Topología

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Enero de 2021

$$\mathrm{Aut}(\tilde{X}, \pi) \simeq \pi_1(X)$$

Revisado en 2022
Apuntes de la asignatura impartida por Ernesto Girondo
en la Universidad Autónoma de Madrid en Enero de 2021.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Topología del grado en matemáticas, tomados en Enero de 2021 por Miguel González. La asignatura fue impartida por Ernesto Girondo. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Topología

En esta asignatura se introduce la *topología general*, rama centrada en el estudio de los espacios topológicos. Estos espacios son aquellos en las que se tiene una noción de *abierto*, que codifica la cercanía entre puntos, sin tener explícitamente nociones de distancia.

Los espacios topológicos son ubicuos en matemáticas, y por tanto su estudio resulta esencial tanto dentro de la propia topología como en muchas otras ramas (geometría diferencial, geometría algebraica, topología algebraica...).

Requisitos previos

1. Conocimientos de teoría de conjuntos.
2. Conocimientos de topología en espacios métricos.
3. Conocimientos de álgebra (grupos).

Índice

1. Espacios Topológicos

1.1. Espacios métricos

Antes de presentar el concepto de espacio topológico, introduciremos la noción de *espacio métrico*, que es un caso particular más intuitivo.

Definición 1. Sea X un conjunto. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ es una **métrica o distancia** si verifica, $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

El par (X, d) se conoce como **espacio métrico**.

Definición 2. Dado el espacio métrico (X, d), un punto $x \in X$ y un radio $r > 0$, se define la **bola abierta de centro en x y radio r** por $B(x, r) = \{y \in X : B(x, y) < r\}$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ tenemos $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ la distancia euclídea usual. La verificación de las propiedades es fácil y se trata en cursos anteriores. Sus bolas son *círculos abiertos* de radio r.

Otro ejemplo es la métrica discreta en un $X \neq \emptyset$ cualquiera, dada por $d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$. Sus bolas son o bien el propio punto $\{x\} = B(x, r)$ si $r < 1$, o bien todo X si $r \geq 1$. Esto ilustra que en todo conjunto, sea cual sea, existe una noción de distancia.

Otra cosa a tener en cuenta es que en un mismo conjunto puede haber múltiples distancias. En $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, además de las dos vistas, tenemos $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, o bien $d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, así como otras muchas. Las bolas de estas distancias, como es lógico, son diferentes a las de la euclídea (es fácil ver cual es su forma: cuadrada en ambos casos).

Finalmente veremos un último ejemplo en $\mathbb{R}^2$ que no se parece ni a la discreta ni a la euclídea (puesto que d_1 y d_∞ son intuitivamente *parecidas* a d_2, aunque sus bolas tengan formas distintas). Consideramos $d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ \|x - y\| \text{ si } x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\| \text{ en otro caso.} \end{cases}$. Esta métrica se conoce como *de los trenes franceses*, puesto que, suponiendo la estación central (París) en el origen, y vías radiales, la distancia entre dos puntos alineados (cuya recta pasa por el origen) es la usual (en línea recta: hay una vía), pero si no están alineados es la suma de sus distancias al origen (hay que pasar por el centro).

Definición 3. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **converge a $x \in X$** si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, es decir, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies d(x_n, x) < \epsilon$. Se denota $x_n \to x$.

Otras formas equivalentes de poner esta definición son que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \epsilon)$ $\forall n > N$, o bien que $\forall \epsilon > 0$ el conjunto $\{x_n\} \backslash B(x, \epsilon)$ es finito. Estas formas de interpretarlo serán relevantes para espacios topológicos arbitrarios.

Definición 4. En un conjunto X, dos distancias d_1, d_2 son **comparables** si $\exists K > 1$ tal que $\frac{1}{K} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq K d_2(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Esto permite que siempre sea posible relacionar ambas salvo una constante. En ese caso la convergencia en una de ellas equivale a la convergencia en la otra (por un sencillo argumento de compresión).

Definición 5. Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subset X$ un subconjunto. Se dice que A es **abierto** si $\forall x \in A$, $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$.

Proposición 1. *En (X,d) un espacio métrico, toda bola $A = B(x,r)$ es un abierto.*

Demostración. Tomamos $y \in B(x,r)$. Si $t = d(x,y) > 0$, que cumple $t < r$, entonces se tiene que $B(y, r-t) \subset A = B(x,r)$. En efecto, dado $z \in B(y,r-t)$, se tiene $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < t + (r-t) = r$. □

Teorema 1. *Sea (X,d) métrico. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia (de tamaño arbitrario) de abiertos, entonces $\bigcup A_i$ es abierto. Asimismo, si $B_1, \dots, B_n$ es una cantidad finita de abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^n B_i$ es abierto.*

Demostración. Sea $x \in \bigcup A_i$. Entonces, en particular $x \in A_i$ para cierto i, luego hay un r para el que $B(x,r) \subset A_i \subset \bigcup A_i$. Por otra parte, dado $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$, tenemos radios $r_1, \dots, r_n$ tales que $B(x,r_i) \subset B_i$. Es evidente que si $r = \min\{r_i\}_{i=1}^n$, entonces $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset B_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Por tanto, $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$. □

Obsérvese que para tomar el mínimo es necesario que los conjuntos que se intersecan sean finitos. Si no son finitos, existen contraejemplos al teorema (como la familia $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n=1}^\infty$, que en $\mathbb{R}$ con la métrica usual son abiertos, pero tienen intersección $\{0\}$ que no lo es).

Proposición 2. *Si d_1 y d_2 son distancias comparables en X, entonces los abiertos de (X,d_1) son exactamente los mismos que los de (X,d_2).*

Demostración. Como son comparables, tenemos una constante K tal que $\frac{1}{K}d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq K d_2(x,y)$, para todos $x,y \in X$. Dado un abierto para d_1, $A \subset X$, tomamos $x \in A$. Sabemos que $B_1(x,r) \subset A$ para cierto r, es decir, que si $d_1(x,y) < r$, se tiene que $y \in A$. Entonces, si z es tal que $d_2(x,z) < \frac{r}{K}$, se tiene que $d_1(x,z) \leq K d_2(x,z) < K\frac{r}{K} = r$. Por lo tanto, se tiene que $B_2(x, \frac{r}{K}) \subset B_1(x,r) \subset A$, luego A es abierto en d_2. Análogamente se demuestra que los abiertos de d_2 lo son en d_1, valiéndose de la otra desigualdad dada por la comparabilidad (de hecho, *ser comparable* es una relación de equivalencia, y por tanto simétrica). □

Definición 6. Sean (X,d_X), (Y,d_Y) espacios métricos. Entonces $f : X \to Y$ es **continua** en $x_0 \in X$ si $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $x \in B_X(x_0,\delta) \implies f(x) \in B_Y(f(x_0),\epsilon)$.

Teorema 2. *Se tiene que $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \iff \forall \{x_n\} \subset X$ sucesión con $x_n \to x$, se tiene que $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Demostración. Para $\implies$, sea $\epsilon > 0$. Entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\epsilon)$. Pero, para n grande, se tiene que $x_n \in B(x_0,\delta)$, luego ha de ser que $f(x_n) \in B(f(x_0),\epsilon)$, como se quería.

Para $\impliedby$, supongamos que que f no fuese continua en x_0. Entonces $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que podemos construir una sucesión $\{x_n\} \subset X$ de tal modo que $d(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ pero $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Por construcción se tiene que $x_n \to x_0$, pero está claro que no puede darse $f(x_n) \to f(x_0)$, puesto que su distancia no puede ser menor que $\epsilon_0 > 0$. Esto contradice la hipótesis. □

Definición 7. Sean (X,d_X), (Y,d_Y) espacios métricos, $f : X \to Y$. Se dice que f es **continua en** X si lo es en todo $x_0 \in X$.

El siguiente resultado es de vital importancia para poder prescindir de las distancias al dar el salto a espacios topológicos en general. Permite caracterizar las funciones continuas mediante los abiertos:

Teorema 3 (Caracterización de continuidad por abiertos)**.** *Sea $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ aplicación entre espacios métricos. Equivalen:*

1. *f es continua en X.*

2. Para todo $A \subset Y$ abierto, se tiene que $f^{-1}(A)$ es abierto en X.

Demostración. Para $1 \implies 2$, tomamos $A \subset Y$ abierto. Queremos ver que $f^{-1}(Y)$ es abierto. Dado $x_0 \in f^{-1}(A)$, sabemos que $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \epsilon) \subset A$, dado que A es abierto. Como f es continua, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon) \subset A$, y por tanto $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$.

Para $2 \implies 1$, tomamos $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Se tiene que $f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$ es abierto por la hipótesis 2. Entonces, $\exists \delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$, pero eso quiere decir que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$, luego f es continua en x_0. $\square$

1.2. Topologías y espacios topológicos

Existen algunos espacios en los que interesaría definir funciones continuas, suponiendo como abiertos conjuntos bastante razonables. No obstante existen conjuntos en los que **no hay distancias que produzcan** dichos abiertos *razonables*. Por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones de reales. El conjunto $A = \{\{x_i\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $|x_i| < \epsilon_i\}$, para una sucesión de positivos ϵ_i, no puede ser abierto bajo ninguna métrica (se verá posteriormente). Sin embargo, es razonable que lo sea: en $\mathbb{R}^N$ finito, ese conjunto serían los vectores $(x_1, \ldots, x_N)$ tales que $|x_i| < \epsilon_i$, que son *cajas* abiertas (intervalos, rectángulos, paralelepípedos,...), por tanto no es descabellado que para sucesiones infinitas también fuese abierto.

Definición 8. Sea X un conjunto y $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ un conjunto de subconjuntos de X. Se dice que τ es una **topología** si:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Dada $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ arbitraria, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.
3. Dados $A_1, \ldots, A_n \in \tau$ (finitos), entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Los elementos de τ se denominan **abiertos** de τ. La tupla (X, τ) se conoce como **espacio topológico**.

Es decir, en un espacio topológico se imponen los abiertos en lugar de extraerse de la métrica.

Observación 1 (Ejemplos de espacios topológicos). Observemos algunos ejemplos de topologías:

1. Como es razonable, dado (X, d) espacio métrico, se puede definir $\tau_d = \{$abiertos respecto de $d\}$. Es decir, $A \subset \tau_d$ si y solo si $\forall x \in A$, $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Ya hemos demostrado que en este caso los abiertos cumplen las propiedades que se piden a una topología. Vemos, por tanto, que un espacio topológico es una noción más general que un espacio métrico.
2. Dado X no vacío, $\tau = \mathcal{P}(X)$ es la conocida como **topología discreta**: todos los conjuntos son abiertos, luego se verifican las propiedades.
3. Dado X no vacío, $\tau = \{\emptyset, X\}$ es la **topología indiscreta**: no hay abiertos (salvo los estrictamente necesarios).
4. En cualquier X no vacío, $A \subset X$, se tiene que $\tau = \{\emptyset, A, X\backslash A, X\}$ es topología.
5. Dado X conjunto, definimos $\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : X\backslash A$ es finito$\} \cup \{\emptyset\}$. Esto se conoce como **topología cofinita**. Asimismo, podemos definir $\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : X\backslash A$ es numerable$\} \cup \{\emptyset\}$. Esto se conoce como **topología conumerable**. Las propiedades se verifican inmediatamente con ayuda de las leyes de De Morgan.

Una propiedad deseable en espacios topológicos (que todos los espacios métricos tienen) es la de poder separar puntos en abiertos disjuntos:

Definición 9. Se dice que (X, τ) es un espacio topológico **Hausdorff** si $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $A, B \in \tau$ disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) con $x \in A$, $y \in B$.

Este concepto permite ver inmediatamente que el concepto de espacio topológico es estrictamente más general que el de espacio métrico, puesto que hay espacios topológicos que no son Hausdorff: $X = \{a, b, c\}$, y $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$. En este espacio, los puntos a y c no son separables puesto que todos los abiertos que los contienen, contienen también a b. Otra observación es que la topología discreta siempre es Hausdorff (puesto que para todo par $x \neq y$, tanto $\{x\}$ como $\{y\}$ son abiertos), y la indiscreta no lo es (si el espacio tiene al menos dos elementos).

Observación 2. $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es Hausdorff.

