

Variable Compleja I

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Mayo de 2021

$$\int_{\gamma} f dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f; z_j) \cdot \text{Índ}_{\gamma}(z_j)$$

Revisado en 2022

Apuntes de la asignatura impartida por María Victoria Melián
en la Universidad Autónoma de Madrid en Mayo de 2021.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Variable Compleja I del grado en matemáticas, tomados en Mayo de 2021 por Miguel González. La asignatura fue impartida por María Victoria Melián. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Variable Compleja I

Esta asignatura se centra en el análisis de funciones complejas de una variable. Si bien tales funciones pueden simplemente interpretarse como aplicaciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , si uno además considera la estructura compleja requiriendo que las derivadas se correspondan con números complejos (es decir, que la diferencial consista en una rotación y una homotecia), se obtiene una clase especial de funciones, conocidas como *holomorfas*, que gozan de multitud de propiedades deseables. El estudio de tales funciones es el objetivo de esta asignatura.

Requisitos previos

1. Conocimientos de topología.
2. Conocimientos de análisis real.
3. Conocimientos de álgebra lineal.

Índice

1. Introducción a los números complejos	3
1.1. Geometría en el plano complejo	4
1.2. Límites y continuidad	5
2. Funciones Holomorfas	6
2.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	6
2.2. Teorema de la función inversa	8
2.3. Series complejas	9
2.4. Convergencia puntual y uniforme	10
2.5. Series de potencias	10
3. Integración compleja	16
3.1. Teorema de Cauchy	17
4. Series de Laurent y Residuos	25
5. Aplicaciones conformes	29
5.1. Transformaciones de Möbius	29

1. Introducción a los números complejos

El conjunto \mathbb{C} es el conjunto de pares ordenados $(a, b) \subset \mathbb{R}^2$, con las operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Tenemos que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo. Es fácil comprobar que $(0, 0)$ y $(1, 0)$ son los neutros de cada operación, $(-a, -b)$ es el inverso de la suma de (a, b) y $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ es el inverso del producto. A los elementos los solemos denotar $a + bi$, donde interpretamos i como el $(0, 1)$, que es aquel que verifica $i^2 = -1$, motivación inicial para definir los complejos.

Es fácil ver que $a \mapsto (a, 0)$ es un homomorfismo de cuerpos inyectivo, y por tanto interpretamos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ como un subcuerpo. Al (a, b) lo denotamos por $a + bi$, y se tiene que si $z = a + bi$, denominamos $\Re(z) = a$ su **parte real**, y también $\Im(z) = b$ su **parte imaginaria**.

Definimos el **conjugado** de $z = a + bi$ por $\bar{z} = a - bi$, y su **módulo** por $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Algunas propiedades conocidas y fáciles de verificar:

1. $\|z\|^2 = z\bar{z}$.
2. Si $z \neq 0$, se tiene $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$.
3. $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
4. $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
5. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
6. $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$
7. $\|z\| = \|\bar{z}\|$
8. $\|zw\| = \|z\| \|w\|$
9. $\|\frac{1}{z}\| = \frac{1}{\|z\|}$
10. $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$

Para demostrar la última, podemos considerar $\|z + w\|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\Re(z\bar{w})$. Ya solo queda ver que $\Re(z\bar{w}) \leq \|z\| \|w\|$, lo cual es evidente porque $\Re(z\bar{w}) \leq \|z\bar{w}\| = \|z\| \|w\|$.

De esa última desigualdad triangular, sigue como es habitual la triangular inversa: $|\|z\| - \|w\|| \leq \|z - w\|$.

Proposición 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Dados complejos $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$, se tiene que:*

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j w_j \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \|z_j\|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \|w_j\|^2 \right)$$

Demostración. Dado un $\lambda \in \mathbb{C}$, basta ver que si $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene $0 \leq \|z - \lambda \bar{w}\|^2 = \|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}zw) + \|\lambda\|^2 \|w\|^2$. Si aplicamos esto término a término y sumamos, se tiene $0 \leq \sum_j \|z_j\|^2 + \|\lambda\|^2 \sum_j \|w_j\|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \sum_j z_j w_j)$. Ahora, entonces, buscamos minimizar esta expresión en λ para obtener la cota más ajustada posible. Es decir, queremos minimizar $g(\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2(\lambda_1 b + \lambda_2 c)$, donde $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si calculamos el gradiente, vemos que el mínimo se alcanza en $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$, si $a \neq 0$. Recordemos que $a = \sum_j \|w_j\|^2$, $b = \operatorname{Re}(\sum_j z_j w_j)$, $c = \operatorname{Im}(\sum_j z_j w_j)$. Si $a = 0$ la desigualdad se cumple inmediatamente. Si no, introducimos en la desigualdad en λ el mínimo obtenido, y despejando sigue el resultado tras simplificar. \square

Observación 1 (Coordenadas polares). Otra forma de representar al complejo $z = a + bi$ es mediante su módulo $r = \|z\|$ y su argumento (el ángulo que forma con el eje horizontal), $= \theta \in \operatorname{arg}(z)$, lo que se conoce como **coordenadas polares**. Obsérvese que el argumento no es único, es de hecho un *conjunto de valores* separados por intervalos de 2π . Denominaremos al **argumento principal** de z como el ángulo en $(-\pi, \pi]$. En ese caso $z = re^{i\theta}$ gracias a la fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Esta fórmula se obtiene de que:

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \quad (1)$$

y además

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

Como, finalmente:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{i\theta}{1} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \dots \quad (3)$$

que resulta de combinar $\cos \theta$ y $i \sin \theta$, se tiene la igualdad. Posteriormente justificaremos estos desarrollos como series de potencias.

Esto nos da también las expresiones $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, y $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

Con esta representación se ve una interpretación geométrica de la multiplicación de complejos: si tenemos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, y en general para n complejos. Con lo cual, el módulo del producto es el producto de los módulos, y por otra parte los argumentos se suman.

1.1. Geometría en el plano complejo

En esta sección vamos a comentar distintos lugares geométricos en el plano complejo.

