual. Asimismo puede obtenerse que:

$$\int g - \int f \leq \liminf_n \int (g - f_n) = \int g - \limsup_n \int f_n$$

Estas desigualdades se reducen a $\int f \leq \liminf_n \int f_n$ y también $\int f \geq \limsup_n \int f_n$. Por tanto, sigue que $\liminf_n \int f_n \geq \int f \geq \limsup_n \int f_n$, luego vale la igualdad entre todas ellas y tenemos que $\int f_n \to \int f$.

Para la segunda afirmación, obsérvese que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ puntualmente, y asimismo, pasando al límite, $|f(x)| \leq g(x)$. Por lo tanto, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$, que es integrable por serlo g, luego aplicamos el resultado que ya hemos demostrado del teorema para concluir que $\int |f_n - f| \to 0$. □

Proposición 14 (Convergencia dominada para series)**.** *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles con $\sum_{k=1}^{\infty}\int|f_n(x)|d\mu<\infty$, entonces $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)<\infty$ en casi todo punto, y asimismo:*

$$\int\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int f_k(x)d\mu$$

.

Demostración. Por el teorema de convergencia monótona, al ser las $|f_k|$ no negativas, tenemos que $\sum\int|f_k|d\mu=\int\sum|f_k|d\mu<\infty$. Se sigue por tanto que la función $\sum|f_k|$ ha de ser finita en casi todo punto, luego converge absolutamente en casi todo punto y por tanto $\sum f_k<\infty$ en casi todo punto. Asimismo, se tiene que $|s_n(x)|=|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)|\leq\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$, y esta serie entonces es una mayorante para $s_n(x)$, puesto que hemos visto que su integral es finita, y aplicamos el teorema de convergencia dominada a s_n para obtener el resultado. □

(En este teorema se supone que $\sum f_k(x)$ se define como 0 en los casos en los que diverge el sumatorio, a lo sumo en un conjunto de medida cero)

Proposición 15. *Sea $f\in L^1(\mu)$. Entonces el conjunto $A=\{f\neq0\}$ es σ-finito.*

Demostración. Se tiene que $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{|f|\geq\frac{1}{n}\}$, y estos conjuntos $A_n=\{|f|\geq\frac{1}{n}\}$ han de tener medida finita porque si no, se tendría $\int_X|f|d\mu\geq\int_{A_n}\frac{1}{n}=\frac{\mu(A_n)}{n}=\infty$. □

Proposición 16. *Si $f\in L^1(\mu)$, se tiene que $\int_X|f|d\mu=\int_0^{\infty}\mu(\{x\in X:|f(x)|>t\})dt$.*

Esto puede demostrarse verificándolo fácilmente para funciones simples, y a continuación utilizar el teorema de convergencia monótona para extenderlo a cualquier función.

Definición 23. Puede definirse el espacio métrico de las funciones integrables $(L^1(\mu),d)$, con $d(f,g)=\int_X|f-g|d\mu$. De hecho, es un espacio vectorial normado con $\|f\|=\int_X|f|d\mu<\infty$.

Proposición 17. *El espacio $(L^1(\mu),\|\cdot\|)$ es de Banach. Es decir, toda sucesión de Cauchy converge.*

4. Espacios de medida

Vamos a profundizar en los espacios de medida en los que hemos definido el concepto de integral.

4.1. Medidas completas

Definición 24. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ es **completa** si, dado un $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, entonces todo $B \subset A$ es medible (y por tanto $\mu(B) = 0$).

Teorema 5. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se define $\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0\}$, y se define, para E un $\mathcal{A}$, con $A \subset E \subset B$ que verifican $\mu(B \setminus A) = 0$, una medida extendida $\overline{\mu}(E) = \mu(A) = \mu(B)$.*

Se afirma:

1. *$\overline{\mathcal{A}}$ es un σ-álgebra mayor que $\mathcal{A}$.*
2. *$\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ es una medida completa que extiende a μ.*

Demostración. Claramente $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$, dado que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \subset A \subset A$ y $\mu(A \setminus A) = 0$. En particular, $X \in \overline{\mathcal{A}}$. Asimismo, si $E \in \overline{\mathcal{A}}$, con $A \subset E \subset B$ en la definición, entonces $B^c \subset E^c \subset A^c$ y además $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, luego $E^c \in \overline{\mathcal{A}}$. Finalmente, si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{A}}$, tomamos $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ aquellos tales que $A_n \subset E_n \subset B_n$ de la definición. Entonces, $\bigcup A_n \subset \bigcup E_n \subset \bigcup B_n$, y asimismo $\mu((\bigcup B_n) \setminus (\bigcup A_n)) \leq \mu(\bigcup (B_n \setminus A_n)) \leq \sum \mu(B_n \setminus A_n) = 0$, luego $\overline{\mathcal{A}}$ es σ-álgebra.

Ahora veremos que $\overline{\mu}$ es medida. Primero, veamos que está bien definida. Si $E \subset \overline{\mathcal{A}}$, y tenemos inclusiones $A \subset E \subset B$, $C \subset E \subset D$, con $A, B, C, D \in \mathcal{A}$, y $\mu(B \setminus A) = \mu(D \setminus C) = 0$, veamos que todos tienen la misma medida. Se verifica $\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) \leq \mu(A \cap C) + \mu(D \setminus C) = \mu(A \cap C)$, donde hemos usado la inclusión $A \subset D$. Como $A \cap C \subset A$, vale la igualdad. Del mismo modo se sigue que $\mu(C) = \mu(A \cap C)$, luego está bien definida. Es inmediato que $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Sean ahora $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{A}}$, disjuntos, encajados entre A_i y B_i cada uno según la definición. Entonces, $\overline{\mu}(\bigcup E_i) = \mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i) = \sum \overline{\mu}(E_i)$ al ser los A_i disjuntos por estar contenidos en los E_i, luego hemos acabado.

Claramente, además, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$, luego queda ver que la medida es completa. Pero, si $\overline{\mu}(E) = 0$, entonces es porque hay $A, B \in \mathcal{A}$, ambos de medida μ nula, con $A \subset E \subset B$. En ese caso, si $E' \subset E$, se tiene $\emptyset \subset E' \subset B$, con $\mu(B \setminus \emptyset) = \mu(B) = 0$, luego es medible. □

Proposición 18. *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$, f medible y X dotado de una medida completa. Entonces g es medible.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Consideramos el conjunto $E = \{g > a\}$. Se tiene que $A := \{f > a\} \cap \{f = g\} \subset E \subset \{f > a\} \cup \{f \neq g\} =: B$. Véase que $B \setminus A \subset \{f \neq g\}$, luego, por completitud, es medible y de medida nula. Pero entonces $E \setminus A \subset B \setminus A$ también es medible, y finalmente $E = (E \setminus A) \cup A$ es medible. □

Proposición 19. *Si $f_n : X \to \mathbb{R}$ son medibles, con X un espacio con medida completa, y $f_n \to f$ en casi todo punto, entonces f es medible.*

Demostración. $g = \limsup f_n$ es medible, y por definición $g = f$ es casi todo punto. Aplicando el resultado previo, por tanto, sigue que f es medible. □

4.2. Medidas exteriores

Definición 25. Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, una función definida sobre **todos** los subconjuntos del espacio X. Se dice que μ^* es una **medida exterior** si:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i)$.

Una forma bastante general de obtener estas medidas es la siguiente:

Proposición 20. *Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ cualquier familia de conjuntos que contiene a $\emptyset$ y X. Si $\rho : \mathcal{D} \to [0,\infty]$, con $\rho(\emptyset) = 0$, podemos definir una medida exterior mediante:*

$$\rho^*(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : A_i \in \mathcal{D}, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i\}$$

Demostración. Las propiedades 1 y 2 de medida exterior son inmediatas y siguen de las propiedades de ínfimo. Para la 3, sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n) = \infty$ hemos acabado. En el caso contrario, sea $\epsilon > 0$, y elegimos $\{E_i^n\}$ tales que fijado el n los E_i^n son numerables, $A_n \subset \bigcup_i E_i^n$, y $\sum_i \rho(E_i^n) < \rho^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$, lo que es posible por ser $\rho^*(A_n)$ el ínfimo de esas sumas. Pero entonces, $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n(\bigcup_i E_i^n)$, que son numerables por ser union numerable de conjuntos numerables, y sigue por lo tanto que $\rho^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \sum_i \rho(E_i^n) \leq \sum_n(\rho^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \epsilon + \sum_n \rho^*(A_n)$. Sigue por tanto la desigualdad deseada. □

4.3. Premedidas

Vamos a ver la noción de premedidas, que son medidas más sencillas definidas únicamente sobre álgebras. De ahí pasaremos a generar una medida exterior con el método previo, y finalmente restringiremos la medida exterior a una σ-álgebra donde tenga todas las propiedades deseables.