Esto es porque, por ejemplo si consideramos el 0 y el 1, y A y B son abiertos que contienen a 1, entonces si $A \cap B$ fuese vacío, tendríamos que $\mathbb{R} = \mathbb{R} \backslash (A \cap B) = (\mathbb{R} \backslash A) \cup (\mathbb{R} \backslash B)$, y $\mathbb{R}$ sería entonces finito.

Definición 10. Sea X conjunto y τ, τ' topologías. Se dice que τ' es **más fina** que τ si $\tau \subset \tau'$.

Es decir, es más fina si contiene más abiertos. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ tenemos que la indiscreta es menos fina que la cofinita, esta menos fina que la usual y esta menos fina que la discreta. (La única relación que puede no ser evidente es que la cofinita es menos fina que la usual. Un elemento de la cofinita es de la forma $\mathbb{R} \backslash \{x_1, \dots, x_n\}$ que es unión de intervalos abiertos).

Definición 11. Sea (X, τ) un espacio topológico e $Y \subset X$. Puede definirse entonces en Y una **topología inducida o relativa**, denotada $\tau|_Y$, de tal modo que $A \in \tau|_Y \iff \exists U \in \tau$ tal que $U \cap Y = A$. Los elementos de $\tau|_Y$ se conocen como abiertos relativos a Y.

Las propiedades se verifican de inmediato: $\emptyset \cap Y = \emptyset$, $X \cap Y = Y$ luego contiene al vacío y al total, si $\{A_i\}_{i \in I}$ son elementos de $\tau|_Y$, se tiene que $\bigcup A_i = \bigcup (Y \cap U_i) = Y \cap (\bigcup U_i)$, luego esa unión está en $\tau|_Y$, y análogamente para la intersección finita.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología usual, el intervalo $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en $[0, 1]$, puesto que es $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0, 1]$. Asimismo, por ejemplo, si (X, τ) es un espacio topológico, y se tiene $Y \subset X$ abierto, entonces todos los $A \subset Y$ abiertos de Y lo son también de X, al ser intersección de dos abiertos de X.

1.3. Bases y subbases

Definición 12. Dado X conjunto y $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ algunos subconjuntos de X, se dice que β es **base de una topología en** X si:

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \beta$ tal que $x \in B$.
2. Si $x \in B_1 \cap B_2$, siendo $B_1, B_2 \in \beta$, entonces hay $B_3 \in \beta$ con $x \in B_3$, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Gracias a estas propiedades puede definirse la **topología τ_β generada por** β como sigue: $A \subset X$ es abierto si $\forall x \in A$, $\exists B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A$.

Obsérvese que es un concepto que recuerda a las *bolas abiertas* de los espacios métricos. De hecho, es inmediato ver que las bolas abiertas en un espacio métrico forman una base. La demostración de que τ_β es topología es exactamente análoga a la de que la topología usual de un espacio métrico lo es.

Observación 3. Otra forma de entender τ_β es el conjunto de todas las posibles uniones de elementos de β.

Esto es así porque que $A \in \tau_\beta$ indica que en cada x hay un $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset A$, y por tanto $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. Se observa entonces que, en particular, $\beta \subset \tau_\beta$.

A continuación veremos si toda τ topología arbitraria tiene base. Para ello:

Proposición 3. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si $\mathcal{C} \subset \tau$ son abiertos tales que $\forall U \in \tau$ se tiene que $\forall x \in U$ hay un $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$, entonces $\mathcal{C}$ es base para τ (Es decir, es base y $\tau_{\mathcal{C}} = \tau$).*

Demostración. Dado $x \in X$, como $X \in \tau$, ha de haber un $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C$. Asimismo, dados $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ con $x \in C_1 \cap C_2$, como $C_1 \cap C_2$ es abierto al serlo C_1 y C_2, hay un $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset C_1 \cap C_2$. Por tanto es base. Para ver que $\tau_{\mathcal{C}} = \tau$, está claro que $\tau_{\mathcal{C}} \subset \tau$ dado que para cualesquiera elementos de $\mathcal{C}$, al ser abiertos, su unión está en τ. Ahora, dado abierto $U \in \tau$, tomado $x \in U$ se tiene un C_x tal que $x \in C_x \subset \tau$, luego pertenece a $\tau_{\mathcal{C}}$. $\square$

Proposición 4. *Si β, β' son bases de τ y τ', entonces τ' es más fina que $\tau \iff \forall x \in X$, $B \in \beta$ con $x \in B$, se tiene un $B' \in \beta'$ con $x \in B'$, $B' \subset B$. Es decir, que para todo $B \in \beta$,se tiene $B \in \tau'$.*

Demostración. Para $\Longleftarrow$, dado cualquier $A \in \tau$, tenemos que $A = \bigcup B_i$ para ciertos $B_i \in \beta$. Pero por hipótesis, esos $B_i \in \tau'$, luego A es unión de elementos de τ' y entonces $A \in \tau'$. Para $\Longrightarrow$, si $B \in \beta$, en particular $B \in \tau$ luego $B \in \tau'$ por ser más fina, y hemos acabado. $\square$

Esta proposición es razonable. Estamos afirmando que si $\beta \subset \tau'$, ha de ser que $\tau \subset \tau'$, un concepto análogo al visto en bases de espacios vectoriales, puesto que por ser τ' topología, debe ser que todo lo que genere β esté en τ'.

Obsérvese también que en espacios métricos equivalentes (X, d_1) y (X, d_2), sus topologías han de ser las mismas. Esto es así porque, por ejemplo, las bolas de d_1 (digamos B_1) pueden ponerse como unión de las bolas de d_2 (pongamos B_2), de tal manera que $B_1 \subset \tau_2$ y por tanto $\tau_1 \subset \tau_2$, y análogo a la inversa.

Definición 13. Una **subbase de una topología de** X es una colección $S \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup S = X$. La **topología generada por** S es la formada por todas las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de S.

Para ver que la topología generada es una topología, basta con ver que las intersecciones finitas de elementos de S son una base. Esto es claro: dado $x \in S_1 \cap S_2$, con S_1 y S_2 intersecciones finitas de elementos de S, entonces exactamente $S_3 = S_1 \cap S_2$ es otra intersección finita de elementos de S con $x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2$, así que es una base (la otra propiedad ya se tiene por ser S subbase).

Es fácil entender que esta es la topología menos fina (más pequeña) que contiene a los elementos de S.

1.4. Topologías del orden

Definición 14. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Este orden induce la **topología del orden**, que es aquella que tiene como base β el conjunto de intervalos abiertos de X, junto con los semicerrados por abajo que comienzan en $\min X$, junto con los semicerrados por arriba que acaban en $\max X$. (Estos 2 últimos solo en caso de que X tenga mínimo/máximo, respectivamente).

Veamos que efectivamente es base. Dado $x \in X$, si $x = \max X$ o $x = \min X$, es evidente que está en un elemento de la base (el intervalo $[x, a)$ o bien $(a, x]$ para cierto a. Si no, entonces hay $a, b \in X$ tales que $a < x < b$, luego $x \in (a, b)$, que está en la base. Ahora, supongamos que $x \in A_1 \cap A_2$ con A_1, A_2 en la base. Pongamos que x no es máximo ni mínimo. Entonces, si $A_1 = (a, b)$ y $A_2 = (c, d)$, tenemos que $x \in (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) = A_1 \cap A_2$. Ahora, si x es mínimo, entonces $A_1 = [x, a)$ y $A_2 = [x, b)$ forzosamente, luego $x \in [x, \min\{a, b\}) \subset A_1 \cap A_2$. Análogamente si es máximo.

1.5. Topología producto

Dados (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) espacios topológicos, uno podría pensar si $\{A_1 \times A_2, A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$ es una topología en $X_1 \times X_2$, pero no es así. Por ejemplo, en $\mathbb{R}_2$, podríamos considerar $A = (0,1)^2$ y $B = (2,3)^2$, y está claro que $A \cup B$ no es producto de abiertos de $\mathbb{R}$. De ser así, el $\frac{1}{2}$ estaría en el primer abierto (porque, por ejemplo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ está en esa unión), y el $\frac{5}{2}$ en el segundo, pero resulta que el $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ no está en esa unión. Esto se soluciona dándose cuenta de que este conjunto es una base:

Definición 15. Dados (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) espacios topológicos, se define la **topología producto** en $X_1 \times X_2$ como aquella engendrada por la base $\{A_1 \times A_2, A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$.

Observación 4. De hecho, dadas bases B_1 y B_2 en τ_1, τ_2, tenemos que la toplogía producto equivale a la engendrada por $\{b_1 \times b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$.

1.6. Convergencia

A continuación generalizaremos el concepto de convergencia de sucesiones para espacios topológicos.

Definición 16. Sea (X, τ) un espacio topológico, con $\{x_n\}_1^\infty$ sucesión de puntos de X. Se dice que $x_n \to x$, es decir, que x_n **converge a** x si $\forall U \in \tau$ abierto que contiene a x, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ $\forall n \geq N$.

Obsérvese que la definición usual en espacios métricos es la misma pero solo se trabajaba con bolas de radio ϵ. Esto puede hacerse análogamente en espacios topológicos:

Lema 1. *Si β es una base de τ, entonces $x_n \to x \iff \forall B \in \beta$ con $x \in B$, $\exists N \in \mathbb{N}$ con $x_n \in B$ si $n \geq B$.*

Demostración. $\implies$ es inmediato dado que $\beta \subset \tau$. Para $\impliedby$, dado $U \in \tau$ con $x \in U$, se tiene que $\exists B \in \beta$ con $x \in B \subset U$. Por tanto, hay un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x : n \in B$ para $n \geq N$, pero entonces esos x_n están en U. □

Considérese ahora $X = \{a, b, c\}$ con $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$. Sea $x_n = a$ en todo $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que $x_n \to a$, pero véase también que todo abierto que contiene a b, contiene también a a, luego ha de darse de hecho que también $x_n \to b$.

Proposición 5. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Se tiene que toda sucesión convergente x_n tiene un único límite.*

Demostración. Si $x_n \to x$ y $x_n \to y$ con $x \neq y$, entonces tenemos $U, V \in \tau$ disjuntos, con $x \in U$, $y \in V$. Por definición de límite, ha de haber un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se tiene $x_n \in U$ y también $x_n \in V$, cosa imposible al ser disjuntos. □

1.7. Algunas definiciones en topologías

Definición 17. Sea (X, τ) espacio topológico. Se dice que $A \subset X$ es **cerrado** si $X \backslash A$ es abierto.

Se observa de la definición que $\emptyset, X$ son cerrados, y que las uniones finitas e intersecciones arbitrarias de cerrados son cerradas.

Definición 18. Dado $A \subset X$, se define su **interior**, denotado $\mathring{A}$ o $Int(A)$, como la unión de todos los abiertos contenidos en A, es decir:

$$\mathring{A} = \bigcup_{B \in \tau, B \subset A} B$$

Directamente de la definición sigue que $\mathring{A} \subset A$.

Proposición 6. *Dado un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$, se tiene:*

1. *$\mathring{A}$ es abierto.*

2. *$\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A.*

3. *$A = \mathring{A} \iff A$ es abierto.*

Demostración. 1 está claro porque $\mathring{A}$ es unión de abiertos. Para 2, dado otro abierto B con $\mathring{A} \subset B \subset A$, por definición de interior, se tiene $B \subset \mathring{A}$ y por tanto $B = \mathring{A}$. Finalmente, para 3, si A es abierto, como $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A, ha de ser $A \subset \mathring{A}$ y por tanto vale la igualdad. Por otro lado, si $A = \mathring{A}$, entonces A es abierto por 1. □

Observación 5. Dado (X, τ) espacio topológico con base β, y dado $A \subset X$, se tiene que $x \in \mathring{A} \iff \exists B \in \beta$ con $x \in B \subset A$.

Definición 19. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Se define la **clausura, cierre o adherencia** de A, y se denota $\overline{A}$ o $cl(A)$, como la intersección de todos los cerrados de X que contienen a A.