Observación 2 (Recta). La ecuación $z = z_0 + w_0 t$, con $w_0, z_0 \in \mathbb{C}$, se trata de una **recta** en el plano complejo. Esta será paralela a otra $z = z_1 + w_1 t$ si $w_0 = \lambda w_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que el escalar ha de ser real, dado que un escalar con parte imaginaria no nula realizaría asimismo una rotación del vector.

Otra posible ecuación de una recta con $z_0 = a + bi$, $w_0 = c + di$, es $\operatorname{Re}(z_0 z + w_0) = 0$, puesto que la expresión izquierda corresponde a $ax - by + c = 0$, si $z = x + yi$.

Observación 3 (Semirrecta). Una posible semirrecta radial es $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ un ángulo. No incluye al origen puesto que el origen no tiene definido argumento.

Observación 4 (Circunferencia, disco). Una circunferencia centrada en el origen y de radio r viene dada por la ecuación $\|z\| = r$. El disco abierto del mismo radio es, lógicamente, $\|z\| < r$. El de radio uno se suele denotar \mathbb{D} . El disco cerrado dado por $\|z\| \leq r$, si es unitario, lo podemos denotar $\overline{\mathbb{D}}$. En general también se tiene la notación usual $B(c, r)$ para un disco abierto de centro c y radio r .

Observación 5 (Semiplano). El **semiplano superior**, \mathbb{H} , viene dado por $\text{Im}(z) > 0$.

Definición 1 (Plano complejo extendido). Se define el **plano complejo extendido** como el plano complejo al que se le añade un punto, que podemos denotar como ∞ , de tal modo que: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Podemos modelar el plano complejo extendido con la proyección estereográfica de la esfera:

Observación 6 (La esfera de Riemann). Consideramos $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Definimos la proyección estereográfica $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S$, dada por $p(\infty) = (0, 0, 1) := N$, y, para los $z \in \mathbb{C}$, se tiene $p(z)$ es el único punto en $Nz \cap S$, donde Nz es la recta que une N con z , si consideramos z habitando en el plano complejo que se sitúa en \mathbb{R}^3 a altura $x_3 = 0$. Es biyectiva, y verifica que $p(\mathbb{D})$ es el hemisferio sur, $p(\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$ es el hemisferio norte, y $p(\mathbb{S}^1)$ es el ecuador. Otra propiedad notable es que las rectas del plano complejo se transforman en circunferencias sobre la esfera, que pasan por N . A la inversa, sucede lo mismo: las circunferencias de la esfera que pasan por N , acaban en rectas, y si no pasan por N acaban en circunferencias. Es decir, si aceptamos que las rectas son circunferencias que pasan por el nuevo punto ∞ , entonces la proyección estereográfica identifica circunferencias con circunferencias.

Vamos a calcular $p(z)$ de forma explícita. Consideramos $z = x + iy$ que sabemos se identifica en \mathbb{R}^3 con el $(x, y, 0)$. La recta que pasa por z y N está dada por $(0, 0, 1) + (\lambda x, \lambda y, -\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Su intersección con S corresponde a los λ tales que:

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \quad (4)$$

Resolviendo se obtiene: $\lambda^2(x^2 + y^2) + \lambda^2 = 2\lambda$, o lo que es lo mismo $\lambda^2(\|z\|^2 + 1) = 2\lambda$, es decir que o bien $\lambda = 0$, que es el polo norte (que no nos interesa), o bien $\lambda = \frac{2}{1 + \|z\|^2}$. De tal modo que

$$p(z) = \left(\frac{2x}{1 + \|z\|^2}, \frac{2y}{1 + \|z\|^2}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2\text{Re}(z)}{1 + \|z\|^2}, \frac{2\text{Im}(z)}{1 + \|z\|^2}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \right).$$

Con esta expresión puede verificarse que la inversa viene dada por $p^{-1}((x_1, x_2, x_3)) = \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}$.

Definición 2 (Distancia cordal). Definimos la **distancia cordal** \hat{d} sobre $\hat{\mathbb{C}}$, dada por $\hat{d}(z, w) = \|p(z) - p(w)\|$, siendo la norma en \mathbb{R}^3 . Es decir, es la distancia usual entre los puntos de la esfera dados por la proyección estereográfica.

Tras una larga simplificación una vez sustituida la fórmula de la proyección estereográfica, se sigue que $\hat{d}(z, w) = \frac{2\|z - w\|}{\sqrt{(1 + \|z\|^2)(1 + \|w\|^2)}}$.

1.2. Límites y continuidad

En \mathbb{C} vamos a considerar la distancia $d(z, w) = \|z - w\|$.

Definición 3. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, se define la **bola abierta de centro z_0 y radio r** por $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\}$.

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **abierto** si para todo $z_0 \in \Omega$, $\exists r > 0$ con $B(z_0, r) \subset \Omega$, y es cerrado si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es abierto.

Definición 4. Un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conexo si no existen abiertos A, B , con $A \cap B \cap \Omega \neq \emptyset$, $\Omega \not\subset A, B$ y $\Omega \subset A \cup B$.

Un **dominio** es un abierto conexo.

Definición 5. Dado $E \subset \mathbb{C}$, el $z_0 \in \mathbb{C}$ es **punto de acumulación** o **punto límite** si $\forall r > 0$ se tiene que $E \cap (B(z_0, r) \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$.

Definición 6. El conjunto $E \subset \mathbb{C}$ está acotado si $E \subset B(0, R)$ para cierto $R > 0$, es decir, si $\|e\| < R$ $\forall e \in E$.

Definición 7. Una sucesión $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ **converge a** $w \in \mathbb{C}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ con $\|z_n - w\| < \epsilon \forall n \geq N$. Se denota $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$.

Proposición 2. Si $z_n = x_n + iy_n$ y $w = u + iv$, se tiene entonces que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ y $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = v$.

Demostración. Basta con observar que $\max\{\|x_n - u\|, \|y_n - v\|\} \leq \|z_n - w\| \leq \|x_n - u\| + \|y_n - v\|$, donde la segunda desigualdad es la triangular aplicada a $(x_n - u) + i(y_n - v)$. Con estas dos cotas sigue la equivalencia fácilmente. \square

Asimismo, la sucesión $\{z_n\}_n$ es de Cauchy si y solo si las x_n y y_n lo son, haciendo que \mathbb{C} sea completo.