Definición 26. Sea $\mathcal{B}_0$ un álgebra sobre X. Se dice que $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0,\infty]$ es una **premedida** si:

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$
2. Si $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_0$ son una subfamilia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos cuya unión sigue estando en B_0, entonces $\mu_0(\bigcup B_i) = \sum_i \mu_0(B_i)$.

Obsérvese que una premedida definida en un σ-álgebra también es una medida. La **medida exterior asociada a una premedida** es la que se obtiene siguiendo el procedimiento de la proposición 20 con la premedida.

Definición 27 (Propiedad de Carathéodory)**.** Dada una medida exterior μ^* sobre X, se dice que $A \subset X$ es μ^*-medible si se tiene que $\forall E \subset X$, se tiene que $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

Obsérvese que esto equivale a pedir que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, dado que la otra se tiene por definición de medida exterior.

Con esto podemos pasar de medidas exterior a medidas:

Teorema 6 (Carathéodory I)**.** *Sea μ^* una medida exterior y $\mathcal{A}^* = \{A \subset X : A$ es μ^* medible$\}$. Entonces $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra y $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida, y es completa.*

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra. Claramente $X \in \mathcal{A}^*$ puesto que $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap X) + \mu^*(E \cap \emptyset) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E) + 0$. Además, por la simetría en la definición de medible, si $A \in \mathcal{A}*$, entonces $A^c \in \mathcal{A}^*$.

Veamos ahora en primer lugar que si $A, B \in \mathcal{A}^*$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}^*$. Para ello tomamos $E \subset X$ y entonces, como $E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B)$. Por tanto, $\mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) =$

$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, donde hemos usado que B es medible para los conjuntos $E \cap A$ y $E \cap A^c$. Pero entonces $\mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E)$, dado que A es medible, y se tiene lo que se quería, luego $\mathcal{A}^*$ es un álgebra.

Además, veamos que μ^* es aditiva sobre $\mathcal{A}^*$. Si $A, B \in \mathcal{A}^*$, disjuntos, se tiene que $\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Hemos usado que A es medible.

Ahora veamos que es de hecho σ-álgebra y σ-aditiva. Basta con ver que si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son numerables y disjuntos (esto último basta por ser ya un álgebra), se tiene que $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}^*$, y que $\mu^*(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu^*(A_j)$. Para ver esto, sea $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$, $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Dado $E \subset X$, se tiene que $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu*(E \cap B_{n-1}) = \cdots = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$.

Por tanto, tomamos límites en la expresión previa, y $\sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E \cap B_n) \leq \mu^*(E \cap B) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j)$, donde la última desigualdad sigue de la definición de medida exterior. Así, todas ellas han de ser igualdades y por tanto $\sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B)$. Sigue entonces:

$$\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B^c) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E) = \mu^*(E)$$

Donde hemos usado que como $B_n \subset B$ entonces $B^c \subset B_n^c$. Sigue por tanto que la unión deseada verifica $B \in \mathcal{A}^*$, y además, si tomamos $E = X$ en la igualdad previa, se llega a que $\sum_{j=1}^\infty \mu^*(X \cap A_j) = \mu^*(X \cap B)$, es decir, que $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)$.

Queda finalmente ver que $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es completa. Dado $A \in \mathcal{A}^*$ con $\mu(A) = 0$, tomamos $B \subset A$. Por monotonía de μ^*, sigue que $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = 0$. Así, $\mu^*(B) = 0$, de tal manera que si $E \subset X$, entonces $\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(E)$ y por tanto B es medible. □

De este teorema se pueden generar medidas completas a partir de medidas exteriores, pero el problema es que tanto las medidas como las σ-álgebras resultantes pueden ser de bajo interés, incluso las triviales. El siguiente resultado ayuda a generar medidas que extiendan premedidas ya existentes:

Teorema 7 (Carathéodory II)**.** *Sea $\mathcal{B}_0$ un álgebra sobre X, μ_0 una premedida y μ^* la medida exterior derivada de μ_0. Con la misma notación que el primer teorema de Carathéodory, se sigue que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}^*$, y además $\mu|_{\mathcal{B}_0} \equiv \mu_0$.*

Demostración. Ya sabemos del primer teorema que $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra y μ es una medida. Lo que hay que ver ahora es que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}^*$ y que μ extiende a μ_0. Sea $A \in \mathcal{B}_0$. Tomamos $E \subset X$ y $\epsilon > 0$. Sabemos que $\exists\{B_j\} \subset B_0$ con $E \subset \bigcup B_j$, y $\sum \mu_0(B_j) \leq \mu*(E) + \epsilon$, por la definición de medida exterior inducida por μ_0. Además, $E \cap A \subset \bigcup B_j \cap A$ y $E \cap A^c \subset \bigcup B_j \cap A^c$.

Se tiene entonces que $\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c) \leq \sum \mu_0(B_j\cap A)+\sum \mu_0(B_j\cap A^c) = \sum \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E)+\epsilon$, donde hemos usado la aditividad de μ_0 en el álgebra, y como $\epsilon > 0$ era arbitrario, sigue la desigualdad buscada y por tanto $A \in \mathcal{A}^*$.

Asimismo, $\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu_0(A)$ por definición de $\mu^*(A)$, dado que el propio A recubre a A. Basta ver ahora la otra desigualdad. Sea $\{B_j\} \subset B_0$ con $A \subset \bigcup B_j$. Ponemos $\hat{B}_j = B_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$ una familia disjunta cuya unión es la misma. Como $A = \bigcup_j A \cap \hat{B}_j$, que es una unión disjunta de elementos del álgebra inicial, tenemos que

$$\mu_0(A) = \sum_j \mu_0(A \cap \hat{B}) \leq \sum_j \mu_0(\hat{B}_j) \leq \sum_j \mu_0(B_j)$$

Y tomando ínfimo, entonces, $\mu_0(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$ y hemos acabado. □

Observemos que, después de todo esto, dado un espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, hay dos formas de conseguir que μ sea completa. La primera es con el primer resultado que se presentó (Teorema 5), obteniendo $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$, y la segunda es aplicando el segundo teorema de Carathéodory para la premedida μ y el álgebra $\mathcal{A}$, dando así $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$.

Se tiene que $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$, y ambas medidas coinciden en $\bar{\mathcal{A}}$. Además, si μ es σ-finita, coinciden $\mathcal{A}^* = \bar{\mathcal{A}}$ y por tanto ambas medidas son iguales.

Asimismo, si $\mathcal{B}_0$ es un álgebra y $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{B}_0$, se tiene que μ_0 se extiende a $\mathcal{A}$, por el segundo teorema de Carathéodory, y además se tiene que si μ_0 es σ-finita, la extensión es única.

Observación 14. Si μ^* es una medida exterior que proviene de una premedida μ_0, $\mu^*(X) < \infty$, se tiene que los conjuntos medibles son simplemente $\mathcal{A}^* = \{A \subset X : \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(X)\}$.

Observación 15 (Medida de Lebesgue). Por ejemplo, $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}_0$ el álgebra generada por los intervalos semiabiertos $(a, b]$. Definimos $\mu_0((a, b]) = b - a$ y la extendemos como es natural a $\mathcal{B}_0$, es decir, sumando las longitudes de los intervalos que componen a cada elemento del álgebra. Se puede verificar que es una premedida, y por el teorema de Carathéodory II, obtenemos primero μ^* que se denomina **medida exterior de Lebesgue**, y la μ que se obtiene es la **medida de Lebesgue**, siendo $\mathcal{A}^*$ los conjuntos medibles Lebesgue.

Proposición 21 (Medidas de Lebesgue-Stieltjes)**.** *Se toma $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha. Ponemos $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$. Se tiene que μ_f una pre-medida sobre $\mathcal{B}_0$ (extendiéndola como es natural). Si $F(x) = x$, se obtiene de nuevo la medida de lebesgue.*

Demostración. Veamos primero que si $(c, d] = \biguplus_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k]$, se tiene la σ-aditividad. Es fácil ver que $\forall N \in \mathbb{N}$, el $\sum_1^N \mu_F((a_k, b_k]) \leq \mu_F((c, d])$, así que también se tiene $\sum_1^\infty \mu_F((a_k, b_k]) \leq \mu_F((c, d])$. Vamos a ver la otra desiguadad.

Sea $\epsilon > 0$. Escogemos un $\hat{c} \in (c, d]$ (que pensamos cercano a c) de tal forma que $\mu_F((\hat{c}, d]) > \mu_F((c, d]) - \epsilon$. Asimismo escogemos $\forall k$ un $\hat{b}_k > b_k$ tal que $F(\hat{b}_k) \leq F(b_l) + 2^{-k}\epsilon$.

Entonces, $\sum \mu_F(a_k, \hat{b}_k] \leq \sum \mu_F(a_k, \hat{b}_k] + \epsilon$. Los intervalos $(a_k, \hat{b}_k]$ recubren $[\hat{c}, d]$, que es compacto, luego hay un subrecubrimiento finito tal que $\bigcup_1^N (a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}] \supset \bigcup_1^N (a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}) \supset [\hat{c}, d] \supset (\hat{c}, d]$. Gracias a estas inclusiones, es fácil ver por inducción en N que $\sum \mu_F((a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}]) \geq \mu_F((\hat{c}, d])$.