Proposición 7. *Sea $A \subset X$ un subconjunto de un espacio topológico.*

1. *$\overline{A}$ es cerrado y $A \subset \overline{A}$.*

2. *$\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.*

3. *Se tiene $A = \overline{A} \iff A$ es cerrado.*

Demostración. Para 1, se tiene que $\overline{A}$ es intersección de cerrados luego es cerrado. Asimismo como $\overline{A} = \bigcap C_i$ y todos los C_i cumplen $A \subset C_i$, entonces $A \subset \overline{A}$. Para 2, dado cualquier cerrado C con $A \subset C$, por definición $\overline{A} \subset C$ al ser C uno de los conjuntos que se intersecan. Finalmente, para 3, si $A = \overline{A}$ entonces A es cerrado al serlo $\overline{A}$, y si A es cerrado, entonces A es un cerrado que contiene a A, luego $A \subset \overline{A} \subset A$ y por tanto vale la igualdad. □

Proposición 8. *Dado (X, τ) espacio topológico, $\beta \subset \tau$ base y $A \subset X$, se tiene que $x \in \overline{A} \iff \forall B \in \beta$ con $x \in B$, se tiene $B \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que hubiese un $B \in \beta$ abierto con $x \in B$ y $B \cap A = \emptyset$. Entonces, $A \subset B^c$, que es cerrado, de forma que $\overline{A} \subset B^c$. Por lo tanto $x \notin \overline{A}$, dado que estaba en B. Ahora, si $x \notin \overline{A}$, es porque hay un cerrado C con $x \notin C$ y $A \subset C$. Como $U = X \backslash C$ es abierto, sabemos entonces que hay un B de la base tal que $x \in B \subset U$. Entonces ese B verifica que $B \cap A = \emptyset$, dado que A estaba completamente en C y B está completamente en su complementario. □

Definición 20. Sea $A \subset (X, \tau)$ un subconjunto de un espacio topológico. Se define su **frontera** como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.

Por tanto, en virtud de la proposición previa, $p \in \partial A \iff \forall U \in \tau$ con $p \in U$, se tiene $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

En el caso de espacios métricos, pueden caracterizarse las clausuras de los conjuntos mediante sucesiones.

Proposición 9. *Sea (X, d) espacio métrico y τ la topología de la métrica. Entonces $x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_n \subset A$ con $x_n \to x$.*

Demostración. Para $\implies$, si $x \in \overline{A}$, entonces hay siempre un $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$, permitiéndonos construir una $\{x_n\}_n \subset A$ que tiende a x. Para $\impliedby$, dado un entorno abierto U de x, como $x_n \to x$, se tienen infinitos puntos de $\{x_n\}_n \subset A$ en U, luego $U \cap A \neq \emptyset$. □

Véase que la demostración de la implicación $\impliedby$ no utiliza nada particular a espacios métricos, y por ello es válida en cualquier espacio topológico. No obstante, $\implies$ utiliza una sucesión de bolas con unos radios determinados, concepto que no existe necesariamente en espacios topológicos generales.

Veamos un ejemplo en el que no se da esta implicación. Consideramos $X = \mathbb{R}$ con la topología conumerable. Se tiene $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, puesto que en la topología conumerable los cerrados son los conjuntos numerables o bien el total, y como $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ ha de ser cerrado y contener a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, que no es numerable, debe ser todo $\mathbb{R}$. Analicemos qué ocurre para $\{x_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, con $x_n \to x$. Dado un entorno abierto de x, digamos U, entonces hay un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, se tiene $x_n \in U$. Pongamos entonces en concreto $U = \mathbb{R}\setminus\{x_n : x_n \neq x\}$, es decir, quitamos todos los puntos de la sucesión distintos de x. Este U es abierto por ser conumerable, y $x \in U$. Por lo tanto, $x_n \in U$ $\forall n \geq N \in \mathbb{N}$, luego no queda otra que $x_n = x$ si $n \geq N$. Es decir, en esta topología, las sucesiones convergentes han de ser eventualmente constantes. Con esto podemos afirmar, por ejemplo, que $0 \in \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, pero no hay ninguna $\{x_n\} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ con $x_n \to 0$, dado que tendría que valer 0 en infinitos puntos.

Definición 21. Se dice que (X, τ) es **metrizable** si existe una distancia d definida en X tal que τ_d, la topología de la distancia, coincide con τ.

Obsérvese que no todos los espacios topológicos son metrizables, porque los espacios metrizables son también Hausdorff, y hemos visto que hay topologías que no son Hausdorff. También hemos visto previamente que si (X, τ) es metrizable, entonces las clausuras de los conjuntos $A \subset X$ son exactamente $\overline{A} = \{x : \exists\{x_n\} \subset A, x_n \to x\}$.

Definición 22. Sea (X, τ) espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que $p \in X$ es un **punto de acumulación de** A si $\forall U \in \tau$ con $p \in U$, se tiene que $(U \cap A)\setminus\{p\} \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de acumulación de A, denominado **conjunto derivado**, se denota por A'.

Claramente $A' \subset \overline{A}$, dado que la condición que se pide para estar en A' es más débil.

Proposición 10. *Sea (X, τ) espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $\overline{A} = A \cup A'$.*

Demostración. Como $A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A}$, se tiene $A \cup A' \subset \overline{A}$. Ahora, si $x \in \overline{A}$, sabemos que todo entorno abierto $U \in \tau$ con $x \in U$ verifica que $U \cap A \neq \emptyset$. Si además siempre se da que $(U \cap A)\setminus\{x\} \neq \emptyset$, entonces $x \in A'$. De lo contrario, hay un U tal que $(U \cap A)\setminus\{x\} = \emptyset$, pero $U \cap A \neq \emptyset$, luego es necesario que $U \cap A = \{x\}$ y por tanto $x \in A$. □

Como corolario, se tiene que A es cerrado si y solo si $A' \subset A$. Esto es así porque si A es cerrado, entonces $A = \overline{A} = A \cup A'$, luego $A' \subset A$. Por otro lado, si $A' \subset A$, entonces $\overline{A} = A \cup A' = A$.

1.8. Continuidad

Finalmente, generalizaremos el concepto de continuidad entre espacios topológicos. Para motivar esta definición, usaremos la caracterización vista en espacios métricos, dado que en esta ocasión solo disponemos de la noción de abierto.

Definición 23. Sean (X, τ), (X', τ') dos espacios topológicos, y $f : X \to X'$. Se dice que f es **continua** si $\forall A \in \tau'$ se tiene que $f^{-1}(A) \in \tau$.

Teorema 4. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *$\forall A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *$\forall B \subset Y$ cerrado, se tiene que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

Demostración. Para $1 \implies 2$, suponemos f continua y damos $A \subset X$. Veremos que $x \in \overline{A} \implies f(x) \in \overline{f(A)}$, luego $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Dado V entorno abierto de $f(x)$, como $f^{-1}(V)$ es entorno abierto de x, se tiene que $\exists y \in f^{-1}(V) \cap A$, al estar x en $\overline{A}$, y por lo tanto $f(y) \in V \cap f(A)$, luego $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Para $2 \implies 3$, sea B cerrado en Y y pongamos $A = f^{-1}(B)$. Queremos ver que A es cerrado. Por definición de A, se tiene que $f(A) \subset B$. Dado $x \in \overline{A}$, tenemos que $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$ al ser B cerrado, luego $x \in f^{-1}(B) = A$ y por tanto $\overline{A} \subset A$ y entonces A es cerrado.

Finalmente, para $3 \implies 1$, dado un abierto $U \subset Y$, entonces $f^{-1}(Y \setminus U)$ es cerrado, luego $f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(U)$ es cerrado y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto. □

Teorema 5. *$f : X \to Y$ es continua $\iff$ $\forall x \in X$, y V entorno abierto de $f(x)$, hay un entorno abierto U de x con $f(U) \subset V$.*

Demostración. $\implies$. Dados $x \in X$ y $V \subset X$ abierto con $x \subset V$, es claro que basta tomar $U = f^{-1}(U)$. Para $\impliedby$, dado $V \subset Y$ abierto, queremos ver que $f^{-1}(V)$ es abierto de X. Dado $x \in f^{-1}(V)$, como $f(x) \in V$, hay un U_x entorno de x con $f(U_x) \subset V$, y por tanto $U_x \subset f^{-1}(V)$, luego $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. □

Observación 6. Dada f continua y $x_n \to x$, entonces $f(x_n) \to x$.

La razón es que dado V entorno abierto de $f(x)$, su preimagen es entorno abierto de x, luego todos los términos de x_n salvo finitos de ellos acaban en su preimagen, y por tanto todos los términos de $f(x_n)$ salvo finitos de ellos acaban en V.

Recuérdese también que en espacios métricos esta propiedad caracteriza la continuidad. No es el caso en espacios topológicos generales, es decir, el recíproco de esa observación no es cierto en general. Veamos un ejemplo. Consideramos $f : \mathbb{R}' \to \mathbb{R}$ siendo $\mathbb{R}$ el usual y $\mathbb{R}'$ el dotado de la topología conumerable, dada por $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, es decir, vale 1 en $\mathbb{Q}$ y 0 fuera.

En la topología conumerable, las sucesiones convergentes son aquellas que se hacen eventualmente constantes. Esto es así porque si $x_n \to x$, entonces $(\mathbb{R}\setminus\{x_n\}_n) \cup \{x\}$ es conumerable, luego es abierto y no contiene ningún término de x_n salvo, a lo sumo, a x. Por tanto ha de ser que una cola de la sucesión tenga exclusivamente a x, o no entrará en ese abierto. Por esto, trivialmente sigue que $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$, sin importar la f (dado que eventualmente todos los $f(x_n)$ valen $f(x)$).

Finalmente, veamos que la f dada previamente no es continua. Por ejemplo, $f^{-1}((0,2)) = \mathbb{Q}$ que no es abierto en la conumerable.

Definición 24. Dados espacios topológicos (X, τ) y (X', τ'), se dice que $f : X \to X'$ es un **homeomorfismo** si es biyectiva, es continua y f^{-1} también es continua.

En este caso, $A \in \tau \iff f(A) \in \tau'$. Cuando dos espacios son homeomorfos son esencialmente *el mismo espacio*, dado que se puede convertir de abiertos en uno de ellos a los del otro mediante el homeomorfismo. Así, por ejemplo, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, $x_n \to x \iff f(x_n) \to f(x)$, etcétera.

1.9. Topología cociente

Definición 25. Dada una aplicación sobreyectiva $p : X \to Y$ entre dos espacios topológicos, se dice que es una **aplicación cociente** si $V \subset Y$ es abierto $\iff p^{-1}(V)$ es abierto.

Obsérvese que en particular las aplicaciones cociente son continuas. Lo que tienen de adicional es que es posible identificar si un conjunto de Y es abierto observando su preimagen en X.

Para ver que de hecho es más restrictivo, consideremos la *identidad* (en cuanto a conjunto) de $X = \{1, 2, 3\}$ con la discreta, en X con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, Y\}$. Todo conjunto de X discreto es abierto, por tanto toda $f^{-1}(V)$ es abierta, pero por ejemplo, $f^{-1}(\{b\})$ es abierto sin serlo $\{b\}$.

Definición 26. Dado $f : X \to Y$ entre espacios topológicos, se dice que $A \subset X$ es **saturado** respecto a f si $\forall y \in Y$, se tiene $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset \implies f^{-1}(y) \subset A$.

Es decir, lo es si todas las preimágenes de elementos individuales quedan por completo dentro de A o bien por completo fuera de A.

Proposición 11. *La aplicación sobreyectiva $f : X \to Y$ entre los espacios topológicos $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$, es cociente $\iff \tau_Y = \{f(U) : U \in \tau_X, U$ saturado $\}$.*

Demostración. Si es cociente, entonces dado un abierto $V \in \tau_Y$, tenemos que $U = f^{-1}(V)$ es abierto en X. Se afirma que ese abierto U, que claramente cumple $f(U) = V$, es saturado. En efecto, dado $y \in Y$, si $y \in V$, entonces se tiene que $f^{-1}(y) \subset U$ por definición de U, y, si $y \notin V$, entonces $f^{-1}(y) \cap U = \emptyset$, dado que de contener un elemento u, debería darse que $f(u) \in V$, pero $f(u) = y$.

Para la implicación contraria, se tiene que dado un abierto $f(U) \in \tau_Y$, se tiene que $f^{-1}(f(U)) = \bigcup_{y \in f(U)} f^{-1}(y)$. Ahora, como cada $f^{-1}(y) \cap U$ contiene por lo menos a $\{y\}$, y U es saturado, sigue que $f^{-1}(f(U)) = \bigcup_{y \in f(U)} f^{-1}(y) \subset \bigcup_{y \in f(U)} U = U$ y, como la otra inclusión se tiene siempre, sigue que $f^{-1}(f(U)) = U \in \tau_X$. Por otro lado, dado un conjunto de la forma $f^{-1}(V)$, queremos ver que $V = f(U)$ para cierto conjunto saturado U. Basta con poner $U = f^{-1}(V)$. Como f es sobreyectiva, $f(f^{-1}(V)) = V$. Asimismo, $f^{-1}(V)$ es saturado porque es una preimagen, como se ha visto anteriormente. □

Observación 7. Si $f : X \to Y$ es sobreyectiva, continua y abierta (manda abiertos en abiertos), entonces es cociente.