Definición 8. Sea Ω un dominio en \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que el **límite de f cuando z tiende a z_0** es w , cosa que se denota $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, cuando $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < \|z - z_0\| < \delta \implies \|f(z) - w\| < \epsilon$.

Esta definición puede extenderse a un punto límite z_0 de un conjunto arbitrario.

Proposición 3. Se tiene que $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(w)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(w)$.

Asimismo, se tienen las propiedades habituales de suma, producto, cociente de límites.

Esto es así porque al fin y al cabo son límites en \mathbb{R}^2 cuyas propiedades conocemos.

Definición 9. Se dice que f es **continua** en z_0 si $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definición 10. Sea Ω un dominio en \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Se dice que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < \|z - z_0\| < \delta \implies \|f(z)\| \geq M$.
2. Se dice que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w$ si $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ tal que $\|z\| > M \implies \|f(z) - w\| < \epsilon$.
3. Se dice que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si $\forall M > 0, \exists N > 0$ tal que $\|z\| > N \implies \|f(z)\| > M$.

Definición 11. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es **derivable compleja** en z_0 si $\exists f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Si f es derivable en todo un entorno de z_0 , entonces se dice que es **holomorfa** en z_0 .

Si f es derivable en todo punto de Ω , se dice que es **holomorfa** en Ω .

Si f es holomorfa en \mathbb{C} , se denomina **entera**.

Observación 7. Al igual que en \mathbb{R}^2 , se demuestran:

1. Si f es derivable en z_0 , entonces es continua.
2. Se cumplen las fórmulas habituales de derivada de suma, producto y cociente.
3. Se cumple la regla de la cadena.

2. Funciones Holomorfas

2.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Consideramos la función compleja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Esta función da lugar a:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) \quad (5)$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) \quad (6)$$

Que son las funciones de parte real y parte imaginaria, vistas en \mathbb{R}^2 . Si f es derivable, sabemos que $\exists f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ y por lo tanto, en particular si fijamos $h = h_1 + 0 * i$, es decir, simplemente nos acercamos al origen por el eje real, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h_1) - f(x_0 + iy_0)}{h_1} = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) + iv(x_0 + h_1, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Nótese la notación del final, la *derivada de f con respecto a la parte real* del argumento. Pero esto mismo puede repetirse fijando $h = ih_2$, es decir, acercándonos por el eje imaginario, y sigue tras los mismos cálculos que:

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Donde el coeficiente de $\frac{1}{i}$ viene de tener ih_2 en el denominador, en lugar de h_1 como antes. E igualmente aparece la *derivada de f con respecto a la parte imaginaria* del argumento. Es decir:

Proposición 4. Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en el $z_0 = x_0 + iy_0$, y denotamos $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$, $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$ se cumplen las **ecuaciones de Cauchy Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (8)$$

Demostración. Sigue de igualar las partes real e imaginaria de las dos expresiones de $f'(z_0)$ obtenidas anteriormente. \square

Se tiene un recíproco:

Proposición 5. Si las funciones $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0) , y verifican:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (10)$$

Entonces la función compleja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$.

Demostración. Como son diferenciables, sabemos (por definición) que:

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + o(\|(h_1, h_2)\|) \quad (11)$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + o(\|(h_1, h_2)\|) \quad (12)$$

cuando $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$. Entonces, si sumamos la primera ecuación con la segunda multiplicada por i :

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h_1 + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \right) + o(\|(h_1, h_2)\|) \end{aligned} \quad (13)$$

Si ahora cambiamos las parciales respecto de y por sus equivalentes respecto de x , según las ecuaciones de Cauchy-Riemann, sigue:

$$f(z_0 + (h_1 + ih_2)) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (h_1 + ih_2) + o(\|(h_1, h_2)\|) \quad (14)$$

Y entonces basta con pasar dividiendo el $h_1 + ih_2$ al otro lado y tomar el límite cuando $h \rightarrow 0$, de tal modo que: $\exists f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$. \square

Observación 8. Si $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, y además son de clase \mathcal{C}^2 , tomando la derivada de orden superior: $u_{xx} = v_{xy}$ y $u_{yy} = -v_{xy}$. Luego $u_{xx} = -u_{yy}$ y del mismo modo $v_{xx} = -v_{yy}$.

Definición 12. Se define el **Laplaciano** de una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que sea de clase \mathcal{C}^2 como $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)$.

Si $\Delta u(x, y) = 0$, se dice que u es **armónica**.

Por tanto, según la observación previa, si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (por ejemplo si f es diferenciable), entonces u y v son armónicas (siempre que además sean \mathcal{C}^2). Veremos posteriormente que si f es holomorfa, entonces su derivada también, es decir, será \mathcal{C}^∞ y por tanto u y v tendrán todas las parciales de cualquier orden continuas y por tanto serán armónicas. Hay un recíproco también, que indica que dada una función a armónica en un simplemente conexo, existe una función holomorfa cuya parte real es a . Es decir, se tiene una fuerte conexión entre funciones holomorfas y armónicas: las armónicas son las partes real e imaginaria de las holomorfas.

Observación 9. Una definición alternativa de *simplemente conexo* que puede usarse en \mathbb{C} y equivale a la usual es que Ω es simplemente conexo si y solo si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo.

Definición 13. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se define $\partial f = \partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$, donde ∂_x y ∂_y son las derivadas respecto de la parte real e imaginaria del argumento, como se explicó previamente.

Asimismo se define $\bar{\partial} f = \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$.

La motivación de esta definición es que si $z = x + iy$, se tiene que $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, y si formalmente hallamos las derivadas *respecto a z y \bar{z}* se deducen las expresiones superiores. Esta definición viene para esta proposición:

Proposición 6. La función f es holomorfa $\iff \partial_{\bar{z}} f = 0$.