Luego se tiene que $\sum_1^N (a_{k_j}, b_{k_j}] \geq \sum_1^N \mu_F((a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}]) - \epsilon \geq \mu_F((\hat{c}, d]) - \epsilon \geq \mu_F((c, d]) - 2\epsilon$. Como esto es para todo ϵ, entonces $\sum_1^N (a_{k_j}, b_{k_j}] \geq \mu_F((c, d])$ y hemos acabado (porque la suma infinita es mayor aún).

Si el conjunto de $\mathcal{B}_0$ no es un único intervalo sino una unión finita de estos intervalos, entonces es inmediato que puede extenderse el resultado. Asimismo se tiene el complemento, luego es una premedida. □

Por ejemplo, si tomamos $F(x) = x^3$ tenemos la premedida $\mu_F((a, b]) = b^3 - a^3 = \int_a^b 3x^2 dx$, y se suele denotar $dF(x) = 3x^2 dx$.

En general, si $F \in \mathcal{C}^1$, entonces $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$, y se escribe $dF(x) = F'(x)dx$.

Definición 28. Se construye una medida $d\mu$ **absolutamente continua** respecto de la medida de Lebesgue m si hay una $f \in L^1(m)$, no negativa, tal que definimos $\forall A \subset \mathbb{R}$ boreliano, $\mu(A) = \int_A f dx$. Se denota $d\mu = f dx$.

Tal función $d\mu$ es en efecto una medida, y es de Lebesgue-Stieltjes para la distribución $F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt & x \geq 0 \\ -\int_x^0 f(t)dt & x < 0 \end{cases}$.

Observación 16 (Escalera de Cantor). Vamos a ver una función de distribución F que es continua, pero no es absolutamente continua ni da lugar a una medida discreta. Empezamos con $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $F(x) = 1$ si $x \geq 1$. Ponemos $\mathcal{C}$ el conjunto ternario de cantor. Si $x \in \mathcal{C}$, puede ponerse de manera única en base 3, mediante $x = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{3^k}$, donde $b_k \in \{0, 2\}$. Se define $F(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^{k+1}}$, y para el resto de puntos del $[0, 1]$ se define F de manera constante, por interpolación. Por ejemplo, en el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ valdrá lo mismo que en el extremo izquierdo, es decir $\frac{1}{2}$.

Es decir, en cada intervalo que quitamos para construir el conjunto de cantor, vale el valor medio entre los valores de los intervalos adyacentes quitados en el paso previo.

Esta función F toma todos los valores de la forma $\frac{r}{2^k}$, para $0 \leq r \leq 2^k$, en los intervalos que no están en $\mathcal{C}$. Se sigue entonces que $F(\mathbb{R})$ es densa en $[0,1]$, y por lo tanto **es continua**, dado que al ser creciente, si hubiese un *salto*, ese intervalo no estaría en la imagen.

Además es constante en cada subintervalo del complemento del conjunto de Cantor, por lo tanto, la μ_F que induce es 0 en todos los subintervalos de $\mathbb{R}\backslash\mathcal{C}$, y sigue entonces por σ-aditividad en la premedida que $\mu_F(\mathbb{R}\backslash\mathcal{C}) = 0$ y por tanto $\mu_F(\mathcal{C}) = 1$, pero $m(\mathcal{C}) = 0$, de tal manera que **no es absolutamente continua**, dado que toda $\int_{\mathcal{C}} f(x)dm = 0$ mientras que esta debería ser 1. A este tipo de medidas se le denomina medidas **singulares continuas**.

4.4. Medidas de Borel

Definición 29. Se dice que μ es una **medida de Borel** si está definida sobre la σ-álgebra de Borel.

No necesariamente tiene que ser completa. Las medidas de Lebesgue-Stieltjes, por ejemplo, están definidas al menos en el σ-álgebra de Borel, porque sabemos que contiene a la clase recubridora $\mathcal{B}_0$ de intervalos semicerrados por la derecha.

Observación 17. El cardinal de los conjuntos de Borel es el de $\mathbb{R}$, es decir $\mathfrak{c}$.

Está claro que hay por lo menos $\mathfrak{c}$, dado que por ejemplo los intervalos abiertos ya hay $\mathfrak{c}$, y además sabemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, luego podría darse que el cardinal excediese el de $\mathbb{R}$. Puede probarse sin embargo por inducción transfinita, con cierta dificultad, que no lo hace, dado que siempre tenemos uniones e intersecciones numerables de familias con cardinal $\mathfrak{c}$.

Observación 18. Si m es la medida de Lebesgue, $\mathcal{L}$ son los conjuntos medibles de Lebesgue, y $\mathcal{B}$ son los borelianos, se tiene que $B \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Ya vimos que había conjuntos no medibles de Lebesgue, gracias al axioma de elección y la invarianza traslacional. La cuestión ahora es ver que hay conjuntos medibles Lebesgue no borelianos. Esto es así porque $|\mathcal{L}| > \mathfrak{c}$. Para comprobar eso, consideramos el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. Al tener medida cero, se sigue que $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$, dado que la medida de Lebesgue es completa sobre el conjunto de medibles Lebesgue. Pero $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$, luego hemos acabado.

Teorema 8. *Sea μ una medida de Borel. Entonces, μ es de Lebesgue-Stieltjes $\iff$ μ es localmente finita, es decir, $\forall N \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu([-N,N]) < \infty$.*

Demostración. Para $\implies$, ya sabemos que $\mu([-N,N]) = F(N) - F(-N^-) < \infty$. Para $\impliedby$, sea μ una medida de Borel localmente finita. Definimos:

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

Se comprueba con las propiedades de medida que F es creciente en $\mathbb{R}$ y es continua por la derecha. Asimismo, es fácil ver que $\mu_F((a,b]) = \mu((a,b])$, de tal manera que coinciden en toda la σ-álgebra generada por los intervalos $(a,b]$, que es la de Borel.

Definición 30. Una medida es **discreta** si hay una cantidad numerable de $t_k \in \mathbb{R}$, $\rho_k > 0$ con $\mu(A) = \sum_{t_k \in A} \rho_k$. Los ρ_k se denominan las **masas** en los puntos t_k.

Es fácil comprobar que en este caso todo $A \subset \mathbb{R}$ es medible, y utilizando la caracterización previa fijándose únicamente en los conjuntos de Borel, se tiene que es de Lebesgue-Stieltjes si y solo si es localmente finita.

Definición 31. Dado $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, se dice que μ es **regular** si:

1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, siendo $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel.
2. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto }, A \subset U\}$, lo que se conoce como **regularidad exterior**.
3. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto }, K \subset A\}$, lo que se conoce como **regularidad interior**.

Proposición 22. *La medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}$ es regular.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Para la regularidad exterior, sabemos que:

$$m(A) = \inf\left\{\sum(b_j - a_j) : A \subset \bigcup(a_j, b_j]\right\}$$

Sea $A \in \mathcal{L}$ y $\epsilon > 0$. Ponemos el cubrimiento $A \subset \bigcup_j(a_j, b_j]$ con $\sum(b_j - a_j) < m(A) + \epsilon$. Sea $U = \bigcup_j(a_j, b_j + \frac{\epsilon}{2^j})$, que es un abierto que recubre a A y verifica que:

$$m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j + \frac{\epsilon}{2^j}) < m(A) + 2\epsilon$$

De donde sigue que $\inf_{A\subset U} m(U) \leq m(A)$. La otra desigualdad es inmediata porque $A \subset U$.

Para la regularidad, interior, supongamos inicialmente que A es acotado, es decir, $A \subset [-N, N]$. Consideramos $A' = [-N, N] \setminus A$. Repetimos lo anterior para obtener un $U \supset A'$ abierto con $m(U) \leq M(A') + \epsilon$. Entonces, $K = [-N, N] \setminus U$ es un compacto con $K \subset A$ y verifica que $m(K) \leq m(A) = m([-N, N]) - m(A') \leq m([-N, N]) - m(U) + \epsilon = m(K) + \epsilon$, luego basta con tomar supremo a ambos lados.

Si A no es acotado, se aplica el resultado a $A_N = [-N, N] \cap A$ y se usa que $m(A) = \lim_{N\to\infty} m(A_n)$. $\square$

Asimismo, todas las medidas de Lebesgue-Stieltjes son regulares, con un argumento similar.

La medida de contar en $\mathbb{R}$, es decir, $\mu(A) = card(A)$ si A es finito, y $\mu(A) = \infty$ si es infinito, no es regular. Por ejemplo, $\mu(\{0\}) = 0$ pero todo abierto que contiene al 0 es infinito, luego $\inf_{\{0\}\subset U, U \text{ abierto}} \mu(U) = \infty$.