Esto es así porque dado abierto $V \subset Y$, por continuidad, $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Asimismo, si $V \subset Y$ es tal que $f^{-1}(V)$ es abierto, entonces $V = f(f^{-1}(V))$ es abierto.

Asimismo, si f es sobreyectiva, continua y cerrada (manda cerrados en cerrados), también es cociente, razonando de forma similar.

Proposición 12. *Dado X espacio topológico, A un conjunto y $p : X \to A$ sobreyectiva. Existe una única topología τ en A respecto de la cual p es cociente.*

Demostración. Basta con poner $\tau = \{V \subset A : p^{-1}(V)$ es abierto en $X\}$. Se comprueba fácilmente que es una topología, y por definición $V \in \tau \iff p^{-1}(V)$ es abierto en X. Es única puesto que dado un $U \notin \tau$, entonces por definición $p^{-1}(U)$ no es abierto en X, luego si lo agregásemos dejaría de ser cociente. Asimismo, si retiramos un $V \subset A$ con $p^{-1}(V)$ abierto de X, entonces contradecimos la definición de aplicación cociente, dado que $p^{-1}(V)$ es abierto pero V no. □

Definición 27. Dado X un espacio topológico y $P \subset \mathcal{P}(X)$ una partición de X, es decir, $P = \{A_i\}_{i \in I}$ disjuntos dos a dos y cuya unión es el total. Consideramos $p : X \to P$ aquella tal que $p(x) = A_i$ siendo A_i el único con $x \in A_i$. Sea τ la única topología en P tal que p es cociente. Se dice que (P, τ) es un **espacio topológico cociente** de X.

Es decir, un $I_0 \subset I$ hace que $\{A_i\}_{i \in I_0}$ sea abierto si y solo si $p^{-1}(\{A_i\}_{i \in I_0}) = \bigcup_{i \in I_0} A_i \subset X$ es abierto.

Es decir, todo esto sirve para dotar al conjunto cociente $X/\sim$ (siendo $\sim$ la asociada a la partición $\{A_i\}$) de una topología. Dicha topología es aquella en la que $B \subset \{A_i\}$ es abierto $\iff \bigcup B$ es abierto en X.

Dada $p : X \to X/\sim$, hay una correspondencia obvia entre las funciones $f : X \to Z$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ siempre que $x_1 \sim x_2$, y las funciones $\tilde{f} : X/\sim \ \to Z$. A la f se le corresponde $\tilde{f}([x]) = f(x)$, bien definida por como es f, y a la $\tilde{f}$ se corresponde $\tilde{f} \circ p$. En este caso, resulta que f es continua $\iff \tilde{f}$ es continua. Esto es potente porque permite conocer las funciones continuas en el cociente $X/\sim$, conociendo las funciones continuas de f que son constantes en cada clase.

1.10. Axiomas de numerabilidad y separabilidad

Vamos a estudiar distintas características que puede tener un espacio topológico.

Definición 28. Se dice que (X, τ) tiene una **base numerable en** $x \in X$ si existe una colección numerable B_x de entornos abiertos de x tal que todo entorno abierto U de x tiene un $B \in B_x$ tal que $x \in B_x \subset U$.

Definición 29. Si un espacio topológico (X, τ) tiene una base numerable en todo $x \in X$, se dice que es **uno-numerable** o que verifica el **primer axioma de numerabilidad**.

Observación 8. Todo espacio metrizable es uno-numerable.

Esto es porque $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable en cada punto.

Teorema 6. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Sea $A \subset X$. Sabemos que los límites de sucesiones en A pertenecen a $\overline{A}$. Si X es uno-numerable, sigue que el recíproco es cierto, es decir que $\overline{A}$ son exactamente los límites de sucesiones en A.*

2. *Dada $f : X \to Y$ continua, entonces sabemos que toda sucesión $x_n \to x$ convergente verifica que $f(x_n) \to f(x)$. Si X es uno-numerable, sigue que el recíproco es cierto. Es decir, si en toda sucesión con $x_n \to x$ se tiene $f(x_n) \to f(x)$, entonces f es continua.*

Definición 30. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es **dos-numerable** si se tiene una base (como espacio topológico) numerable.

Observación 9. Si X es dos-numerable entonces es uno-numerable.

Esto es porque, si B es esa base, dado $x \in X$ y un entorno abierto U de x, por definición de base se tiene que $\exists b \in B$ con $x \in b \subset U$, luego un subconjunto de B es una base numerable en x.

El recíproco en general no es cierto: hay espacios métricos, de hecho, que no son dos-numerables. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \tau_d)$ donde τ_d es la discreta, metrizable por $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, y como todo punto real es abierto, no hay una base numerable.

Teorema 7. *Sea (X, τ) un espacio uno-numerable e $Y \subset X$. Entonces $(Y, \tau|_Y)$ es uno-numerable. Lo mismo vale cambiando uno-numerable por dos-numerable. Asimismo, si $(X_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son espacios topológicos uno-numerables, su producto $(\Pi X_i, \Pi \tau_i)$ es uno-numerable, y lo mismo vale para dos-numerable.*

Demostración. Dada B una base numerable de (X, τ), entonces $B_Y = b \cap Y : b \in B$ es una base de Y y sigue siendo numerable dado que es de cardinal menor o igual que B. Del mismo modo, dadas B_i bases numerables de cada τ_i, se tiene que $B = \{\Pi b_i : b_i \in B_i\}$ es una base de la topología producto. Es numerable por estar formada por productos numerables de conjuntos numerables. Análogamente para uno-numerable, considerando solo bases en torno a un punto. $\square$

Teorema 8. *Sea (X, τ) un espacio topológico dos-numerable. Entonces si $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ para ciertos abiertos $U_\alpha \in \tau$. Entonces, existen $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ tales que $\bigcup U_{\alpha_i} = X$. Es decir, todo recubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento numerable.*

Asimismo, existe un subconjunto $U \subset X$ numerable denso (es decir, que todo abierto de τ interseca con U, o lo que es lo mismo, que su cierre es todo X).

Demostración. Para el primer resultado, sea $B = \{B_n\}_n$ la base numerable. Como los U_α son abiertos, tomamos para cada $n \in \mathbb{N}$ un U_{α_n} tal que $B_n \subset U_{\alpha_n}$. Se afirma que esta familia de $\{U_{\alpha_n}\}$ recubre X, dado que si $x \in X$, se tiene que, por ser base, $x \in B_n$ para cierto n, pero entonces $x \in U_{\alpha_n}$ y por tanto $X \subset \bigcup U_{\alpha_n}$.

Para el segundo, tomamos un $x_n \in B_n$ para cada n. La familia $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es numerable y densa, dado que todo abierto $U \in \tau$ verifica que algún $B_n \subset U$, y por lo tanto $\{x_n\} \subset U \cap D$ y D es denso. $\square$

A continuación veremos los axiomas de separación, que son distintas clasificaciones de los espacios topológicos dependiendo de cuánto se separan los puntos dentro de ellas. Ya se ha visto la clase de topologías **Hausdorff**, que se denota T_2. Vamos a ver otras.

Definición 31. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que es **regular** o T_3 si los conjuntos de la forma $\{x\}$ para un $x \in X$ son todos cerrados, y los puntos pueden separarse de los cerrados, es decir, dado $x \in X$ y $C \subset X$ cerrado, con $x \notin C$, hay abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ con $x \in U$, $C \subset V$.

Definición 32. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que es **normal** o T_4 si los conjuntos de la forma $\{x\}$ para un $x \in X$ son todos cerrados, y los cerrados pueden separarse, es decir, dados $C, D \subset X$ cerrados disjuntos, hay abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ con $C \subset U$, $D \subset V$.

Observación 10. Claramente, T_4 es más restrictivo que T_3, luego los espacios normales son regulares. Asimismo, T_3 es más restrictivo que T_2, porque dados dos puntos x, y distintos, como $\{x\}$, $\{y\}$ son puntos cerrados, pueden separarse. Por tanto, los espacios regulares son Hausdorff.

Definición 33. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que es **Fréchet** o T_1 si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, entonces hay abiertos $U, V \in \tau$ con $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$, $x \notin V$.

Véase que los puntos se separan por abiertos, pero no tienen por qué ser disjuntos. Esto equivale asimismo a decir que los conjuntos de la forma $\{x\}$ con $x \in X$ son cerrados.

Definición 34. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que es **Kolmogorov** o T_0 si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, hay un abierto $U \in \tau$ tal que, o bien $x \in U$, $y \notin U$, o bien $x \notin U$, $y \in U$.

Por ejemplo, $\{a, b\}$ con la topología $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ es Kolmogorov pero no Fréchet.

2. Conexión

2.1. Noción de conexión

Hay ciertas propiedades que se tienen de forma muy natural en $(\mathbb{R}^n, \tau)$ con τ la topología usual, por ejemplo, si $n = 1$, las funciones continuas en $[a, b]$ toman todos los valores intermedios, pero esto no ocurre en otros espacios topológicos. Esta y muchas otras propiedades vienen dadas por el concepto de **conexión**.

Definición 35. Dado un espacio topológico (X, τ), se dice que es **conexo** si X no puede escribirse como la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. Es decir, no existen $U, V \in \tau$, $U \neq \emptyset \neq V$, con $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 13. *Un espacio (X, τ) es conexo si y solo si el único conjunto no vacío que es abierto y cerrado es todo X.*

Demostración. Esto es así porque si no es conexo, con $X = U \uplus V$ abiertos disjuntos no vacíos, entonces U es abierto y cerrado no vacío, no total. Asimismo, si hay algún U no vacío, abierto y cerrado, y no total, entonces U y U^c impiden que X sea conexo. □

Proposición 14. *Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Si $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau')$, con τ' la usual, es una función continua, y $a, b \in X$ son tales que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces hay $c \in X$ con $f(c) = 0$.*

Demostración. Basta con ver que si no se cumple, $U = f^{-1}((-\infty, 0))$ y $V = f^{-1}((0, \infty))$ son abiertos (por ser f continua), disjuntos (por ser preimágenes de disjuntos), no vacíos (tienen a $f(a)$ y $f(b)$) y su unión da todo X (porque no hay c con $f(c) = 0$). □

(El recíproco, además, es cierto: si toda función continua tiene la propiedad del valor intermedio, entonces X es conexo. Esto es así por que si X no es conexo, separable por U y V digamos, entonces podemos definir f como -1 en U y 1 en V, y esta función es continua pero no verifica la propiedad.)

Proposición 15. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es conexo $\iff$ no hay ninguna $f : X \to \{0, 1\}$ continua sobreyectiva, con la topología discreta en llegada.*

Demostración. Si X es conexo y existiese tal f, entonces $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{1\})$ separarían X en abiertos disjuntos no vacíos. Por otra parte, si X no es conexo por culpa de abiertos U, V disjuntos no vacíos, basta con hacer una f tal que $f(U) = 0$ y $f(V) = 1$, y es inmediato que es sobreyectiva y continua. □

Definición 36. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $Y \subset X$ es **subconjunto conexo** de X si el espacio $(Y, \tau|_Y)$ es conexo.

Observación 11. Es decir, Y es conexo si y solo si no hay abiertos U, V de X con $Y \subset U \cap V$, $Y \not\subseteq U$, $Y \not\subseteq V$, $U \cap V \cap Y = \emptyset$. Esto sigue de aplicar la definición.

Definición 37. Consideramos $(\mathbb{R}, \tau)$ con τ la topología usual. Se definen los **intervalos generalizados** como los conjuntos de la forma $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b], (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a], [a, \infty), \{a\}, \emptyset, X$.

Observación 12. $I \subset \mathbb{R}$ es intervalo generalizado si y solo si dados $x < z < y$, con $x, y \in I$, entonces $z \in I$.

El $\implies$ puede comprobarse caso por caso, y para $\impliedby$ se pone $a = \inf I$, $b = \sup I$, y dependiendo de si a y b están en I, puede usarse la propiedad para identificar I como un intervalo de extremos a, b.