Demostración. Eso equivale a que $\partial_x f + i\partial_y f = 0$, o sea, $\partial_x f = \frac{1}{i}\partial_y f$, que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \square

2.2. Teorema de la función inversa

Tenemos la función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable en z_0 . Si consideramos su equivalente en \mathbb{R}^2 , la función $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, se obtiene:

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & -v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & u_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Donde en el segundo paso se usa Cauchy-Riemann sabiendo que f es derivable compleja. Pero entonces, $\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) = u_x^2(x_0, y_0) + v_x^2(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2$. Esta relación entre el jacobiano de la función en \mathbb{R}^2 con el módulo de la derivada compleja nos permitirá enunciar sencillamente el teorema de la función inversa.

Teorema 1 (Función inversa). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $f'(z_0) \neq 0$, existe un entorno $U_{z_0} \subset \Omega$ tal que $f|_{U_{z_0}}$ es una biyección en su imagen, y su inversa local $f|_{U_{z_0}}^{-1} : f(U_{z_0}) \rightarrow U_{z_0}$ es holomorfa y satisface $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ si $z \in U_{z_0}$.*

Demostración. El teorema de la función inversa, con la observación realizada previo al teorema, nos da la biyección en un entorno, así que solo hay que ver que es holomorfa. Sabemos que la diferencial de la inversa f^{-1} en el entorno es (usamos la misma notación que en la observación previa):

$$Df^{-1}(f(x, y)) = Df(x, y)^{-1} = \frac{1}{u_x^2 + v_x^2} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}$$

es decir, si denotamos que la inversa es $g(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) + ik(\alpha, \beta)$, entonces, de esa matriz diferencial vemos que la primera y cuarta entrada coinciden: $h_\alpha = k_\beta$, y la segunda y la tercera coinciden cambiado el signo: $h_\beta = -k_\alpha$, luego la inversa es holomorfa. Además $g'(f(z)) = h_\alpha(f(z)) + ik_\alpha(f(z)) = \frac{1}{|f'(z)|^2}(u_x(x, y) - iv_x(x, y))$, de acuerdo a la matriz obtenida, pero eso es precisamente $g'(f(z)) = \frac{\overline{f'(z)}}{|f'(z)|^2} = \frac{1}{f'(z)}$. \square

Proposición 7. *Sea f holomorfa en Ω un dominio. Entonces:*

1. Si $f' \equiv 0$ en Ω , f es constante en Ω .
2. Si $Re(f)$ es constante en Ω , entonces f también.
3. Si $Im(f)$ es constante en Ω , entonces f también.
4. Si $|f|$ es constante en Ω , entonces f también.

Demostración. Para 1, si $f' = 0$, entonces $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$ luego $u_x(x, y) = v_x(x, y) = 0$ en todo Ω , pero entonces por Cauchy-Riemann, asimismo $u_y = v_y = 0$ en todo punto. Por tanto, u y v son constantes (al ser Ω conexo) y entonces f también. Para 2, si u es constante, $u_x = 0$ y $u_y = 0$, pero entonces $-v_x = 0$ por Cauchy Riemann, de donde $f' = 0$ y se aplica lo anterior. Análogo para 3. Para 4, tendríamos que $u^2 + v^2$ es constante, y derivando sigue que $2uu_x + 2vv_x = 0$ y $2uu_y + 2vv_y = 0$. Usando Cauchy-Riemann en la segunda ecuación: $-2uv_x + 2vu_x = 0$, o lo que es lo mismo $(u, v) \perp (-v_x, u_x)$. De la primera ecuación sigue que $(u, v) \perp (u_x, v_x)$. Si $(u_x, v_x) = (0, 0)$ hemos acabado por el caso 1. Si los dos vectores a los que (u, v) son ortogonales serían linealmente independientes, de donde se deduce que $(u, v) = (0, 0)$ o si no tendríamos tres vectores linealmente independientes en el plano. \square

2.3. Series complejas

Definición 14. Si no existe el límite de una sucesión $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$, se dice que z_n **diverge a ∞** y se denota $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

Definición 15. Dada la sucesión $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$, consideramos $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$. Se dice que la **serie de término z_n converge a $w \in \mathbb{C}$** si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = w$, y se denota $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = w$.

Proposición 8. *Si $\exists \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.*

Demostración. Es análoga a la realizada en \mathbb{R} , puesto que \mathbb{C} es también un espacio completo. Así, la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y en particular $|S_{n+1} - S_n| \rightarrow 0$, pero ese valor es precisamente z_n .

Definición 16. Se dice que $\sum z_k$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum |z_k|$ es convergente.

Proposición 9. Si $\sum z_k$ es absolutamente convergente, entonces es convergente y $|\sum z_k| \leq \sum |z_k|$.

Demostración. Sean s_n y \tilde{s}_n las sumas parciales de las sucesiones z_k y $|z_k|$. Entonces, para $m > n$, $|s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^m z_k| \leq \sum_{k=n+1}^m |z_k| = |\tilde{s}_m - \tilde{s}_n|$, luego si $\sum |z_k|$ converge, \tilde{s}_n es Cauchy y por tanto también lo es s_n . \square

2.4. Convergencia puntual y uniforme

Definición 17. Sea $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Se dice que **converge puntualmente** a la función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \forall z \in A$.

Definición 18. Sea $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Se dice que **converge uniformemente** a la función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n \geq N, z \in A$. Equivalentemente, converge uniformemente si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$.

Proposición 10 (Criterio M de Weierstrass). Sean $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $|f_n(z)| \leq M_n \forall z \in A$. Si se tiene que $\sum M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente $\forall z \in A$.

Demostración. Sea $\hat{g}_n(z) = \sum_{k=1}^n |f_k(z)|$ y $s_n = \sum_{k=1}^n M_k$. Entonces, $|\hat{g}_n(z) - \hat{g}_m(z)| = \sum_{k=n+1}^m |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k = |s_m - s_n|$. Como $\{s_n\}$ es de Cauchy, se tiene que $\hat{g}_n(z)$ también, y por tanto la serie converge absolutamente $\forall z \in A$. Sea por tanto $s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, y sea $g_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$. Vamos a ver ahora que $g_n \rightarrow s$ uniformemente. Se tiene que $|g_n(z) - g_{n+l}(z)| = |\sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} M_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k := \epsilon_n$. Obsérvese que no depende de l , así que tomando el límite cuando $l \rightarrow \infty$, se tiene que $|g_n(z) - s(z)| < \epsilon_n$, y por tanto $\sup_{z \in A} |g_n(z) - s(z)| < \epsilon_n$, y $\epsilon_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. \square

2.5. Series de potencias

Definición 19. Una **serie de potencias** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n \in \mathbb{C}$.