Teorema 9. *La medida de Lebesgue m sobre el conjunto $\mathcal{L}$ es invariante por traslaciones y dilataciones.*

Demostración. Tomamos $E \in \mathcal{L}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, y queremos ver que $m(rE + x_0) = r(m(E))$. Vamos a ver que de hecho m^*, la medida exterior, es invariante por traslaciones y dilataciones, luego en particular m lo es. Esto, a su vez, sigue de la invarianza de m sobre la clase recubridora de conjuntos $(a, b]$, dado que $m((ra, rb]) = rb - ra = r \cdot m((a, b])$, y análogo para la traslación. $\square$

Teorema 10. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada es integrable de Riemann, entonces es integrable de Lebesgue y:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$$

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N}$, hay una partición $\mathcal{P}_n$ de $[a, b]$ con $U_f(\mathcal{P}_n) - L_f(\mathcal{P}_n) \leq \frac{1}{n}$. Podemos suponerlas además encadenadas: $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots$, dado que si no se tuviese $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k+1}$, reemplazamos $\mathcal{P}_{k+1}$ por $\mathcal{P}_{k+1} \cup \mathcal{P}_k$, que al ser más fina, reduce la diferencia entre suma superior e inferior. Por cada partición, se definen:

$$s_n(x) = \sum_{I_j\in\mathcal{P}_n} \inf_{I_j} f \cdot \chi_{I_j}$$

$$S_n(x) = \sum_{I_j\in\mathcal{P}_n} \sup_{I_j} f \cdot \chi_{I_j}$$

Obsérvese que son simples y que $\int_{[a,b]} s_n dm = L_f(\mathcal{P}_n)$, $\int_{[a,b]} S_n dm = U_f(\mathcal{P}_n)$. Sea $g(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ y $G(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$. Ambas existen porque fijado el x, la sucesión $s_n(x)$ crece y está acotada por $f(x)$, y la $S_n(x)$ decrece y está acotada también por $f(x)$. La monotonía viene gracias a haber tomado las particiones crecientes. Se tiene entonces que $g \leq f \leq G$, y además:

$$\int_{[a,b]} (G-g)dm \leq \int_{[a,b]} (S_n - s_n)dm = U_f(\mathcal{P}_n) - L_f(\mathcal{P}_n) \leq \frac{1}{n}$$

De donde sigue que $\int_{[a,b]}(G-g)dm = 0$. Como $G - g \geq 0$, esto supone que $G = g$ en casi todo punto, y como $g \leq f \leq G$, entonces $G = g = f$ en casi todo punto.

Entonces, $\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} g dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n dm = \lim_{n\to\infty} L_f(\mathcal{P}_n) = \int_a^b f dx$, donde hemos usado el teorema de convergencia monótona dado que las $s_n \to g$ de manera creciente, y hemos acabado. $\square$

5. Producto de medidas

El objetivo es, dados dos espacios de medida, definir la medida en el producto.

Definición 32. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida. Dado $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, se define el **rectángulo medible** $A \times B$.

El objetivo es construir una σ-álgebra producto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que contenga a estos rectángulos medibles, y una manera de medirlos, es decir, $\mu \times \nu$ una *medida producto*, tal que además en todo rectángulo medible se tenga $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ definiremos $m \times m$, el producto de las medidas de Lebesgue, que se conoce como *medida de Lebesgue de* $\mathbb{R}^2$ y busca generalizar el concepto de área. Asimismo podrá hacerse en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 23. *La intersección de una cantidad numerable rectángulos medibles sigue siendo un rectángulo medible.*

Demostración. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, entonces $\bigcap A_n \times B_n = \bigcap A_n \times \bigcap B_n$ y cada uno de esos factores está en su respectiva σ-álgebra. □

Proposición 24. *La unión de un número finito de rectángulos medibles puede expresarse como unión disjunta y finita de rectángulos medibles.*

Demostración. Dados dos rectángulos $A \times B$ y $A' \times B'$, veamos que su diferencia consiste en 3 rectángulos medibles disjuntos: $(A\times B)\setminus(A'\times B') = (A\setminus A')\times(B\setminus B')\uplus(A\cap A')\times(B\setminus B')\uplus(A\setminus A')\times(B\cap B')$.

Ahora aplicamos inducción en el número de rectángulos. Si solo hay uno, la proposición es evidente. Suponiendo que el teorema se cumple para $n-1$ rectángulos, si tenemos $R_1, \dots, R_n$ n rectángulos medibles, tenemos que $\bigcup_1^n R_i = \bigcup_1^{n-1} R_i \cup R_n = \biguplus_1^m G_j \cup R_n$, y aplicamos la idea previa para obtener que $\biguplus_1^m G_j \cup R_n = \biguplus_{j=1}^m G_j \setminus R_n \uplus R_n$, y basta ahora con poner cada $G_j \setminus R_n$ como la unión disjunta de los 3 rectángulos vistos al inicio. □

Definición 33. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida. Se define la **σ-álgebra producto** $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ como la generada por los rectángulos medibles. Es decir, es $\langle\{A \times B : A \subset \mathcal{A}, B \subset \mathcal{B}\}\rangle$.

Proposición 25. *La familia* $\Pi_0 = \{\bigcup_{j=1}^N (A_j \times B_j), A_j \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B}\}$ *es un álgebra.*

Demostración. Sigue de las proposiciones 23 y 24. □

Definición 34. En la familia Π_0 definida anteriormente, se define $\rho(\biguplus_{j=1}^N (A_j \times B_j)) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\nu(B_j)$.

Véase que esta definición es posible gracias a la proposición 24.

Proposición 26. *La ρ definida previamente está bien definida y es una premedida en* Π_0.

Demostración. Basta con demostrar que si tenemos un rectángulo $A \times B = \biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j \times B_j$, entonces $\rho(A \times B) = \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j)$. De ahí seguirá inmediatamente la σ-aditividad, y que está bien definida. Tenemos que $\chi_{A\times B}(x, y) = \sum_j \chi A_j \times B_j(x, y)$, es decir, que $\chi_A(x)\chi_B(x) = \sum_j \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)$. Ahora integramos respecto de x, fijado el y, y se obtiene que: $\mu(A)\chi_B(y) = \sum_j \mu(A_j)\chi_{B_j}(y)$. Hemos podido escribir que la suma de integrales es la integral de la suma (posiblemente numerable) gracias a que todas las funciones son no negativas, luego utilizamos el teorema de convergencia monótona. Repetimos lo mismo integrando respecto de la y, y sigue que $\mu(A)\nu(B) = \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j)$. □

Definición 35. Por el teorema de Carathéodory II, podemos extender ρ a una medida completa ρ^* sobre la σ-álgebra Π_0^*. Como Π_0 contenía a los rectángulos medibles, entonces $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \Pi_0^*$. Se define la **medida producto** $\mu \times \nu := \rho^*|_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$.

Se define sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ puesto que es más cómodo de manejar, aunque esto viene con la desventaja de no garantizar que la medida producto sea completa en ese espacio.

Definición 36. Dados n espacios de medida $(X_j, \mathcal{A}_j, d\mu_j)$ con $1 \leq j \leq n$, poniendo Π_0 el álgebra dada por uniones finitas de rectángulos $R = A_1 \times \cdots \times A_n$ con cada $A_j \in \mathcal{A}_j$, y ρ definida de la misma manera que anteriormente, se aplica el teorema de Carathéodory II para obtener una medida completa ρ^*, Π_0^* que da lugar a la **medida producto** $d\mu_1 \times \cdots \times d\mu_n = \rho^*|_{\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n}$.

Si las μ_i son σ-finitas, pueden obtenerse los productos generalizados por inducción, es decir, por ejemplo: $d\mu_1 \times d\mu_2 \times d\mu_3 = (d\mu_1 \times d\mu_2) \times d\mu_3 = d\mu_1 \times (d\mu_2 \times d\mu_3)$.

5.1. Teoremas de Tonelli y Fubini

Definición 37. Sea $E \subset X \times Y$. Definimos las **secciones** de E como sigue: si $x \in X$, $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$, y si $y \in Y$, el $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$.

Definición 38. Dada $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, definimos las funciones $f_x : Y \to \mathbb{R}$, $f^y : X \to \mathbb{R}$, dadas por $f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$.