Proposición 16. *En $\mathbb{R}$, se tiene que $I \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solo si es intervalo generalizado.*

Demostración. Para $\implies$, supongamos que I no es intervalo generalizado. Entonces existen $x < z < y$ con $x, y \in I$ pero $z \notin I$. Sea $U = (-\infty, z)$, $V = (z, \infty)$. Como $z \notin I$, se tiene $I \subset U \cup V$, claramente $U \cap V = \emptyset$, y hay puntos de I tanto en U (x) como en V (y), luego no es conexo. Para $\impliedby$, supongamos que I no es conexo, es decir, hay U, V abiertos que lo separan. En particular, $\alpha \in I \cap U$, $\beta \in I \cap V$, y pongamos $\alpha < \beta$. Definimos $m = \sup([\alpha, \beta] \cap U \cap I)$. Como $\alpha \leq m \leq \beta$, e I es intervalo generalizado, sigue que $m \in I$. Como V es abierto y $\beta \in V$, entonces $m \neq \beta$, dado que si no, habría $\{x_n\} \subset U \cap I \cap [\alpha, \beta]$ con $x_n \to \beta$, pero al ser V abierto que contiene a β, una cantidad infinita de estos x_n estarían en V, y entonces $V \cap I \cap U \neq \emptyset$. Como U es abierto, y $\alpha \in V$, entonces $m \neq \alpha$. De la misma manera, puede probarse que $m \notin U$, $m \notin V$, contradiciendo que $m \in I$. $\square$

Lo único que hemos usado es la propiedad del supremo y que dados $x < y$, hay un $z \in (x, y)$.

Definición 38. Un conjunto totalmente ordenado $(X, <)$ es un **continuo lineal** si tiene la propiedad del supremo y, dados $x, y \in X$, con $x < y$, se tiene un $z \in X$ con $x < z < y$.

Proposición 17. *Si $(X, <)$ es un continuo lineal, entonces $(X, \tau_<)$ es conexo.*

La demostración es análoga a la de $\mathbb{R}$.

Proposición 18. *Si (X, τ) es un espacio topológico, y $\{S_i\}_{i \in I}$ son subconjuntos conexos, y $\bigcap S_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup S_i$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que hay $U, V \in \tau$ con $\bigcup_{i \in I} S_i \subset U \cup V$, y $U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \emptyset$. Vamos a ver que en ese caso es necesario que $\bigcup S_i \subset U$ o bien $\bigcup S_i \subset V$. Para cada $i_0 \in I$ se tiene que $S_{i_0} \subset U \cap V$, y $U \cap V \cap S_{i_0} = \emptyset$, luego, fijado un i_1, podemos poner sin perder generalidad que $S_{i_1} \subset U$, y entonces el resto de los $S_i \subset U$, dado que si no, se tendría $\emptyset \neq \bigcap S_i \subset U \cap V \cap \bigcup S_i$, lo que no es posible. Así, $\bigcup S_i \subset U$. $\square$

Definición 39. Sea (X, τ) espacio topológico. Se dice que $K \subset X$ es una **componente conexa** de X si K es conexo y toda vez que $A \cap K \neq \emptyset$, con A conexo, entonces $A \subset K$.

Asimismo, dado $x \in X$, se define la **componente conexa de** x como $\Gamma_x = \{y \in X : \exists A \subset X \text{ conexo } : x, y \in A\}$.

Proposición 19. *Dada $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua, se tiene que si X es conexo, entonces $f(X)$ también.*

Demostración. Si $f(X)$ no es conexo, y $A, B \subset Y$ son los abiertos que lo separan, es fácil ver que $U = f^{-1}(A)$, $V = f^{-1}(B)$ separan X, y son abiertos por ser f continua. Luego X no sería abierto. $\square$

Sigue entonces que las bolas de $\mathbb{R}^n$ son conexas, gracias a la aplicación $x \to \frac{rx}{\|x\|+1}$, que es continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y su imagen es $B(0, r)$.

Teorema 9. *Si $Y \subset X$ es conexo y $Z \subset X$ verifica $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, entonces Z es conexo. En particular, el cierre de un conexo es conexo.*

Demostración. Supongamos que $A, B \subset X$ son cerrados con $Z \subset A \cup B$, $A \cap B \cap Z = \emptyset$. Como asimismo $Y \subset Z \subset A \cup B$, sigue que $Y \subset A$ o $Y \subset B$. Sin perder en generalidad, ponemos $Y \subset A$, y por definición de cierre, $\overline{Y} \subset A$, al ser A cerrado, luego $Z \subset A$. $\square$

Proposición 20. *Sean $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ espacios topológicos no vacíos. Se tiene que el producto $(\Pi X_i, \Pi \tau_i)$ es conexo $\iff$ cada (X_i, τ_i) es conexo.*

Demostración. Para $\implies$, como $\pi_i : (\Pi X_i, \Pi \tau_i) \to X_i$, la proyección en la i-ésima coordenada, es continua, entonces $\pi_i((\Pi X_i, \Pi \tau_i)) = X_i$ es conexo. Para $\impliedby$, vamos a probarlo para $n = 2$, y el resultado general sigue por inducción. Sean $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. El $\{x_1\} \times X_2$ y el $X_1 \times \{x_2\}$ han de ser conexos, por ser la imagen de X_2 por $x \to (x_1, x)$, y de X_1 por $x \to (x, x_2)$, que son funciones continuas. Como (x_1, x_2) está en ambos, sigue que su unión $C_(x_1, x_2) = (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$ es conexa. Pero entonces $X_1 \times X_2 = \bigcup_{x \in X_1} C_{(x, x_2)}$, y todos tienen al (x_1, x_2), por ejemplo (en realidad contienen a todo $X_1 \times \{x_2\}$), luego su intersección es no vacía y por lo tanto $X_1 \times X_2$ es conexo. $\square$

Definición 40. Un espacio topológico (X, τ) es **conexo por caminos** si dados $x_0, x_1 \in X$, siempre se tiene una $\gamma : ([0,1], \tau_{\text{usual}}) \to (X, \tau)$ continua, con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$.

Teorema 10. *Sea (X, τ) conexo por caminos. Entonces es conexo.*

Demostración. Si no lo fuese, sea $U, V \subset X$ una separación (disjuntos, abiertos propios no vacíos y su unión es todo X). Tomamos $x_0 \in U$, $x_1 \in V$. Como (X, τ) es conexo por caminos, se tiene $\gamma : [0,1] \to X$ continua con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Se tiene $\gamma^{-1}(U)$ y $\gamma^{-1}(V)$ son abiertos disjuntos, al ser γ continua, son no vacíos porque $0 \in \gamma^{-1}(U)$ y $1 \in \gamma^{-1}(V)$, y además $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(X) = [0,1]$, contradiciendo que $[0,1]$ sea conexo. □

Proposición 21. *(X, τ) es conexo por caminos $\iff$ $\exists x_0 \in X$ tal que $\forall x \in X$, existe un camino continuo de x_0 a x.*

Demostración. $\implies$ es trivial, para cualquier elección de x_0. A la inversa, dados $x, y \in X$, tomamos los caminos $\gamma_0 : [0,1] \to X$ de x_0 a x, y $\gamma_1 : [0,1] \to X$ de x_0 a y. El camino:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(1-2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \gamma_1(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es continuo y $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. □

Proposición 22. *Sea (X, τ) conexo por caminos y $f : X \to Y$ continua. Entonces $f(X)$ es conexo por caminos.*

Demostración. Si $y_0, y_1 \in Y$, entonces hay x_0, x_1 con $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$. Tomamos γ el camino continuo entre x_0 y x_1, y claramente $\alpha = f \circ \gamma$ es un camino continuo entre y_0 e y_1. □

Obsérvese que entonces los homeomorfismos preservan tanto conexión como conexión por caminos.

Teorema 11. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto conexo. Entonces es conexo por caminos.*

Demostración. Fijado $x_0 \in A$, queremos ver que $\forall x \in A$, se tiene un $\gamma_x : [0,1] \to A$ continuo con $\gamma_x(0) = x_0$ y $\gamma_x(1) = x$. Como A es conexo, sus únicos subconjuntos abiertos y cerrados son $\emptyset$ y A. Definimos el conjunto de puntos *alcanzables*, $B = \{x \in A : \exists \gamma_x \text{ camino continuo.}\}$. Claramente $B \neq \emptyset$ porque $x_0 \in B$.

Asimismo, como A es abierto, si $x \in B$, se tiene $\epsilon > 0$ con $B(x, \epsilon) \subset A$. Vamos a ver asimismo que $B(x, \epsilon) \subset B$, lo que probaría que B es abierto en $\mathbb{R}^n$ y por tanto en A. Como $x \in B$, se tiene el camino γ entre x_0 y x, y asimismo, si $y \in B(x, \epsilon)$, tenemos el camino $\tilde{\gamma}_y : [0,1] \to A$, dado por $\tilde{\gamma}_y(t) = (1-t)x + ty$, al ser la bola $B(x, \epsilon)$ convexa. Combinando estos dos caminos, como se vio anteriormente, se tiene un camino de x_0 hasta y.

Finalmente, vamos a ver que $A \backslash B$ es abierto, luego B es cerrado de A. Dado $x \in A \backslash B$, queremos ver que $B(x, \epsilon) \subset A \backslash B$. Si no fuese así, y hay $y \in B(x, \epsilon) \cap B$, entonces podemos obtener un camino de x_0 a y, y a través de la bola uno de y a x, como antes, luego hay un camino de x_0 a x, cosa imposible porque $x \notin B$. Se sigue por tanto que B es no vacío, abierto y cerrado en A, luego ha de ser $B = A$ al ser A conexo y hemos acabado. □

3. Compacidad

Al igual que el concepto de conexión buscaba generalizar el teorema de valores intermedios, entre otras propiedades, el objetivo ahora es generalizar el teorema de Bolzano-Weierstrass, es decir, que toda función continua en $[a, b]$ está acotada y tiene máximo. Recordemos que es importante que el dominio sea $[a, b]$ y no otros conjuntos. Vamos a ver qué espacios topológicos mantienen esta propiedad (así como otras muy importantes) además del $[a, b]$ con la topología usual.

Definición 41. Un espacio topológico (X, τ) tiene la **propiedad de Bolzano-Weierstrass** si todo subconjunto infinito $A \subset X$ tiene un punto de acumulación, es decir, verifica $A' \neq \emptyset$.

Teorema 12. *Si (X, τ) tiene la propiedad Bolzano-Weierstrass y es Hausdorff, entonces toda $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{usual})$ continua tiene un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in X$. Es decir, alcanza un máximo.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $f(X) \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, y sea $M = \sup f(X)$. Buscamos $x_0 \in X$ con $f(x_0) = M$. Si no existiese, es decir, si $f(x) < M$ $\forall x \in X$, construimos una sucesión x_n tal que $M > f(x_n) > \text{máx}(M - \frac{1}{n}, f(x_{n-1}))$, lo que es posible por ser M supremo. Es decir, $f(x_n)$ es estrictamente creciente, distinta de M, y tiende a M.

Como $A = \{x_n\}_n$ es un conjunto infinito (puesto que al ser todos los $f(x_n)$ distintos, los x_n también), se tiene un $b \in A'$ por la propiedad Bolzano-Weierstrass. Supongamos que $f(b) < M$. Sea $V = (f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$ donde $\epsilon = \frac{M - f(b)}{2}$. Como f es continua, entonces $U = f^{-1}(V)$ es abierto de X, y $b \in U$.

Solo una cantidad finita $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de los x_n puede estar en U, porque en algún momento $f(x_n) > \frac{M+f(b)}{2}$, y por tanto se sale de V. Como X es Hausdorff, para cada x_i tal que $x_i \neq b$, con $1 \leq i \leq k$, tomamos abiertos U_i, W_i disjuntos que separan a x_i y a b respectivamente. El conjunto $W = U \cap \bigcap W_i$ es abierto y se verifica que $W \cap A \subset \{b\}$ (siendo vacío dependiendo de si alguno de los x_i era b o no), puesto que en $U \cap A$ solo estaban los finitos x_i, y en cada W_i falta el x_i que no coincide con b, luego en la intersección no hay nada de A (salvo posiblemente b). Esto contradice que b sea un punto de acumulación.