Con ello se busca *generalizar* los polinomios en \mathbb{C} que son funciones enteras (holomorfas en \mathbb{C}).

Un ejemplo es la serie geométrica, $\sum z^n$, en donde todos los $a_n = 1$ y $z_0 = 0$. Esta serie converge a $\frac{1}{1-z}$ al igual que en el caso real (puede probarse fácilmente con la definición de límite de las sumas parciales), siempre que $|z| < 1$. La convergencia es absoluta, y además en un compacto $K \subset \mathbb{D}$ la serie converge uniformemente, al tenerse que los $|z| < r < 1$ para r fijo. Para una serie general de potencias, podemos encontrar el radio de convergencia comparando con la geométrica:

Proposición 11. Consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y pongamos $\exists \xi \in \mathbb{C}$ y $M > 0$ real, tales que $|a_n| |\xi|^n \leq M, \forall n$.

Entonces, la serie converge absoluta y uniformemente en $\bar{B}(z_0, \rho) = \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$, para todo $\rho < |\xi|$.

Demostración. Se tiene en ese disco cerrado que: $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|\rho^n < \frac{M}{|\xi|^n}\rho^n := M_n$. Se tiene que $\sum M_n$ es una serie geométrica de término $\frac{\rho}{|\xi|}$, que por elección de ρ , tiene módulo menor que 1, así que converge y se tiene el criterio de Weierstrass. \square

Obsérvese entonces que si todo $\alpha > 0$ verifica que $\sup_n(|a_n|\alpha^n) < \infty$, eso quiere decir que todo ξ vale en la prueba previa, luego se tiene la convergencia en todo \mathbb{C} . Si, por el contrario, algún $\alpha > 0$ verifica $\sup_n(|a_n|\alpha^n) = \infty$, ya no se puede aplicar el criterio anterior.

Definición 20. Se define el **radio de convergencia** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ como $R = \inf\{\alpha > 0 : \sup_n(|a_n|\alpha^n) = \infty\}$.

Si $R < \infty$ se define el **círculo de convergencia** por $\partial B(z_0, R)$. La serie converge en la región interior que delimita el círculo (por la proposición previa) y diverge fuera (porque si $|z - z_0| = r > R$, entonces $\sup_n |a_n|(z - z_0)^n = \infty$, de donde no puede tender a 0). En el círculo, depende de la serie.

Obsérvese que el radio puede ser 0 (no converge) o bien ∞ (converge siempre).

Teorema 2. Sea R el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Entonces:

1. $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$, lo que se conoce como fórmula de Cauchy-Hadamard
2. Si $a_n \neq 0 \forall n$, y $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ o es ∞ , entonces $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$,
3. La serie converge uniformemente en $\overline{B}(z_0, r)$ para todo $r < R$, y absolutamente en $B(z_0, R)$.

Demostración. Para 1, recordemos que $R = \inf\{\alpha > 0 : \sup_n(|a_n|\alpha^n) = \infty\}$. Si $0 < R < \infty$, entonces, dado $0 < r < R$, sabemos que $\sup |a_n|r^n < \infty$, y por tanto $\exists M > 0$ tal que $|a_n|r^n < M$ para todo n . Entonces, $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{M}{r}$. Tomando el límite superior, que siempre existe: $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{r}$ y tomando supremos: $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R}$. Supongamos que esta desigualdad fuese estricta. Entonces se tiene $r > 0$ con $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$, y $N > 0$, tal que $\sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{r} < \frac{1}{R}$ si $n \geq N$, y en particular $|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{r}$ si $k \geq N$, luego $|a_k|r^k < L$ para cierta cota L , de donde se sigue que $\sup |a_n|r^n < L < \infty$, y sin embargo $r > R$ contradiciendo la definición de radio de convergencia.

Para 2, sea $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Veamos que la serie converge absolutamente en $B(z_0, r)$ si $r < \beta$ (de donde $\beta \leq R$). Como $r < \beta$, hay un $N > 0$ con $r < \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$ si $n \geq N$. Entonces, $|a_n|r^n < \frac{|a_{n-1}}{r}r^n = |a_{n-1}|r^{n-1} < \dots < |a_N|r^N$, es decir, toda esa cola de la sucesión está acotada por $|a_N|r^N := K$. Entonces, $\sum |a_n(z - z_0)^n| = \sum |a_n|r^n \frac{|z - z_0|^n}{r^n} < \tilde{K} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n$, y esta serie geométrica converge si $|z - z_0| < r$, como se quería. \tilde{K} es la constante que acota $|a_n|r^n$.

Ahora veremos que la serie diverge si $|z - z_0| > r$, para $r > \beta$, de donde finalmente seguirá que $\beta = R$. Como $r > \beta$, entonces se tiene ahora que $\exists N > 0$ con $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < r$ si $n > N$, y desarrollando como antes se alcanza la cota $|a_n r^n| \geq K' > 0$. Entonces, $|a_n(z - z_0)^n| \geq K' \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \rightarrow \infty$, si $|z - z_0| > r$, con lo que la serie diverge ahí.

Para 3, sigue de la proposición previa. \square

Definición 21. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con Ω un dominio. Si $\forall z_0 \in \Omega$ se tiene que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en $B(z_0, r)$ para cierto $r > 0$ y $a_n \in \mathbb{C}$, entonces se dice que f es **analítica**.

Proposición 12. Si $\sum a_n z^n$ tien radio R_1 de convergencia, y $\sum b_n z^n$ tiene radio R_2 , se tiene:

1. El radio de $\sum (a_n + b_n)z^n$ verifica $R \geq \min(R_1, R_2)$.
2. El radio de $\sum a_n b_n z^n$ verifica $R \geq R_1 R_2$.

3. El radio de $\sum a_n b_n z^n$, si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ o bien $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{\frac{1}{n}}$, verifica $R = R_1 R_2$.
4. El radio de $\sum \frac{a_n}{b_n} z^n$ verifica $R \leq \frac{R_1}{R_2}$.
5. El radio de $\sum \frac{a_n}{b_n} z^n$, si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ o bien $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{\frac{1}{n}}$, verifica $R = \frac{R_1}{R_2}$.