Proposición 27. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios con medida. Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, y tomamos $x \in X$, $y \in Y$, se tiene que $E_x \in \mathcal{B}$, $E^y \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Consideramos $R = \{E \subset X \times y : \forall x, y,\ E_x \in \mathcal{B}, E^y \in \mathcal{A}\}$. Se tiene que R contiene a los rectángulos $A \times B$, dado que todas las secciones de estos rectángulos son A, B o vacías. Además, R es σ-álgebra. Esto se sigue de observar que, para uniones numerables, $(\bigcup E_j)_x = \bigcup (E_j)_x$, y también $(E_x)^c = (E^c)_x$. Por lo tanto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset R$, y queda demostrada la proposición. □

Proposición 28. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios con medida. Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-medible, se tiene que f_x es $\mathcal{B}$-medible y f^y es $\mathcal{A}$-medible, cualesquiera sean $x \in X$, $y \in Y$.*

Demostración. Obsérvese que $(f_x)^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, b])_x = \{y \in Y : f(x, y) \in [a, b]\}$. Por tanto, como f es medible, $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, de tal manera que su sección $f^{-1}([a, b])_x \in \mathcal{B}$, luego $(f_x)^{-1}([a, b]) \in \mathcal{B}$ y hemos acabado. Análogo para f^y. □

Observación 19. Dadas medidas μ, ν finitas, si hay un $F \subset X$ que no es μ-medible, y $G \subset Y$ es un conjunto ν-medible con $\nu(G) = 0$, se tiene que $F \times G \subset X \times G$ y como $(\mu \times \nu)(X \times G) = \mu(X)\nu(G) = 0$, si el producto fuese completo, $F \times G$ sería medible, pero entonces su sección $(F \times G)^g$, para algún $g \in G$, es F que no es medible, en contradicción con lo anterior. De aquí se deduce que la medida producto puede no ser completa.

Definición 39. La familia $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ se dice que es una **clase monótona** si es cerrada por uniones crecientes e intersecciones decrecientes, numerables. Es decir, que si $\{E_i\} \subset \mathcal{C}$ verifica $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, entonces $\bigcup E_i \in \mathcal{C}$, y si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, entonces $\bigcap E_i \in \mathcal{C}$.

Lema 3. *Si $\Pi_0 \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ es un álgebra, y $\Pi_0 \subset \mathcal{C}$ una clase monótona, entonces la σ-álgebra generada verifica $\sigma(\Pi_0) \subset \mathcal{C}$.*

Demostración. Es fácil verificar que la intersección de clases monótonas sigue siendo clase monótona. Así, podemos definir la menor clase monótona que contiene a Π_0, digamos $\mathcal{C}_0$, como la intersección de todas las que la contienen. Así, se tiene que $\Pi_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$. Para concluir, basta con demostrar que $\mathcal{C}_0$ es un σ-álgebra, y de hecho, basta con ver que es un álgebra, puesto que toda álgebra cerrada por uniones crecientes numerables es un σ-álgebra.

Dado $A \in \mathcal{C}_0$, ponemos $\mathcal{C}_0(A) = \{B \in \mathcal{C}_0 : A \cup B, (A \cup B)^c \in \mathcal{C}\}$. El objetivo es ver entonces que no solo $\mathcal{C}_0(A) \subset \mathcal{C}_0$ sino que vale la igualdad. Observamos que $B \in \mathcal{C}_0(A) \iff A \in \mathcal{C}_0(B)$, y puede comprobarse que $\mathcal{C}_0(A)$ es también una clase monótona. Asimismo si $A \in \Pi_0$, $\Pi_0 \subset \mathcal{C}_0(A)$. Entonces, por las dos observaciones anteriores, $C_0(A) = C_0\ \forall A \in \Pi_0$.

Es decir, $\forall B \in \mathcal{C}_0$ y $A \in \Pi_0$, tenemos que $B \in \mathcal{C}_0(A)$ luego $A \in \mathcal{C}_0(B)$, es decir, $\Pi_0 \subset \mathcal{C}_0(B)$ y por tanto $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0(B)$ al ser $\mathcal{C}_0$ la menor clase monótona que contiene a Π_0. Entonces sigue que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(B)$ $\forall B \in \mathcal{C}_0$. Se concluye entonces que si $A, B \in \mathcal{C}_0$, se tiene que $A, B \in \mathcal{C}_0(B)$ y por tanto $A \cup B$ y $(A \cup B)^c$ pertenecen a $\mathcal{C}_0$ y si se pone $B = A$, A^c también, y por tanto $\mathcal{C}_0$ es álgebra. □

Teorema 11 (Tonelli-Fubini)**.** *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos.*

1. *(Tonelli) Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-medible y no negativa, las funciones $g : x \to \int_Y f_x d\nu$ y $h : y \to \int_X f^y d\mu$ son medibles y se verifica:*

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X gd\mu = \int_Y hd\nu.$$

Es decir:

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_Y \int_X f^y d\mu d\nu.$$

2. *(Fubini) Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es integrable ($f \in L^1(\mu \times \nu)$), es decir, $\int_{X\times Y} |f|(d\mu \times d\nu) < \infty$, se tiene que las funciones $g : x \to \int_Y f_x d\nu$ y $h : y \to \int_X f^y d\mu$ son integrables respecto de sus medidas en casi todo punto, y se cumple de nuevo:*

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_Y \int_X f^y d\mu d\nu.$$

Demostración. En primer lugar, sea $E \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Vamos a probar el teorema de Tonelli para $f = \chi_E$, en cuyo caso $\int_Y f_x d\nu = \nu(E_x)$ y también $\int_X f^y d\mu = \mu(E^y)$, luego la expresión se convierte en $(\mu \times \nu)(E) = \int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \nu(E_x)d\mu = \int_Y \mu(E^y)d\nu$. Para demostrarlo:

- Si μ, ν son finitas, ponemos $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E$ verifica el resultado$\}$. Es decir, $E \in \mathcal{C} \iff x \to \nu(E_x)$, $y \to \mu(E^y)$ son medibles, y se tiene $(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)d\mu = \int_Y \mu(E^y)d\nu$. En primer lugar, $\mathcal{C}$ contiene a los rectángulos medibles, puesto que si $E = A \times B$, entonces $(\mu \times \nu)(E) = \mu(A)\nu(B)$, y como $E_x = B \iff x \in A$, y si no es vacío, se tiene que la integral a considerar es: $\int_A \nu(B)d\mu = \mu(A)\nu(B)$, luego se verifica efectivamente.

  Asimismo, por aditividad, $\mathcal{C}$ contiene al álgebra Π_0 de uniones disjuntas finitas de rectángulos medibles. Se afirma asimismo que $\mathcal{C}$ es una clase monótona, de donde se seguirá, por el lema previo, que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{C}$. Para verlo, sean $\{E_j\} \subset \mathcal{C}$ crecientes y $E = \bigcup E_j$. Sabemos que $\int_Y \mu(E_n^y)d\nu = (\mu \times \nu)(E_n)$. Si escribimos $\varphi_n(Y) = \mu(E_n^y)$, que $\varphi_n(Y) \to \mu(E^y)$ utilizando que la medida de la unión de conjuntos crecientes es el limite de las medidas. Utilizando el teorema de la convergencia monótona, se pasa al límite para ver que $\int_Y \mu(E^y)d\mu = \lim_{n\to\infty} (\mu \times \nu)(E_n) = (\mu \times \nu)(E)$, donde se ha vuelto a usar el resultado sobre límite de medidas de conjuntos crecientes. Se hace análogo para las x-secciones, y, por tanto, $E \in \mathcal{C}$.

  El mismo argumento sigue para una familia decreciente, usando el teorema de convergencia monónona para funciones decrecientes, que sigue de que las integrales sean finitas porque las medidas son finitas. Por tanto, hemos acabado con este caso.

- Si μ, ν no son finitas, pero son σ-finitas (recordemos que se pide esto en el teorema), es decir $X = \bigcup X_n$, $Y = \bigcup Y_n$, y $\mu(X_n), \nu(Y_n) < \infty$. Podemos asumir los X_n y los Y_n crecientes, con el procedimiento habitual (si no lo son, los reemplazamos por las uniones parciales). Tomamos $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Definimos $E_n = E \cap (X_n \times Y_n)$, y aplicamos la parte previa del teorema para establecer que $\int_X \nu(E_n)_x d\mu = \int_Y \mu(E_n^y) d\nu = (\mu \times \nu)(E_n)$. Se aplica ahora el teorema de convergencia monótona para obtener el resultado para E, viendo que $E = \bigcup E_n$.

Esto demuestra el teorema de Tonelli para funciones características. Ahora demostraremos el caso general. Como el resultado se tiene para combinaciones lineales de características (por linealidad en suma y producto por escalar en la integral), se tiene también para funciones simples no negativas. Ahora, si $f \geq 0$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-medible, tomamos una sucesión s_n de funciones simples medibles crecientes con $s_n \to f$ puntualmente.

Escribimos $\int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y s_n d\nu d\mu$, que sabemos que se tiene, y se tiene por el teorema de convergencia monótona que, como $\int_Y s_n d\nu \to \int_Y f d\nu$ de manera creciente (también por convergencia monótona), se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \nu) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X \int_Y s_n d\nu d\mu = \int_X \int_Y f d\nu d\mu$. Ahora se utiliza el teorema de convergencia monótona para la medida producto, para ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu)$, y se concluye la prueba.