Finalmente veamos qué pasa si $f(X)$ no estaba acotada superiormente. En ese caso construimos una sucesión $\{x_n\} \subset X$ de valores tales que $f(x_n) > \text{máx}\{f(x_{n-1}, n)\}$, es decir una sucesión estrictamente creciente, más rápido que la sucesión n. Tomamos $b = \{x_n\}'$ por la propiedad Bolzano-Weierstrass, y construimos $V = (f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$, para un ϵ adecuado, cuya preimagen contiene solo una cantidad finita de $\{x_n\}$ y puede repetirse el argumento. □

La idea ahora es demostrar lo mismo pero para $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_{\text{orden}})$, y veremos que no basta con la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Definición 42. Si (X, τ) es un espacio topológico, se dice que una familia $\{V_i\}_{i \in I}$ de abiertos ($V_i \in \tau$) forma un **recubrimiento de** X si $\bigcup_{i \in I} V_i = X$.

Definición 43. Se dice que (X, τ) es **compacto** si todo recubrimiento $\{V_i\}_{i \in I}$ admite un subrecubrimiento finito $\{V_j\}_{j=1}^N \subset \{V_i\}_{i \in I}$. Es decir, pueden escogerse finitos V_i de tal modo que siga siendo un recubrimiento.

Definición 44. Dado (X, τ) un espacio topológico, se dice que $A \subset X$ es un **subconjunto compacto** de X si $(A, \tau|_A)$ es compacto.

Observación 13. $A \subset X$ es un subconjunto compacto $\iff$ toda familia $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ tal que $A \subset \bigcup_i U_i$ admite una subfamilia $\{U_{i_j}\}_{j=1}^N$ tal que $A \subset \bigcup_j A_{i_j}$.

Con esto, se tiene el teorema principal que se había mencionado:

Teorema 13. *Sea (X, τ) compacto, Y un conjunto totalmente ordenado y $\tau_{\leq}$ la topología del orden en Y. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $\exists x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X$. Es decir, si f es continua en un compacto X, alcanza un máximo.*

Demostración. Supongamos que no existe tal x_0. En ese caso, para cada $x \in X$ $\exists y_x \in X$ tal que $f(x) < f(y_x)$, es decir $x \in f^{-1}((\leftarrow, f(y_x)))$. Definimos $U_x = f^{-1}((\leftarrow, f(y_x)))$ que son abiertos por ser f continua, y ponemos $X = \bigcup_{x\in X} U_x$. Como X es compacto, tenemos $x_1, \dots, x_n$ finitos tales que $X = \bigcup_{1\leq i\leq n} U_{x_i}$. Si ahora tomamos el $y = \max\{f(y_{x_1}), \dots, f(y_{x_n})\}$, llegamos a una contradicción, puesto que sabemos que hay un $i \in \{1, \dots, n\}$ con $f(x) < f(y_{x_i}) \leq y$, y el y se alcanza en un y_{x_j}, luego ahí está el máximo. □

A continuación vamos a ver cómo determinar si un espacio es compacto.

Proposición 23. *Sea (X, τ) un espacio compacto. Entonces, si $A \subset X$ es cerrado, se tiene que es también comapcto.*

Demostración. Sean V_i abiertos de X tales que $A \subset \bigcup V_i$. Tenemos que $X = \bigcup V_i \cup (X \setminus A)$, donde todos ellos son abiertos puesto que A es cerrado. Como X es compacto, se tienen $\{V_j\}_{j=1}^n$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^n V_j \cup (X \setminus A)$, por lo tanto $A \subset \bigcup_{j=1}^n V_j$. □

A continuación veremos un *recíproco* en el que, si el espacio ambiente es Hausdorff, un subconjunto compacto es cerrado.

Lema 2. *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff. Si $A \subset X$ es compacto, y $b \notin A$, se tienen dos abiertos $U, V \in \tau$ con $A \subset U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Dado $a \in A$, se tienen U_a, V_a abiertos disjuntos que separan a y b. Como $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$, y es compacto, tenemos $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ tales que $A \subset \bigcup_1^n U_{a_i}$. Definimos los abiertos $U = \bigcup_1^n U_{a_i}$ y $V = \bigcap_1^n V_{a_i}$. Como hemos visto, $A \subset U$, y además $b \in V$, y se tiene que $U \cap V = \bigcup_1^n U_{a_i} \cap V \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$. □

Proposición 24. *Si (X, τ) es Hausdorff y $A \subset X$ es compacto, entonces A es cerrado.*

Demostración. Dado $b \in A^c$, tomamos por el lema previo los abiertos U_b, V_b, luego $A^c = \bigcup_{b\in A^c} V_b$, puesto que los $V_b \subset A^c$, y esa es una unión de abiertos luego A^c es abierto y A cerrado. □

Como corolario, si X es compacto y Hausdorff, los subconjuntos compactos son los mismos que los cerrados.

Teorema 14. *Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ es continua, dado un $A \subset X$ compacto, entonces $f(A)$ es compacto en Y.*

Demostración. Si $f(A) \subset \bigcup V_i$ para ciertos abiertos V_i, entonces $A \subset \bigcup f^{-1}(V_i)$, que son abiertos de X, luego tomamos una cantidad finita con $A \subset \bigcup_1^n f^{-1}(V_{i_k})$, y por tanto $f(A) \subset \bigcup_1^n V_k$. □

Observación 14. Si $f : X \to Y$ es continua, X es compacto e Y es Hausdorff, entonces es un homeomorfismo.

La razón es que dado $B \subset X$ cerrado, sigue que B es compacto al serlo X, luego $f(B)$ es compacto en Y y como Y es Hausdorff, $f(B)$ es cerrado luego f^{-1} es continua (las preimágenes de cerrados son cerrados).

Ahora el objetivo es ver qué pasa con el producto cartesiano de compactos.

Lema 3. *Sea X un espacio topológico arbitrario, e Y un espacio topológico compacto. Si $H \subset X \times Y$ es un abierto de $X \times Y$ que contiene a $x_0 \in X$, entonces hay un $U \subset X$ abierto tal que $x_0 \in U$ y $U \times Y \subset H$.*

Demostración. $\{x_0\} \times Y$ es compacto, porque es la imagen de Y por la aplicación continua $y \to (x_0, y)$. Dado $y \in Y$, se tienen las inclusiones $(x_0, y) \in x_0 \times Y \subset H$, que es abierto, luego hay un abierto básico $U_y \times V_y \subset H$ con $x_0 \in U_y$, $y \in V_y$. Entonces $\{x_0\} \times Y \subset \bigcup_{y\in Y} U_y \times V_y$, y por compacidad, entonces hay $\{y_1, \dots, y_k\}$ finitos con $\{x_0\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^k U_{y_i} \times V_{y_i}$. Se tiene entonces el abierto $U = \bigcap_{i=1}^k$, entorno abierto de x_0, y si $(x, y) \in U \times Y$, entonces $(x_0, y) \in U_{y_j} \times V_{y_j}$ para cierto j, de donde $y \in V_{y_j}$ y por tanto $(x, y) \in H$ (porque $x \in U_{y_j}$ para todos los j). □

Teorema 15. *Sean X e Y espacios topológicos compactos. Entonces $X \times Y$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $X \times Y$. Dado $x \in X$, tomamos el compacto $\{x\} \times Y$, que también es recubierto por los mismos U_i, luego podemos tomar una colección $C_x = \{U_k^x\}_{k=1}^{n_x}$ de abiertos entre los U_i, finita, tal que $\{x\} \times Y \subset \bigcup C_x$. Es decir, $H_x = \bigcup C_x$ es un abierto que contiene a $\{x\} \times Y$.

Por el lema, como Y es compacto, podemos *engordar la linea* $\{x\} \times Y$ dentro de H_x, es decir, hay un abierto $\Omega_x \subset X$ con $x \in \Omega_x$ y $\Omega_x \times Y \subset H_x$. Como los Ω_x recubren X, tomamos un subrecubrimiento finito $\{\Omega_{x_i}\}_{i=1}^m$, y se sigue entonces que $\bigcup_{i=1}^m H_{x_i}$ es una unión finita de U_i y recubren $X \times Y$, porque si $(x, y) \in X \times Y$, entonces $x \in \Omega_{x_j}$ para cierto j, luego $(x, y) \in \Omega_{x_j} \times Y \subset H_{x_j}$. $\square$

Definición 45. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si existe un $K > 0$ tal que $A \subset (-K, K)^n$.

Con el fin de caracterizar los compactos de $\mathbb{R}^n$, necesitamos ver que las *cajas* son compactas:

Lema 4. *En $\mathbb{R}^n$, la caja $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es compacta.*

Demostración. Basta probar que en $\mathbb{R}$ el $[0, 1]$ es compacto, puesto que entonces cualquier $[a, b]$ lo será, al ser homeomorfos, y entonces el producto de esos compactos será compacto. Supongamos que no lo fuera. Entonces $[0, 1] \subset \bigcup U_i$ es un cubrimiento sin subrecubrimiento finito. Tanto $[0, \frac{1}{2}]$ como $[\frac{1}{2}, 1]$ están en esa unión, y alguno de ellos es recubierto estrictamente por una cantidad infinita de U_i (si no, los dos se recubren por una cantidad finita, y entonces el $[0, 1]$ también). Si seguimos subdividiendo de esta manera, obtenemos la cadena:

$$[0, 1] = [x_0, y_0] \supset [x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset \dots$$

Tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, el $[x_n, y_n]$ no es compacto (al no admitir subrecubrimiento finito), y asimismo $y_n - x_n = \frac{1}{2^n}$. Sabemos que entonces que en esta situación $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \equiv \alpha$ (existe porque cada sucesión es monótona y acotada, y coinciden por la relación entre las longitudes), de tal modo que $\{\alpha\} = \bigcap [x_n, y_n]$.

Ahora, como $\alpha \in [0, 1]$, hay un i_0 y un $\epsilon > 0$ con $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \subset U_{i_0}$, lo que indicaría para n suficientemente grande que $[x_n, y_n] \subset (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \subset U_{i_0}$, cosa imposible por construcción. $\square$

El siguiente teorema caracteriza los compactos de $\mathbb{R}^n$:

Teorema 16. *$A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto (en la topología usual) si y solo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos que A es compacto. Como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, entonces es cerrado. Asimismo, tomando los abiertos $U_m = (-m, m)$ para $m \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m = \mathbb{R}^n$, luego existen índices finitos $\{m_1, \dots, m_k\}$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{m_i} = U_M$ siendo $M = \max m_i$, luego es acotado.

Por otra parte, si A es cerrado y acotado, $\exists M > 0$ con $A \subset [-M, M]^n$ por ser acotado, y todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto, luego hemos acabado. $\square$

3.1. Compacidad en espacios métricos

A continuación vamos a estudiar el caso concreto de los espacios métricos.

Proposición 25. *Sea (X, d) métrico. Entonces, si X es compacto, se tiene que es cerrado y acotado.*

Demostración. Claramente es cerrado por ser Hausdorff. Asimismo, el conjunto $\{B(0, r)\}_{r>0}$ cubre X luego admite un subrecubrimiento finito, que es de hecho una bola $B(0, K)$ con $K \geq 0$. $\square$

Teorema 17. *Sea (X, d) un espacio métrico. Equivalen:*

1. *X es compacto.*

2. *X tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

3. *X es secuencialmente compacto, es decir, toda $\{x_n\} \subset X$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Para $1 \implies 2$, supongamos que hay un $A \subset X$ con $A' = \emptyset$. Entonces $\overline{A} = A \cup A' = A$, luego A es cerrado. Así, cada $a \in A$ tiene un abierto U_a con $U_a \cap A = \{a\}$ (y no más, o sería de acumulación), y la colección $\{X \setminus A\} \cup \{U_a\}_{a \in A}$ son abiertos que recubren X y por tanto admite un subrecubrimiento finito, de donde se sigue que A es finito (dado que puede cubrirse con una cantidad finita de U_a, que son puntos sueltos).

Para $2 \implies 3$, si $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión, y consideramos $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si A es finito hemos acabado porque hay una subsucesión constante. Si no, entonces $A' \neq \emptyset$. Tomamos $x \in A'$, y entonces podemos construir la subsucesión convergente de esta manera: tomamos n_1 tal que $x_{n_1} \in B(x, 1)$, luego $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2})$, y así sucesivamente. Esto es posible por estar en un espacio métrico y ser x de acumulación en la sucesión.