Demostración. Para 1, se tiene de que $\sum^N |(a_n + b_n)z^n| \leq \sum^N |a_n z^n| + \sum^N |b_n z^n|$, luego si estamos dentro de los dos círculos de convergencia converge. Para 2, basta con usar que $\limsup |a_n b_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \limsup |b_n|^{\frac{1}{n}}$, y la fórmula de Cauchy-Hadamard. Para 3, se usa que vale la igualdad entre esos límites superiores si uno de los dos límites existe y los términos son positivos (que lo son, al ser módulos). Las de los cocientes son análogas. \square

Proposición 13. Dadas $\sum_n a_n z^n$ y $\sum_n b_n z^n$, consideramos la serie $\sum_n c_n z^n$ con $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, que se denomina **producto de Cauchy**. Su radio verifica $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, siendo R_1, R_2 , los radios de cada serie, y donde converja, se tiene: $\sum c_n z^n = \sum a_n z^n \sum b_n z^n$.

Esta proposición sigue inmediatamente de este resultado general:

Teorema 3 (Mertens). Dadas $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$, con alguna de ellas absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_n c_n$ con $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ es convergente, y $\sum_n a_n \sum_n b_n = \sum_n c_n$.

Demostración. Sean A_n, B_n y C_n las sucesiones de sumas parciales de cada serie, y A, B, C cada serie. Suponemos sin perder generalidad que A es la serie convergente absolutamente. Se tiene $C_n = \sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_k b_{k-j} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 = a_0(B_n - B) + a_1(B_n - B) + \dots + a_n(B - 0 - B) + A_n B$. Entonces, se verifica, usando esa expresión en C_n , que $|C_n - AB| = |\sum_{k=0}^n a_{n-k}(B_k - B) + (A_n - A)B| \leq \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| |B_k - B| + |A_n - A| |B|$. Por la convergencia de $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$, sabemos que $\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $|B_m - B| < \epsilon$ y $|A_m - A| < \epsilon$. Podemos usar eso en la expresión obtenida:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| |B_k - B| + |A_n - A| |B| &\leq \sup_{0 \leq k \leq N-1} |B_k - B| \sum_{l=n-N+1}^n |a_l| + \epsilon \sum_{k=N}^n |a_{n-k}| \epsilon + \epsilon |B| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq k \leq N-1} |B_k - B| \sum_{l=n-N+1}^n |a_l| + \epsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| \epsilon + |B| \right) \end{aligned}$$

En el último paso usamos que a_n converge absolutamente para acotar por la serie. Ahora, si $n \rightarrow \infty$, la suma parcial $\sum_{l=n-N+1}^n |a_l|$ tiende a 0 dado que a_n converge absolutamente, luego sigue finalmente que $|C_n - AB| \rightarrow 0$ y entonces $C_n \rightarrow AB$, es decir, $C = AB$. \square

Lo que vamos a ver ahora es que una función analítica es holomorfa:

Observación 10. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia R , entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ también tiene el mismo radio R . Esto es porque la reescribimos en los $z \neq z_0$ como $\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$, y entonces se tiene $\limsup |n a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, dado que $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$. Por tanto, la fórmula de Cauchy-Hadamard aplicada en ambas da el mismo radio.

Este corolario puede aplicarse reiteradamente para ver que $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}$ también tiene radio R .

Proposición 14. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es holomorfa en $B(z_0, R)$, y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

Por lo tanto, si f es analítica, entonces es holomorfa en la región de convergencia, y aplicando el resultado repetidas veces según la observación previa, entonces tiene todas las derivadas.

Demostración: Sin perder generalidad supondremos $z_0 = 0$. Tenemos que $\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(z+h)^n - z^n - h n z^{n-1}] \right| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |(z+h)^n - z^n - h n z^{n-1}|$, donde usamos que podemos sumar las dos series y el radio de convergencia se mantiene (al ser los dos radios el mismo). Ahora expandimos el binomio: $(z+h)^n - z^n - h n z^{n-1} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = h^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2}$. Por lo tanto, si $|h| < \delta$, sigue que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| &\leq |h| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k z^{n-k} \delta^{k-2} \leq \\ &\leq \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \delta^k \leq \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z| + \delta)^n \end{aligned}$$

Ahora, si además ponemos $\delta < R - |z|$, entonces $|z| + \delta < R$, de tal modo que la serie de la derecha converge a cierto valor L :

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{\delta^2} L \rightarrow 0$$

Como se quería. \square

Observación 11. Aplicando reiteradamente el resultado previo a las series derivadas, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$, y evaluando en z_0 , se observa que $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, de donde se obtiene la expresión para los coeficientes, $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Proposición 15. Si f es analítica con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ en $B(z_0, R)$, y se tiene una sucesión $\{w_k\} \subset B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ con $w_k \rightarrow z_0$ y $f(w_k) = 0$, entonces sigue que $f \equiv 0$ en todo $B(z_0, R)$. Es decir: los ceros de una función analítica están aislados (salvo en la función nula).

Demostración. $a_0 = f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(w_k) = 0$ por continuidad de la función. Pero ahora podemos aplicar el mismo argumento a $\frac{f(z)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}$, para obtener que $a_1 = 0$, y así sucesivamente. \square

Observación 12. Como corolario de lo anterior, si $\sum a_n (z-z_0)^n$ y $\sum b_n (z-z_0)^n$ convergen en $B(z_0, R)$, y coinciden en una sucesión con punto límite z_0 , ha de ser que $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$, luego son la misma serie.

Teorema 4 (Abel). Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ que converge a $f(z)$ para $|z| < R$. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = A$. Entonces $f(z) \rightarrow A$ si $z \rightarrow R$ desde una región del disco de radio R en la que $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ está acotada.

Definición 22. Se define la **exponencial** como $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Está bien definida porque el radio de convergencia es $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty$. Asimismo, esta función es **entera**, es decir, holomorfa en todo \mathbb{C} , por ser analítica en todo \mathbb{C} .