Para el teorema de Fubini, basta con poner $f = f^+ - f^-$, aplicar Tonelli a f^+ y f^-, y usar la linealidad de la integral al ser las funciones en cuestión integrables. □

Un análogo para espacios completos:

Teorema 12. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida completos y σ-finitos. Sea $(X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}, \lambda)$ la complección de $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$. Si f es λ-medibles y $f \geq 0$, o bien $f \in L^1(\lambda)$, se tiene que f_x es $\mathcal{B}$-medible en ν-casi todo punto, f^y es $\mathcal{A}$-medible en μ-casi todo punto, las funciones $x \to \int_Y f_x d\nu$, $y \to \int_X f^y d\mu$ son medibles y se tiene:*

$$\int_{X \times Y} f d(\lambda) = \int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_Y \int_X f^y d\mu d\nu$$

La idea de la demostración es que al ser λ la complección de $\mu \times \nu$, dada un f que es λ-medible va a haber una $\tilde{f}$ que coincide con f en λ-casi todo punto y que es $\mu \times \nu$-medible, y se puede aplicar el teorema previo a la $\tilde{f}$.

5.2. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición 40. Consideramos n copias del espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ de medida de Lebesgue. Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}, \tilde{m}_n = m \times \cdots \times m)$ el espacio producto. La medida $\tilde{m}_n$ ya se vio que no es completa. Por ejemplo si A mide 0 y B es no medible, el $A \times B \subset A \times \mathbb{R}$ debería ser medible, pero $A \times B$ no lo es por ser una de sus secciones B, que no es medible.

Definimos **la medida de Lebesgue en** $\mathbb{R}^n$, m_n, como la extensión de Carathéodory de $\tilde{m}_n$, que coincide con su complección al ser σ-finita. La σ-álgebra resultante se denota $\mathcal{L}_n$ y se denomina **conjuntos lebesgue-medibles de** $\mathbb{R}^n$.

Si empezamos con rectángulos usuales (productos exclusivamente de intervalos), en lugar de todos los rectángulos medibles, y llevamos a cabo todo el mismo procedimiento (con la premedida dada por el producto de las longitudes de cada intervalo), por unicidad se termina en la misma medida.

Proposición 29. *Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es una unión numerable de cubos de lados paralelos a los ejes (intervalos usuales, es decir, productos cartesianos de intervalos) casi disjuntos (es decir, de interiores disjuntos).*

Demostración. Consideramos cubos de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$ que verifican $|I_j| = 2^{-k}$ y los vértices de la forma $(m_1 2^{-k}, m_2 2^{-2}, \ldots, m_n 2^{-k})$, con los $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$. Estos los denominaremos **cubos diádicos** de orden k y la familia de ellos se denotará por D^k. Observemos que si Q, Q' son cubos diádicos, o bien son disjuntos, o bien solo se intersecan como mucho en su frontera (no en su interior). Asimismo, recubren todo $\mathbb{R}^n$ (de hecho, solo los de D^k lo hacen, fijado el K, colocándolos de forma adyacente). Para terminar, solo tenemos que ver que todo abierto U es unión de cubos diádicos, porque hay una cantidad numerable de ellos. Obsérvese que si $x \in U$, hay un cubo diádico Q con $x \in Q \subset U$. Esto es así porque tomando $B(x,\delta) \subset U$, elegimos $2^{-k} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, y podemos tomar $Q \in D^k$ con $x \in Q$ (dado que cubren $\mathbb{R}^n$), y si $y \in Q$, $|x-y| < 2^{-k}\sqrt{n} < \delta$ luego $Q \subset U$ como queriamos.

Así, $Q_x \subset U$ y además $U \subset \bigcup Q_x$ porque hay un Q_x por cada x. La familia es en realidad numerable, como hemos observado antes, y basta con ir uno por uno eliminando aquellos que se contengan en alguno de los anteriores, para asegurar que son todos casi disjuntos. □

Proposición 30. *Se tiene que* $\forall A \in \mathcal{L}_n$, *puede ponerse* $m_n(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : A \subset \bigcup R_j\}$, *siendo los* R_j *rectángulos auténticos (cubos). Asimismo,* m_n *es regular, es decir,* $m_n(A) = \inf\{m_n(C) : A \subset C, C$ *abierto*$\}$ *y* $m_n(A) = \sup\{m_n(K) : K \subset A, K$ *compacto*$\}$.

Lo primero sigue de usar como premedida el tamaño de los cubos, como se apuntó previamente. Lo segundo se demuestra análogo a $\mathbb{R}$, con el lema previo.

Teorema 13. *Si* $A \subset \mathcal{L}_n$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $x_0 + A \in \mathcal{L}_n$, *y* $m_n(A + x_0) = m_n(A)$. *Asimismo, si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es medible Lebesgue, no negativa o integrable, se tiene que* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_0 + x) dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm_n$.

Demostración. La primera parte sigue de la proposición previa, puesto que al desplazar los rectángulos no cambia su tamaño y pasan a cubrir al conjunto desplazado, y entonces su ínfimo tampoco cambia. La segunda parte se deduce para funciones simples utilizando la primera, y de ahí se extiende fácilmente a todas. □

Proposición 31. *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es medible de Lebesgue, hay una* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *medible Borel que coincide con* f *en casi todo punto.*

Demostración. Si $A \in \mathcal{L}_n$, hay borelianos B, C tales que $B \subset A \subset C$ con $m_n(C \setminus B) = 0$. Si $f \geq 0$, es porque hay $s_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ simples que convergen a f, y lo único que hay que hacer es reemplazar la s_n por $\tilde{s}_n$ que es borel medible, sustituyendo los soportes A_j de s_n por el C_j tal que $B_j \subset A_j \subset C_j$, borel medible. Solo difieren en los $C_j \setminus A_j$ que miden 0. Denotamos E a todo este conjunto donde difiere. Definimos ahora la $g(x) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = f$ en E^c, y $g(x) = 0$ en E, g es de Borel, y coincide con f en casi todo punto (E^c). Para el caso de funciones integrables, no necesariamente positivas, hacemos el reemplazo en sus componentes no negativas f^+,f^-, y usamos que la resta de dos funciones borel-medibles es borel-medible. □

Teorema 14. *Si* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es lineal y* $\det T \neq 0$, *entonces si* $A \in \mathcal{L}_n$ *entonces* $T(A) \in \mathcal{L}_n$ *y* $m_n(T(A)) = |\det T| m_n(A)$.

Asimismo, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es medible de Lebesgue, no negativa o integrable, se tiene que* $f \circ T$ *es medible de Lebesgue y:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dm_n = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x)) dm_n$$

Demostración. Vamos a demostrar la segunda parte, puesto que la primera sigue de aplicar la segunda a χ_A. Primero lo demostraremos para una f medible Borel. Como T es lineal, e invertible, manda la σ-álgebra de Borel en si misma luego $f \circ T$ es medible Borel. Obsérvese que si la fórmula es válida para T y S, también lo es para $T \circ S$, dado que aplicándola paso a paso sigue finalmente que $\int_{\mathbb{R}^n} f dm_n = |\det T||\det S| \int_{\mathbb{R}^n} f(T(S(x))) dm_n$, y como $|\det TS| = |\det T||\det S|$, vale la fórmula. Por tanto basta con probar el teorema solo para aplicaciones lineales elementales, dado que toda aplicación lineal se descompone en producto de ellas. Lo ilustramos para $n = 2$. Consideramos la aplicación elemental $(x, y) \to (x, ax + y)$, que es una elemental. Por Fubini o Tonelli, según corresponda:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, ax + y)dm = \int\int f(x, ax + y)dydx = \int\int f(x, y)dydx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dm$$

Donde se hace el cambio de variables para una integral. El resto de aplicaciones elementales pueden comprobarse manualmente de forma sencilla. Así, se obtiene el resultado para funciones de Borel, y el primer punto para conjuntos de Borel, puesto que se aplica el resultado para $\chi_A(T(x)) = \chi_{T^{-1}(A)}(x)$. Ahora, dado un medible de Lebesgue cualquiera A, tomamos los conjuntos borel $B \subset A \subset C$ con $m(C \setminus B) = 0$, luego $T(B) \subset T(A) \subset T(C)$ y $m(T(C) \setminus T(B)) = m(T(C \setminus B)) = 0$ por la primera parte del teorema, y por tanto $T(A)$ es medible Lebesgue.

Para terminar de ver la segunda parte, dada una $f \geq 0$, medible Lebesgue, sustituimos la f por $\tilde{f}$ manteniendo solo los valores en B, de tal modo que $\tilde{f}$ es medible borel y solo cambia en un conjunto de medida 0. Análogamente si f es integrable. □

Como corolario, si $c \neq 0$, entonces $\int f(cx)dm_n = \frac{1}{|c|^n} \int f(x)dm_n$.

6. Medidas inducidas

Definición 41. Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Se dice que $\varphi : X \to Y$ es **medible** si $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Definición 42. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(Y, \mathcal{B})$ un espacio medible. Se define la **medida inducida** por una función medible φ como $\mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ para $B \in \mathcal{B}$.