Para $3 \implies 1$, primero vamos a ver el **lema de Lebesgue**, que afirma que si $\mathcal{C}$ es un recubrimiento de X, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in X$, $\exists C \in \mathcal{C}$ con $B(x, \delta) \subset C$. Si no fuese así, tomando $\delta_n = \frac{1}{n}$, habría un x_n con $B(x_n, \frac{1}{n}) \notin C$, $\forall C \in \mathcal{C}$. Esta sucesión, $\{x_n\}$, por hipótesis, tiene una subsucesión convergente $x_{n_k} \to a$, y $a \in C \in \mathcal{C}$, luego $\exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset C$, por ser C abierto. Por ser a límite, hay un n_k con $d(a, n_k) < \frac{r}{2}$, y con $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$. Se afirma ahora que $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset C$, porque si $p \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$, se tiene $d(p, a) \leq d(p, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \leq \frac{1}{n_k} + \frac{r}{2} < r$, contradiciendo la definición de x_{n_k}.

Tras haber demostrado ese lema, sea $\mathcal{C}$ un recubrimiento de X con número de Lebesgue $\delta > 0$. Sea $x_1 \in X$. Sabemos que $\exists C_1 \in \mathcal{C}$ con $B(x_1, \delta) \subset C_1$. Si esa bola ya recubre X, hemos acabado. Si no, tomamos $x_2 \in X \setminus B(x_1, \delta)$, y sabemos que $\exists C_2$ con $x_2 \in B(x_2, \delta) \subset X_2$. De nuevo, si su unión cubre X, hemos acabado, si no, continuamos. Este proceso ha de terminar en algún momento, porque de otro modo hemos construido una sucesión x_n con $d(x_n, x_k) \geq \delta$, $\forall k < n$, dado que cada x_n está fuera de todos los C_k anteriores. Por hipótesis, tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a a, pero entonces $0 < \delta \leq d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq d(a, x_{n_k}) + d(a, x_{n_{k+1}}) \to 0$, contradictorio. Se obtiene así el recubrimiento finito. $\square$

4. Homotopía

En esta sección se va estudiar un invariante distinto de la compacidad y la conexión que permitirá identificar espacios no homeomorfos.

Definición 46. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\gamma, \eta : [0,1] \to X$, continuas, dos caminos en X con el mismo punto inicial y final, es decir, que $\gamma(0) = \eta(0)$ y $\gamma(1) = \eta(1)$. Se dice que γ y η son **caminos homótopos** si:

1. $\forall s \in [0,1]$ hay un camino continuo $F_s : [0,1] \to X$ con $F_s(0) = \gamma(0) = \eta(0)$ y $F_s(1) = \gamma(1) = \eta(1)$.
2. Se tiene $F_0 \equiv \gamma$ y $F_1 \equiv \eta$.
3. La aplicación $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ dada por $F(s,t) = F_s(t)$ es continua.

En ese caso, tal F se denomina **homotopía entre γ y η**.

Es decir, son homótopos si existe una trasformación continua que convierte un camino en el otro.
Denotaremos $C_p : [0,1] \to X$ al camino constante $C_p(t) = p \in X$, $\forall t \in [0,1]$.

Observación 15 (Ejemplo). Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un **conjunto estrellado** respecto a p, es decir, aquel tal que todo $q \in A$ verifica que el segmento $\bar{pq} \subset A$. Entonces, cualquier **lazo** $\gamma : [0,1] \to A$ centrado en p, es decir, que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, es homótopo a C_p.

Para ello, consideramos $F(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sp$. Es claramente continua en s y t, y los F_s no se salen de A puesto que $\gamma(t) \in A$ y por tanto, fijado el t, todo ese segmento está en A al ser estrellado.

Otro ejemplo más sencillo es dos caminos γ, η cualesquiera entre dos puntos, en un conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$. La homotopía es $F(s,t) = s\gamma(t) + (1-s)\eta(t)$, y como cualesquiera segmentos rectilíneos entre dos puntos de un convexo permanecen dentro del convexo, esa homotopía verifica todas las propiedades.

Proposición 26. *Sea (X, τ) espacio topológico y fijamos $x_0, x_1 \in X$. La relación de homotopía, $\gamma\tilde{\eta} \iff \gamma, \eta$ son homótopos, es de equivalencia en el conjunto de caminos entre x_0 y x_1.*

Demostración. La reflexividad es evidente a través de la homotopía $F(s,t) = \gamma(t)$. Para la simetría, si $F(s,t)$ es una homotopía de γ a η, entonces es inmediato verificar que $F(1-s,t)$ es una homotopía que va de η a γ. Para la transitividad, si $\gamma \sim \eta$ y $\eta \sim \sigma$, a través de las homotopías F y G, construimos $H(s,t)$ a través de $H(s,t) = F(2s,t)$ si $s \in [0, \frac{1}{2}]$ y $H(s,t) = G(2s-1,t)$ si $s \in [\frac{1}{2}, 1]$. Es decir, con la primera mitad de las s pasamos de γ a η y con la segunda de η a σ, lo que da una homotopía (es inmediato comprobarlo) entre γ y σ. □

Definición 47. Dado un camino $\gamma : [0,1] \to X$, definimos el *camino inverso* por $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, y dado otro camino η tal que $\gamma(1) = \eta(0)$, definimos la **concatenación** $\gamma * \eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \eta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

Proposición 27. *Se tiene que, en el cociente, $[\gamma * \eta] = [\gamma] * [\eta]$ está bien definida, es asociativa, y $[\bar{\gamma}] * [\gamma] = [C_{x_0}]$, donde x_0 es el punto de partida de γ.*

Demostración. Tomamos otros representantes $\gamma_1 \sim \gamma$ y $\eta_1 \sim \eta$. Tenemos que ver que $[\gamma * \eta] = [\gamma_1 \sim \eta_1]$. Si F es la homotopía de γ en γ_1 y G la que va de η en η_1, basta con definir $H(s,t) = F(s,2t)$ para $t \in [0, \frac{1}{2}]$, y $H(s,t) = G(s, 2t-1)$ para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, para relacionar $\gamma * \eta$ con $\gamma_1 * \eta_1$.

Para la asociatividad, basta con ver que $(\gamma * \eta) * \sigma \sim \gamma * (\eta * \sigma)$. Puede parecer evidente, dado que la traza de ambos caminos es la misma, pero los caminos no son los mismos dado que dicha traza se recorre de maneras distintas. De todas maneras, sí que son homótopos. En primer lugar, observemos:

$$(\gamma * \eta) * \sigma(t) = \begin{cases} \gamma(4t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \eta(4t-1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\gamma * (\eta * \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \eta(4t-2) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \sigma(4t-3) & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Se define la homotopía:

$$F(s,t) = \begin{cases} \gamma(\frac{4t}{s+1}) & t \in [0, \frac{s+1}{4}] \\ \eta(4t-s-1) & t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] \\ \sigma(\frac{4t-s-2}{2-s}) & t \in [\frac{s+2}{4}, 1] \end{cases}$$

Se comprueba que en efecto para $s = 0$ y $s = 1$ se obtienen los caminos correctos, y que en todo s conecta los extremos de correctos, así como que es continua.

Para el último resultado, veamos que:

$$\gamma * \bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{\gamma}(2t-1) = \gamma(2(1-t)) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La homotopía en cuestión con el camino constante es:

$$F(s,t) = \begin{cases} \gamma(2ts) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2(1-t)s) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

Si consideramos los caminos que comienzan y acaban en un mismo punto x_0, los **lazos en** x_0, el conjunto de clases de homotopía de los lazos en x_0 es un **grupo** con la operación $*$, cerrada porque concatenar dos clases de homotopía da la clase de la concatenación, que también es un lazo en x_0; asociativa por lo que hemos visto anteriormente, siendo $[C_{x_0}]$ el neutro y $[\bar{\gamma}]$ el inverso de $[\gamma]$.

Definición 48. El conjunto de clases de homotopía de los lazos en $x_0 \in X$, con la operación de concatenación $*$, se conoce como el **grupo fundamental de** X **en** x_0, y se denota $\pi_1(X, x_0)$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ o en un conjunto convexo o estrellado, por lo que se discutió anteriormente, todos los lazos en x_0 son homótopos, luego el grupo de homotopía es el trivial: $\pi_1(X, x_0) = \{[C_{x_0}]\}$. En otros espacios como $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, el grupo en $x_0 = (1,0)$ no es trivial, dado que los lazos que *rodean al origen* no pueden deformarse de manera continua en los que no lo hacen.

Observación 16. Dados dos puntos $x_0, x_1 \in X$, sus clases de homotopía pueden relacionarse dado que si se tiene α un camino que conecta x_0 y x_1, y γ un lazo en x_0, se tiene que $\bar{\alpha} * \gamma * \alpha$ es un lazo en x_1, y se tiene la aplicación $\Phi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ dada por $\Phi_\alpha([\gamma]) = [\bar{\alpha} * \gamma * \alpha]$. Es fácil ver que está bien definida, y que es un homomorfismo de grupos, es decir $\Phi_\alpha([\gamma * \eta]) = \Phi_\alpha([\gamma]) * \Phi_\alpha([\beta])$. Además es de hecho un isomorfismo, porque $\Phi_{\bar{\alpha}} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ es su inversa.

Es decir, **si dos puntos se conectan por un camino, tienen el mismo grupo fundamental**.

Definición 49. El espacio (X, τ) es **simplemente conexo** si es conexo por caminos, y $\pi_1(X)$ es el trivial.

Es decir, es conexo por caminos, y todo lazo puede deformarse continuamente en un punto. Obsérvese que como es conexo por caminos, no hace falta especificar el punto donde se toma el grupo fundamental, dado que todos son isomorfos.

Proposición 28. *Dada* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *una aplicación continua,* $x_0 \in X$ *y* $f(x_0) = y_0 \in Y$*, definimos* $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *dada por* $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$*. Se tiene que está bien definida y es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Si $\gamma \sim \eta$ para dos lazos en x_0, vamos a ver que existe una homotopía entre $f \circ \gamma$ y $f \circ \eta$. Basta con definir $G(s,t) = f(F(s,t))$ donde F es la homotopía entre γ y η. Es continua, y se verifica que $G(0,t) = f \circ \gamma(t)$ y $G(1,t) = f \circ \eta(t)$. Así, la aplicación está bien definida.

Ahora vamos a comprobar que es homomorfismo. $f_*([\gamma]) * f_*([\eta]) = [f \circ \gamma] * [f \circ \eta] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \eta)] = [f \circ (\gamma * \eta)] = f_*(\gamma * \eta)$. ☐

Por ejemplo, $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{S}^1$ con $V(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es continua, y entonces se tiene que V_* es un homomorfismo de grupos.

Observación 17. Se tiene que si $Id : X \to X$, el Id_* es la identidad de $\pi_1(X, x_0)$, y asimismo si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, se tiene que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Observación 18. Si $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo**, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es **isomorfo** a $\Pi(Y, f(x_0))$, puesto que $(f^{-1})_*$ es el homomorfismo inverso, dado que $f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (Id_X)_* = Id$.

Por tanto:

Teorema 18. *Los homeomorfismos preservan el grupo fundamental, y por tanto si* X *e* Y *no tienen el mismo grupo fundamental no pueden ser homeomorfos.*

Proposición 29. *Sean* X, Y *espacios topológicos,* $x_0 \in X$*,* $y_0 \in Y$*, y* $f, g : X \to Y$ *aplicaciones continuas tales que* $f(x_0) = g(x_0) = y_0$*. Si* f, g *son homótopas por* $H(s,x)$ *(una deformación continua de* f *en* g*, es decir* $H(0,x) = f(x)$*,* $H(1,x) = g(x)$*,* H *continua) tal que* $H(s, x_0) = y_0$ $\forall s$*, se tiene que* $f_* = g_*$*, considerándolas entre* $\pi_1(X, x_0)$ *y* $\pi_1(X, y_0)$*.*

Demostración. Dado un lazo γ en x_0, la aplicación $(s,t) \to (s, \gamma(t)) \to H(s, \gamma(t))$ es continua por ser composición de continuas, y se verifica rápidamente que es una homotopía de caminos entre $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$, luego $f_*([\gamma]) = g_*([\gamma])$. ☐

Proposición 30. *Sean* X, Y *espacios topológicos,* $x_0 \in X$*,* $y_0 \in Y$*, y* $f, g : X \to Y$ *aplicaciones continuas tales que* $f(x_0) = g(x_0) = y_0$*. Si* f, g *son homótopas por* $H(s,x)$ *(una deformación continua de* f *en* g*, es decir* $H(0,x) = f(x)$*,* $H(1,x) = g(x)$*,* H *continua) tal que* $H(s, x_0) = y_0$ $\forall s$*, se tiene que* $f_* = g_*$*, considerándolas entre* $\pi_1(X, x_0)$ *y* $\pi_1(X, y_0)$*.*

Demostración. Dado un lazo γ en x_0, la aplicación $(s,t) \to (s, \gamma(t)) \to H(s, \gamma(t))$ es continua por ser composición de continuas, y se verifica rápidamente que es una homotopía de caminos entre $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$, luego $f_*([\gamma]) = g_*([\gamma])$. ☐

Observación 19 (El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$)*.* Dado un lazo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ en el punto $(1,0)$, existe una única función $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\gamma(t) = (\cos 2\pi\theta(t), \sin 2\pi\theta(t))$, y $\theta(0) = 0$. Tal lazo verifica que $\theta(1) \in \mathbb{Z}$, puesto que $\gamma(1) = (1,0)$ al ser un lazo. Se afirma que $\Phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \to \mathbb{Z}$ dada por $\Phi([\gamma]) = \theta_\gamma(1)$, es un isomorfismo de grupos, y por tanto el grupo fundamental de la circunferencia (en todo punto, al ser arcoconexa), es $\mathbb{Z}$.