Proposición 16. Se tiene que $(e^z)' = e^z$, y que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. En particular, $e^z e^{-z} = 1$ luego $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Demostración. $(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Por otra parte, si fijamos $w \in \mathbb{C}$ y definimos $g(z) = e^z e^{w-z}$, entonces $g'(z) = e^z e^{w-z} - e^z e^{w-z} = 0$, luego g es constante, y como $g(0) = e^w$, se tiene que $e^z e^{w-z} = e^w$. \square

Otra propiedad es que como los coeficientes de la serie son reales, se tiene $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

Definición 23. Se define el **seno** como $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, y el **coseno** como $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Del mismo modo que antes se verifica que son enteras, al tener radio de convergencia infinito. Se verifica fácilmente que $(\cos(z))' = -\sin(z)$ y que $(\sin(z))' = \cos(z)$.

Otra manera equivalente de definir las es que $\cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, y que $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Es equivalente porque si se escriben las series exponenciales implicadas, que pueden operarse por ser enteras, se reduce a las series anteriores. De esa definición alternativa se obtiene:

Observación 13. Para $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$.

Y asimismo, con esa definición alternativa, operando, se llega a:

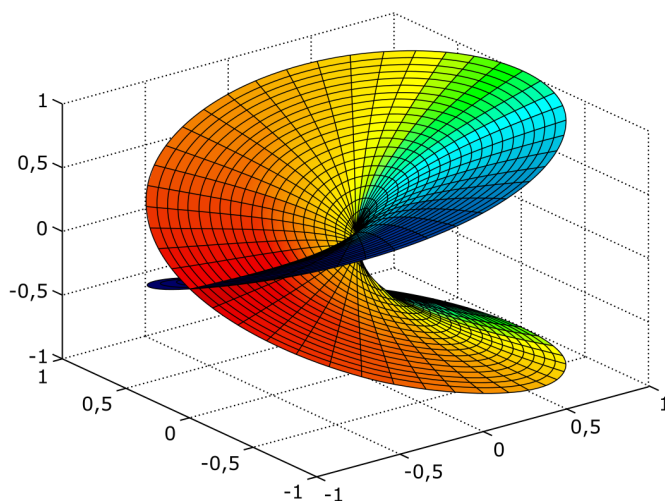
Observación 14. Se tiene para $z \in \mathbb{C}$ que $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$. Asimismo, $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$, y $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1)$.

Definición 24. Se define el **seno hiperbólico** como $\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, y el **coseno hiperbólico** como $\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observación 15 (Raíz cuadrada compleja). Tenemos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \rightarrow z^2$ y queremos tratar de construir g , una inversa continua (en el sentido de que $g \circ f = Id$). En \mathbb{R} , se tomaba $x \rightarrow \sqrt{x}$ para el dominio adecuado y era continua. Pongamos que z_1 y z_2 son aquellos cuyo cuadrado es w . Si hacemos que $g(w) = z_1$, entonces no sería continua, dado que una curva γ que vaya de z_1 a z_2 , a través de f va de w a w , y si evaluamos g en esa curva llegamos a una contradicción en la continuidad porque cerca de w por el final debería valer z_2 , pero sabemos que en w vale z_1 .

Una solución a esto es eliminar un semieje del plano complejo, en cuyo caso la función ya es continua dado que no existen tales curvas. Es decir, si $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$, entonces ponemos $g : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, donde θ se toma entre $2\pi - \alpha$ y α . Esta es **una rama de la raíz cuadrada**, cuya imagen es un semiplano complejo. La otra rama es $\tilde{g} = -g$, que cubre el otro semiplano.

Otra solución es definir la función g en una **superficie de Riemann**, que permite que cuando se *da una vuelta* por una curva cerrada que contiene al origen, que era la que daba problemas, se esté en un punto distinto del que se comenzó, y con dos vueltas ya se regrese al punto inicial, que arreglaría el problema de la continuidad (esto requiere asimismo definir f sobre la superficie de Riemann como es natural). Esta es la superficie de Riemann representada en \mathbb{R}^3 , aunque la superficie de verdad no tendría autointersecciones, simplemente se identifica el borde final de la segunda vuelta con el inicio:



Definición 25. Sea $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en un dominio tal que $\forall z \in \Omega$ se tiene $(g(z))^n = z$ para un $n \in \mathbb{N}$ fijo. Se dice que g es **una rama de $\sqrt[n]{z}$** . Obsérvese que en ese caso, las demás ramas son $g_k(z) = g(z)e^{\frac{i2\pi k}{n}}$.

En este caso, la superficie de Riemann de $\sqrt[n]{z}$ es como la de la raíz cuadrada pero con n vueltas.

Definición 26. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $(F(z))^n = f(z)$, $\forall z \in \Omega$, y $n \in \mathbb{N}$ fijo. Se dice entonces que F es **una rama de la raíz n -ésima de f** .

Definición 27. Sea Ω un dominio y $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que verifica que $e^{i\varphi(z)} = \frac{z}{\|z\|}$. Se dice que φ es **una rama del argumento de z en Ω** . Obsérvese que en ese caso, las demás ramas son $\varphi_k(z) = \varphi(z) + 2\pi k$.

Definición 28. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $e^{i\varphi(z)} = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$, $\forall z \in \Omega$. Se dice entonces que φ es **una rama del argumento de f** .

Definición 29. Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se define el **conjunto de logaritmos** de w como $\log(w) := \{z : e^z = w\}$. Obsérvese que si z_0 es un logaritmo, entonces este conjunto es $\{z_0 + 2\pi ki : k \in \mathbb{N}\}$.

Obsérvese que como $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, lo que ocurre es que las rectas verticales $x = c$ van a parar a circunferencias de radio e^c , y las recorren infinitas veces (cada vez que se desplaza 2π unidades en vertical, el punto imagen se repite). Asimismo, las rectas horizontales $y = d$ van a parar a semirrectas de ángulo d , y en este caso no se repiten los valores según se recorre la recta. Así, por ejemplo, las rectas $y = k$ para $k \in [0, 2\pi)$ recubren una y solo una vez la imagen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Se tiene, de hecho, que si $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha - 2\pi < \text{Im}(z) < \alpha\}$, entonces $e^z : D_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha = \{\mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}\}$ es un homeomorfismo. Su inversa es $g : \Omega_\alpha \rightarrow D_\alpha$ dada por $g(w) = \log|w| + i \arg_\alpha(w)$, dado que así cae en el dominio especificado, y $e^{g(w)} = |w|e^{i \arg_\alpha(w)}$.