Es inmediato comprobar que se tienen las propiedades.

Teorema 15. *En el contexto anterior, se tiene que para un f medible en Y, no negativa o integrable respecto de μ_φ, se tiene:*

$$\int_Y f d\mu_\varphi = \int_X f(\varphi(x))d\mu$$

Demostración. Si $f = \chi_B$ para un $B \in \mathcal{B}$, sigue directamente de la definición porque $\chi_B \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(B)}$. Por tanto, sigue también para funciones simples. Para funciones no negativas se aplica con convergencia monótona tomando una sucesión creciente de simples que converja a la función, y para integrables se aplica por separado a f^+ y f^-. □

Teorema 16. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo regular, es decir, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, biyectiva, y además $\mathcal{J}(x) = \det Df(x) \neq 0$ en todo $x \in \Omega$. Entonces, sabemos del teorema de la función inversa que:*

1. *$\varphi(\Omega)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$ verifica $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1(\varphi(\Omega))$.*

Se tiene entonces que, dada $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$, medible de Lebesgue y no negativa o integrable, se tiene:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dm(y) = \int_\Omega f(\varphi(x))|\mathcal{J}(x)|dm(x).$$

Es decir, que si $d\mu(x) = |\mathcal{J}(x)|dm(x)$, se tiene que $d\mu_\varphi(y) = dm(y)$, o lo que es lo mismo, que $\mu(A) = \int_A |\mathcal{J}(x)|dm(x)$ si $A \subset \Omega$.

Demostración. Vamos a comenzar viendo que si Q es un cubo (usual) cerrado en Ω, entonces $m_n(\varphi(Q)) \leq \int_Q |\mathcal{J}| dm_n(x)$. En lo que sigue, las normas son $\|\cdot\|_\infty$, es decir, $\|x\| = \max |x_j|$, y si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|A\| = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Sea $C = \max_{x\in Q}\{\|D\varphi(x)\|, \|D\varphi(x)^{-1}\|\}$, que existe por continuidad y ser Q compacto. Definimos $f_j(t) = \varphi_j(x+tu)$ para los x y u tales que $x, x+u \in Q$. Del teorema de valor medio sabemos que $f_j(1) = f_j(0) + f_j'(\xi_j)$ con $0 \leq \xi_j \leq 1$, de tal modo que, usando la regla de la cadena:

$$\varphi_j(x+u) = \varphi_j(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j(x+u\xi_j)u_k$$

que, tras aplicarlo en todas las j, lo podemos abreviar como $\varphi(x+u) = \varphi(x) + \tilde{D}(x,u)u$. Por ser $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$ y ser Q compacto, se tiene que la función $D\varphi(x)$ es absolutamente continua, y por tanto si $\epsilon > 0$, se tiene un $\delta > 0$ tal que si $\|u\| < \delta$, entonces $\left\|\tilde{D}(x,u) - D\varphi(x)\right\| < \frac{\epsilon}{C}$, puesto que $\tilde{D}(x,u)$ tiene como cada una de sus entradas a $\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j(x+\xi_j u)$, que es un desplazamiento menor que δ porque $\|\xi_j u\| \leq \|u\| < \delta$.

Denotamos $\tilde{D} = \tilde{D}(x,u)$ y $D = D\varphi(x)$. Entonces sigue ahora que $\varphi(x+u) = \varphi(x) + \tilde{D}u = \varphi(x) + Du + (\tilde{D}-D)u = \varphi(x) + D[u + D^{-1}(\tilde{D}-D)u]$. Si ponemos $\tilde{Q}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta\}$ al cubo de lado 2δ centrado en el origen, vemos que si $\delta_1 < \delta$ y $u \in Q_{\delta_1}$, se verifica:

$$\left\|u + D^{-1}(\tilde{D}-D)u\right\| \leq \|u\| + \left\|D^{-1}\right\| + \left\|(\tilde{D}-D)u\right\| \leq \|u\|\left(1 + C\frac{\epsilon}{C}\right) = (1+\epsilon)\|u\|$$

De tal modo que en ese caso:

$$\varphi(x+u) \in \varphi(x) + [(1+\epsilon)D\varphi(x)]\,\tilde{Q}_{\delta_1}$$

Si ahora dividimos el cubo Q en k^n cubos casi disjuntos Q^j de lado $2\delta_1 < 2\delta$, y denotamos por x^j el centro de Q^j, es decir, de tal modo que $Q^j - x^j = \tilde{Q}_{\delta_1}$, lo que se tiene es, aplicando el resultado previo para centro x_j y todos los $u \in \tilde{Q}_{\delta_1}$, que:

$$\varphi(Q^j) \subset \varphi(x^j) + (1+\epsilon)D\varphi(x^j)(Q^j - x^j)$$

Es decir, la imagen de ese cubo está contenida en un paralelepípedo con centro la imagen del centro del cubo. Por tanto:

$$m_n(\varphi(Q^j)) \leq |\mathcal{J}(x^j)|(1+\epsilon)^n m_n(Q^j)$$

Sumando todos los cubos:

$$m_n(\varphi(Q)) \leq (1+\epsilon)^n \sum_{j=1}^{k^n} |\mathcal{J}(x^j)| m_n(Q^j)$$

Pasando al límite $k \to \infty$:

$$m_n(\varphi(Q)) \leq (1+\epsilon)^n \int_Q |\mathcal{J}(x)| dm_n$$

Y como ϵ es arbitrario se sigue la desigualdad buscada. Ahora podemos probar el teorema principal.

Para ello empezaremos viendo que $\int_{\varphi(\Omega)} f dm \leq \int_\Omega (f\circ\varphi)(x)|\mathcal{J}(x)|dm$. Pongamos primero que $f(y) = \chi_A$ para $A \subset \varphi(\Omega)$ medible. Sea $B = \varphi^{-1}(A)$. Entonces lo que hay que probar es que $m(\varphi(B)) = \int_B |\mathcal{J}| dm$. Si B es un cubo, por todo lo visto hasta ahora se verifica. Si B es acotado, es decir, tal que

$\overline{B} \subset U$ para cierto abierto, sabemos que existe una sucesión de abiertos $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset B$ tales que $m(B) = \lim_{n\to\infty} m(U_n)$ por regularidad exterior. Entonces puede aplicarse el teorema de convergencia monótona, usando además que los abiertos pueden ponerse como unión numerable de cubos casi dsijuntos (ya visto anteriormente):

$$m(\varphi(B)) = \lim_{k\to\infty} m(U_n) \leq \lim_{k\to\infty} \int_{U_k} |\mathcal{J}| dm = \lim_{k\to\infty} \int_U |\mathcal{J}| \chi_{U_k}(x) dm = \int_B |\mathcal{J}| dx$$

Para la última igualdad se usa el teorema de convergencia monótona en sucesiones decrecientes, y que $\chi_{U_k} \to \chi_B$. Ahora, si B no es acotado, podemos poner $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap Q_n)$ para una sucesión de cubos $\{Q_n\}$ casi disjuntos que recubren $\mathbb{R}^n$, y entonces la desigualdad buscada se obtiene para B, aplicando convergencia monótona y el resultado para cada $B \cap Q_n$ que es acotado.

Ahora que se ha probado la desigualdad para funciones simples, se aplica el teorema de convergencia monótona para obtenerlo en cualquier f no negativa, con la sucesión creciente de funciones simples que converge a f. Para la desigualdad inversa, basta con aplicar la que ya tenemos a $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$, y a la función $g(x) = (f \circ \varphi)(x)|\mathcal{J}(x)|$:

$$\int_\Omega (f \circ \varphi)(x)|\mathcal{J}(x)| = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(\Omega))} g dm \leq \int_{\varphi(\Omega)} (g \circ \varphi^{-1})|\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}(y)| = \int_{\varphi(\Omega)} f(y) dm$$

Y entonces si $f \geq 0$ vale la igualdad al tener las dos desigualdades. Finalmente, si $f \in L^1(\varphi(\Omega), dm)$, escribimos $f = f^+ - f^-$ como es habitual, aplicamos el resultado a cada $f^+, f^- \geq 0$ no negativa, y restamos los resultados. $\square$

7. Teorema de Radon-Nikodym

Definición 43. Sean ν, μ dos medidas definidas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Se dice que ν **es absolutamente continua con respecto a** μ, y se denota $\nu << \mu$, si $\forall E \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$.

Por ejemplo, si $g \in L^1(\mu)$, $g \geq 0$, la medida $\nu = gd\mu$ dada por $\nu(A) = \int_A gd\mu$ es absolutamente continua respecto de μ.