Primero hay que ver que está bien definida. Si $[\gamma] = [\eta]$, se afirma que $\theta_\gamma(1) = \theta_\eta(1)$. Esto es así porque si $\gamma \sim \eta$, hay una homotopía $H(s,t)$ con $H(0,t) = \gamma(t)$, $H(1,t) = \eta(t)$, $H(s,0) = (1,0)$, $H(s,1) = (1,0)$. Para cada s, tomamos la única función continua θ_s con $\theta_s(0) = 0$ y $H(s,t) = (\cos 2\pi\theta_s(t), \sin 2\pi\theta_s(t))$. Debe darse, como pasaba anteriormente, que $\theta_s(1) \in \mathbb{Z}$, luego como $\theta_s(t) = \theta(s,t)$ es continua, se tiene que en particular $\theta(s,1) : [0,1] \to \mathbb{Z}$ es continua, y como va sobre $\mathbb{Z}$, ha de ser constante, de tal modo que $\theta(s,1) = z \in \mathbb{Z}$ fijo para todo $s \in [0,1]$, y en particular $\theta(0,1) = \theta(1,1) = z$, como se quería.

Ahora hay que ver que es homomorfismo. Dados dos lazos γ y η, sabemos que $[\gamma] * [\eta] = [\gamma * \eta]$, donde $\gamma * \eta$ es la concatenación. Ponemos $\eta(t) = (\cos 2\pi\theta_\eta(t), \sin 2\pi\theta_\eta(t))$, y $\gamma(t) = (\cos 2\pi\theta_\gamma(t), \sin 2\pi\theta_\gamma(t))$, siendo estas funciones continuas únicas para $\theta_\gamma(0) = \theta_\eta(0) = 0$. Consideramos también la $\tilde{\theta}_\eta$ con $\tilde{\theta}_\eta(0) =$

$\theta_\gamma(1) \in \mathbb{Z}$. Es inmediato que ambas difieren en una constante: $\tilde{\theta}_\eta(t) = \theta_\eta(t) + \gamma_\eta(1)$, dado que $\theta_\eta(t) + \gamma_\eta(1)$ verifica todas las condiciones que debe verificar $\tilde{\theta}_\eta(t)$, luego por unicidad coinciden. De esta manera, la función:

$$\theta_{\gamma*\eta} = \begin{cases} \theta_\gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \theta_\gamma(1) + \theta_\gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es la función angular de $\gamma * \eta$ y $\theta_{\gamma*\eta}(0) = 0$, luego:

$$\Phi([\gamma * \eta]) = \theta_{\gamma*\eta}(1) = \theta_\gamma(1) + \theta_\gamma(1) = \Phi([\gamma]) + \Phi([\eta])$$

Por tanto es homomorfismo.

Claramente es sobreyectivo, porque el camino $\gamma_n(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$ verifica que $\theta_n(t) = nt$, luego $\Phi([\gamma_n(t)]) = \theta_n(1) = n$, para $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario.

Para ver que es inyectivo, si γ y η verifican que $\theta_\gamma(1) = \theta_\eta(1)$, se define $H(s,t) = (\cos 2\pi((1-s)\theta_\gamma(t) + s\theta_\eta(t)), \sin 2\pi((1-s)\theta_\gamma(t) + s\theta_\eta(t)))$, y es inmediato ver que es una homotopía entre ambos caminos. □

Definición 50. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que r es una **retracción** de X si hay una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = Id_A$, en cuyo caso se dice que A es un **retracto** de X.

Por ejemplo, $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por la aplicación que proyecta radialmente $r(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

Proposición 31. *Si $A \subset X$ es un retracto de X, entonces el homomorfismo de grupos fundamentales $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, para $x_0 \in A$, inducido por $i : A \to X$ la inclusión, es inyectivo. Es decir, puede pensarse $\pi_1(A, x_0) \leq \pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Se tiene $i : A \to X$ y $r : X \to A$, con $r \circ i = Id_A$, de tal forma que $r_* \circ i_* = Id_* = Id_{\pi_1(A,x_0)}$. Por tanto no hay más remedio que i_* sea inyectiva (si no, Id_* no lo sería, pero es de hecho biyectiva). □

Observación 20. Anteriormente se comentó que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, de tal manera que $\mathbb{Z} \leq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Puede probarse asimismo que en este caso concreto el i_* es sobreyectivo y por tanto $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

Teorema 19 (Brower)**.** *Toda aplicación continua $f : \overline{B((0,0),1)} \to \overline{B((0,0),1)}$ tiene al menos un punto fijo (x,y) con $f(x,y) = (x,y)$.*

Demostración. Si no fuese así, dado (x,y) arbitrario, el (x,y) y el $f(x,y)$ forman una recta en $\overline{B((0,0),1)}$. Sea $r(x,y)$ la intersección de esta recta con $\partial\overline{B((0,0),1)}$, de tal manera que la recta quede en el orden $f(x,y) \to (x,y) \to r(x,y)$. La r así definida, si f es continua, muestra que $\partial\overline{B((0,0),1)}$ es un retracto de $\overline{B((0,0),1)}$ al quedar fija, cosa imposible porque el grupo fundamental de $\partial\overline{B((0,0),1)} = \mathbb{S}^1$ es $\mathbb{Z}$ y el de $\overline{B((0,0),1)}$ es el trivial, y no se tiene $\mathbb{Z} \leq \{0\}$. □

Definición 51. $A \subset X$ es un **retracto por deformación** de X si hay una homotopía entre id_X y $i \circ r : X \to A \to X$, siendo i la inclusión, r la retracción. Es decir, existe $H : [0,1] \times X \to X$, continua, con $H(0,x) = x$, $H(1,x) = i \circ r(x) \in A$, y $H(1,a) = r(a) = a \ \forall a \in A$.

Si además siempre se tiene $H(s,a) = a \ \forall a \in A, s \in [0,1]$, se dice que es un **retracto por deformación fuerte**.

Teorema 20. *Si $A \subset X$ es un retracto por deformación de X y $x_0 \in A$, entonces la inclusión $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Ya sabemos que es una inyección, pero además como $i \circ r$ es homótopo a Id, sigue que $i_* \circ r_* = Id_*$, de tal manera que i_* ha de ser sobreyectiva tambien. □

Definición 52. Dados dos espacios topológicos X, Y, una **equivalencia homotópica** entre ellos es un par de aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f$ es homótopa a id_X y $f \circ g$ es homótopa a id_Y.

Todo lo visto hasta ahora sobre retracciones es un caso particular de esto, donde una de las funciones es la retracción y la otra la inclusión.

4.1. Espacios recubridores

Definición 53. Dados dos espacios topológicos E, X, se dice que $p : E \to X$ es una **aplicación recubridora** (y se dice que E es un **cubrimiento** de X) si $\forall x \in X$, $\exists V$ abierto de X con $x \in X$ tal que $p^{-1}(V) = \biguplus U_i$, siendo U_i abiertos de E, donde $p|_{U_i} : U_i \to V$ es homeomorfismo.

Es decir, en torno a todo punto $x \in X$ hay un abierto V para el se tienen en E *copias homeomorfas a V disjuntas* conteniendo a las preimágenes de x (esas copias han de conformar la preimagen de V).

Por ejemplo, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ es una aplicación recubridora (la preimagen de un intervalo **pequeño** en la circunferencia es una unión disjunta de intervalos en $\mathbb{R}$).

Proposición 32 (Levantamiento de caminos)**.** *Si $p : E \to X$ es un recubrimiento, γ es un camino de X con $\gamma(0) = x_0 \in X$ y $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ es un punto de la fibra sobre x_0, entonces se tiene un único camino $\tilde{\gamma}_{e_0} : [0, 1] \to E$ tal que $\tilde{\gamma}_{e_0} = 0$ y $p \circ \tilde{\gamma}_{e_0} = \gamma$.*

Proposición 33. *Si E recubre X, todas las fibras de X por p (conjuntos $p^{-1}(x_0)$ con $x_0 \in X$) son conjuntos discretos (es decir, solo tienen puntos aislados). Si además X es conexo por caminos, todas tienen el mismo cardinal, llamado el **grado** del cubrimiento.*

Demostración. Es inmediato que $p^{-1}(x)$ es discreto, porque se toma el entorno V con $p^{-1}(V) = \biguplus U_i$. Como cada $U_i \simeq V$, entonces solo hay un único punto de $p^{-1}(x)$ en cada U_i, y al ser abiertos disjuntos sigue que todo $p^{-1}(x)$ son puntos aislados. Para la segunda proposición, dado γ que conecta $x \in X$ con $y \in X$, se define ψ_γ de $p^{-1}(x)$ en $p^{-1}(y)$ dada por $\psi_\gamma(e_0) = \gamma_{e_0}(1)$, y puede verse que es biyectiva por unicidad de levantamiento de caminos. □

Proposición 34. *Si $p : E \to X$ es un recubrimiento y E es simplemente conexo, toda $f : Y \to X$ continua desde un espacio topológico arbitrario Y, se puede levantar de manera única una vez decidido el valor de $f(y_0)$ y un $y_0 \in Y$.*

Es decir, dado $y_0 \in Y$ y $e_0 \in p^{-1}(f(x_0))$, hay una única función continua $\tilde{f} : Y \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = e_0$.

Definición 54. Un **isomorfismo** entre dos cubrimientos de X, $p_1 : E_1 \to X$ y $p_2 : E_2 \to X$, es un homeomorfismo $f : E_1 \to E_2$ tal que $p_2 \circ f = p_1$. Asimismo, un **automorfismo** del cubrimiento $p : E \to X$ es un isomorfismo entre (E, p) y (E, p). Es decir, es un homeomorfismo $f : E \to E$ con $p \circ f = p$.

Los automorfismos se denotan $Aut(E, p)$ y son un subgrupo de $Hom(E, E)$, los homeomorfismos de E en E.

Definición 55. Dado $G \leq Hom(E, E)$, se dice que **la acción de G es libre** si $g(x) \neq x \; \forall x \in E, g \neq Id$.

La acción es **propiamente discontinua** si $\forall e \in E$, hay un entorno $e \in U_e$ y una cantidad finita de transformaciones $H \subset G$ tales que $g(U_e) \cap U_e = \emptyset \; \forall g \in G \setminus H$.

Teorema 21 (Fundamental de la teoría de espacios recubridores)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

1. *$\exists \pi \tilde{X} \to X$ un cubrimiento en el que $\tilde{X}$ es simplemente conexo, y es único salvo isomorfismo de recubrimientos. Se denomina **recubrimiento universal**.*

2. *El grupo $Aut(\tilde{X}, \pi)$ de transformaciones recubridoras (automorfismos del recubrimiento) de $\tilde{X}$ es isomorfo a $\pi_1(X)$.*

3. *La acción de* $Aut(\tilde{X}, \pi)$ *en* $\tilde{X}$ *es libre y propiamente discontinua, conserva fibras* ($f(\pi^{-1}(x)) \subset \pi^{-1}(x)$, *dado* $f \in Aut(\tilde{x}, \pi)$)*, y es transitiva en las fibras (es decir, si* $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$*, hay* $f \in Aut(\tilde{x}, \pi)$ *con* $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$*). En particular,* $\tilde{X}/Aut(\tilde{X}, \pi) \to X$ *dado por* $[\tilde{x}] \to \pi(\tilde{x})$ *es homeomorfismo.*