Proposición 32. *Si ν es finita, y $\nu << \mu$, se tiene que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \delta \implies \nu(E) < \epsilon$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, hay $E_n \in \mathcal{A}$ con $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ pero $\nu(E) \geq \epsilon$. Se denota $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, y $F = \bigcap F_n$, de tal manera que $F = \limsup E_k$. Por tanto $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, de tal forma que $\mu(F) \leq \mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$, luego $\mu(F) = 0$. Por otro lado, al ser ν finita y los F_n decrecientes, se tiene: $\nu(F) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n) \geq \epsilon$, al tener todos los E_n medida ν mayor que ϵ. Por tanto, $\nu(F) \neq 0$, lo que es una contradicción. □

Definición 44. Una función $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ sobre un σ-álgebra $\mathcal{A}$ es una **medida con signo** si:

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) < \infty$ o bien $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) > -\infty$. Es decir, no puede haber dos conjuntos, uno con medida infinita positiva y otro con medida infinita negativa.
3. $\nu(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.

Por ejemplo, dadas dos medidas sobre $\mathcal{A}$, al menos una de ellas finita, su resta es una medida con signo.

Definición 45. Sea ν una medida con signo en $\mathcal{A}$ y sea $B \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Se dice que B es **positivo** si $\nu(B \cap E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Análogamente se define B **nulo** y B **negativo**.

Teorema 17 (Descomposición de Hahn-Jordan)**.** *Sea ν una medida con signo sobre el σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, $\exists P, N \in \mathcal{A}$ disjuntos, con $X = P \uplus N$, y tales que P es positivo y N es negativo.*

Asimismo, si se define $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$ y $\nu^-(A) = \nu(A \cap N)$, con $A \in \mathcal{A}$, entonces ν^+ y $-\nu^-$ son medidas, y $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Definición 46. En el contexto del teorema anterior, ν^+ y ν^- se definen como las **variaciones positivas y negativas** de ν, y $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ es la **variación total**.

Definición 47. Dadas dos medidas ν, μ en el σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X, se dice que son **mutuamente singulares**, y se denota $\nu \perp \mu$, si $\exists A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, y $\mu(B) = \nu(A) = 0$.

Por ejemplo, en la descomposición de Jordan, se tiene que $\nu^+ \perp \nu^-$.

Definición 48. Sea μ una medida positiva, y ν una medida con signo. Se dice que ν es absolutamente continua respecto de μ si $\forall B \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu(B) = 0 \to \nu(B) = 0$.

Es fácil ver que $\nu << \mu \iff \nu^+ << \mu$ y $\nu^- << \mu \iff |\nu| << \mu$, que $\nu \perp \mu, \nu << \mu \implies \nu \equiv 0$, y que $\nu \perp \mu \iff \nu^+ \perp \mu$, $\nu^- \perp \mu$.

Lema 4. *Si ν y μ son medidas finitas en $\mathcal{A}$, entonces o bien $\nu \perp \mu$, o bien $\exists \epsilon > 0$, $E \in \mathcal{A}$, tal que $\mu(E) > 0$ y $\nu(B) \geq \epsilon\mu(B)$ si $B \subset E$. Es decir, E es positivo para $\nu - \epsilon\mu$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$, que es una medida con signo. Se aplica la descomposición de Hahn-Jordan a esta medida, para obtener los P_n,N_n. Ponemos $P = \bigcup P_n$ y $N = X \setminus P = \bigcap N_n$. De esta manera, $X = P \uplus N$. Como $N \subset N_n$, se tiene que $\nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A) \leq 0$, $\forall A \subset N$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular, $\nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N)$ y por lo tanto $\nu(N) = 0$, al ser μ finita y pasando al límite. Si $\mu(P) = 0$ hemos acabado porque μ y ν entonces son mutuamente singulares. Si, por otro lado, $\mu(P) > 0$, se tiene que $\mu(P_{n_0}) > 0$ para cierto n_0 (de lo contrario, por subaditividad se tendría $\mu(P) = 0$). Por lo tanto, basta con poner $E = P_{n_0}$ y $\epsilon = \frac{1}{n_0}$. □

Teorema 18 (Radon-Nikodym)**.** *Sea μ una medida σ-finita, y ν una medida finita con signo, ambas definidas sobre el σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\nu = \lambda + \rho$, donde λ y ρ son medidas finitas con signo, $\lambda \perp \mu$, $\rho << \mu$. Además $\exists f_0 \in L^1(\mu)$ con $d\rho = f_0 d\mu$. Es decir: $\nu = \lambda + f_0 d\mu$, con $\lambda \perp \mu$. La función f_0 se denomina* ***derivada de Radon-Nikodym*** *de ν respecto de μ, y se escribe $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$.*

Demostración. Puede suponerse que ν es también positiva, porque si no consideramos ν^+ y ν^- de la descomposición de Jordan por separado y después restamos ambas expresiones de Radon-Nikodym. Asimismo, puede suponerse que μ es finita, dado que si no, se representa $X = \biguplus X_n$ con $\mu(X_n) < \infty$, se aplica el resultado a las medidas restringidas a cada trozo X_n, y luego se juntan los resultados. Definimos la familia $\mathcal{F} = \{f : X \to [0, \infty]$ medible $: \int_E f d\mu \leq \nu(E)\ \forall E \in \mathcal{A}\}$. Es decir, $f \in \mathcal{F} \iff d\nu - f d\mu$ es positiva. Primero veamos que si $f, g \in \mathcal{F}$, entonces $h := \text{máx}(f, g) \in \mathcal{F}$. Ya sabemos que es medible, y además si denotamos $D = f > g$, que es medible, entonces $\int_E h d\mu = \int_{E \cap D} h d\mu + \int_{E \setminus D} h d\mu \leq \nu(E \cap D) + \nu(E \setminus D) = \nu(E)$. Sea entonces $a = \sup\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{F}\}$. Como todas esas integrales están acotadas superiormente por $\nu(X)$, se tiene $a < \infty$. Escogemos $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ con $\int_X f_n d\mu \to a$, y ponemos $g_n = \text{máx}\{f_1, \ldots, f_n\}$. Por lo visto anteriormente, $g_n \in \mathcal{F}$, y además son crecientes, y $\int_X g_n d\mu \to a$. Definimos $f_0(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Por convergencia monótona se tiene que $\int f_0 d\mu = a$, y asimismo es fácil verificar que $f_0 \in \mathcal{F}$ usando también la convergencia monótona.

Definimos $d\lambda = d\nu - f_0 d\mu$. Como $f_0 \in \mathcal{F}$, se tiene entonces que λ es una medida (no negativa), y por definición $d\nu = d\lambda + f_0 d\mu$. Ya solo queda por ver que $d\lambda \perp d\mu$. Si no fuese así, por el lema previo, habría $E \in \mathcal{A}$ y $\epsilon > 0$ con $\lambda(E) > 0$ y E es positivo para $d\lambda - \epsilon d\mu$. Es decir, que $d\lambda - \epsilon\chi_E d\mu = d\nu - (f_0 + \epsilon\chi_E)d\mu$ es una medida positiva en X, pero entonces $f_0 + \epsilon\chi_E \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción puesto que $\int(f_0 + \epsilon\chi_E)d\mu = a + \epsilon\mu(E) > a$, que era el supremo. □

Observación 20 (Descomposición Radon-Nikodym de medidas finitas de Borel). Sea μ una medida finita de Borel en $\mathbb{R}$. Sean $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ todos los puntos de $\mathbb{R}$ con $\mu(\{t_n\}) > 0$. Solo es una cantidad numerable, o si no la medida no sería finita. Sea $T = \bigcup t_n$. Entonces $\mu = \chi_T\mu + \chi_{\mathbb{R}\setminus T}\mu$. Ponemos $\chi_T\mu = \mu_d$, que es una medida discreta, y $\chi_{\mathbb{R}\setminus T}\mu = \mu_c$ la parte continua.

Por Radon-Nikodym aplicado a μ_c y dm, se tiene $\mu_c = \mu_s + \mu_{ac}$, siendo μ_s la parte singular con respecto a m, con $\mu_s \perp dm$, y $\mu_{ac} << m$, la parte absolutamente continua con $\mu_{ac} = f dm$ para cierta $f \geq 0$ integrable.

Así, podemos poner $\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_{ac}$.

Definición 49. Sea $(c, d) \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito o infinito y $F : (c, d) \to \mathbb{R}$. Se dice que es **absolutamente continua** si $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0$ tal que si se particiona el intervalo en subintervalos $(a_k, b_k) \subset (c, d)$ con $\sum_k(b_k - a_k) < \delta$, entonces $\sum |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$.

Teorema 19. *Sea $(c, d) \subset \mathbb{R}$ finito o infinito, $F : (c, d) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (c, d)$. Son equivalentes:*

1. *F es absolutamente continua.*
2. *$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ donde $f \in L^1((c, d), m)$.*
3. *F es diferenciable en casi todo punto de (c, d), $F' \in L^1((c, d), m)$ y $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} F'dt$.*

En ese caso, $F' = \frac{dF}{dm}$, la derivada de Radon-Nikodym.