Definición 30. Sea Ω un dominio en \mathbb{C} y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua con $e^{g(z)} = z$, $\forall z \in \Omega$. Entonces, g es **una rama de $\log z$ en Ω** .

Obsérvese que no es posible que $0 \in \Omega$, dado que entonces $e^{g(0)} = 0$.

Definición 31. La **rama principal** de $\log z$ es la definida por $\text{Log} : \Omega_\pi \rightarrow D_\pi$ dada por $\text{Log}(z) = \log|z| + i \text{Arg}(z)$.

Véase que dada g una rama de $\log z$ en Ω , es holomorfa por ser la inversa de e^z , y $(e^z)' = e^z \neq 0$, luego se tiene por el teorema de la función inversa, y $g(z)' = \frac{1}{z}$. También cabe observar que otras ramas son $g(z) + 2\pi ki$, con $k \in \mathbb{Z}$. Veamos que son todas: si $H(z)$ es una rama de $\log(z)$ en Ω , entonces $e^{H(z)} = e^{g(z)}$, de modo que $H(z) = g_0(z) + 2\pi ki$, aunque a priori el k depende de z . Si definimos $G(z) = \frac{1}{2\pi i}(H(z) - g(z))$, es continua por serlo H y g , y $G(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, pero como Ω es conexo, sigue que $G(\Omega)$ es conexo y por tanto es $G(\Omega) = \{k\}$ para un k fijo.

Definición 32. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $e^F(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$. En ese caso, se dice que F es **una rama del logaritmo de f** .

Definición 33. Sea $b \in \mathbb{C}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una rama de $\log(z)$. Se define **una rama de z^b en Ω** como $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^{bg(z)}$.

Véase que es holomorfa por ser composición de holomorfas. Asimismo, si $b \in \mathbb{Z}$, no se obtienen distintas ramas de la exponencial variando la rama del logaritmo, dado que $e^{b(g(z)+2\pi ki)} = e^{bg(z)}$.

Definición 34. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $\log(a)$ uno de sus logaritmos. Se define **la potencia z de a , a^z** , como $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^{z \log(a)}$.

La función es entera dado que la exponencial lo es. Es fácil verificar que no depende del logaritmo de a escogido. Para verificarlo basta con sustituir otro logaritmo de a y evaluar la función resultante en un natural.

3. Integración compleja

Definición 35. Sea $f(t) = u(t) + iv(t)$ una función continua definida en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, y toma valores en \mathbb{C} . Si u, v son continuas, se define la **integral** de esta función como:

$$\int_a^b f dt = \int_a^b u dt + i \int_a^b v dt$$

Es inmediato comprobar con la definición que si $c \in \mathbb{C}$, entonces $\int c f dt = c \int f dt$.

Proposición 17. Se tiene que $|\int_a^b f dt| \leq \int_a^b |f| dt$, es decir, que $\sqrt{(\int_a^b u dt)^2 + (\int_a^b v dt)^2} \leq \int_a^b \sqrt{u^2 + v^2} dt$.

Demostración. Si $\int_a^b f dt = 0$ es trivial. Si no, ponemos $\int_a^b f dt = |\int_a^b f dt| e^{i\theta}$ su representación polar. Entonces, $0 < |\int_a^b f dt| = e^{-i\theta} \int_a^b f dt = \int_a^b e^{-i\theta} f dt = \operatorname{Re}(\int_a^b e^{-i\theta} f dt)$. Coincide con su parte real porque es un número real (es el módulo de la integral). Por lo tanto, $|\int_a^b f dt| = \operatorname{Re}(\int_a^b e^{-i\theta} f dt) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$. \square

Definición 36. Una **curva** es una función continua $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que la curva es **cerrada**. Si la función es inyectiva, se dice que la curva es **simple**. Si la curva es simple y cerrada, se denomina curva de **Jordan**.

Definición 37. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **diferenciable a trozos** o **camino** si se tiene una partición del intervalo, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tal que γ' existe en todos los (t_i, t_{i+1}) , y además se extiende a una función continua en $[t_i, t_{i+1}]$ (es decir, se tiene $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma$ y $\lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} \gamma$).

Definición 38. Dado un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, se define el camino recorrido en sentido inverso $(-\gamma(t)) : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$.

Definición 39. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se define la **integral de línea de f en γ** como:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Aquí $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$, si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, siendo x, y funciones reales.

Definición 40. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se define la **integral de línea de f en γ con respecto a la longitud de arco** como:

$$\int_{\gamma} f |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

Proposición 18. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f, g : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones continuas.

1. Si $\gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función monótona \mathcal{C}^1 con $\gamma(c) = a$ y $\gamma(d) = b$ (una reparametrización que preserva la orientación), entonces se tiene que $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f dz$. Si revierte la orientación, es decir, $\gamma(c) = b$ y $\gamma(d) = a$, entonces $\int_{\gamma} f dz = -\int_{\gamma \circ \varphi} f dz$.
2. $\int_{\gamma} \alpha f + \beta g dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz$
3. Si $c \in [a, b]$ y tenemos $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$, entonces $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$

4. Se tiene $|\int_{\gamma} f dz| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq \sup\{|f(z)|\} \cdot l(\gamma)$, donde $l(\gamma)$ es la longitud de la curva, y el supremo se toma sobre la traza de la curva.
5. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $\gamma([a, b])$ que converge uniformemente a f , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} f dz$. En consecuencia, si tomamos f_n las sumas parciales de una serie que converge uniformemente, entonces $\sum \int_{\gamma} f_k dz = \int_{\gamma} \sum f_k dz$.
6. Si f está definida en un entorno de $\gamma([a, b])$, y tiene una primitiva F en ese entorno (es decir, tal que $F' = f$), entonces $\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. En particular, si γ es cerrada, $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Demostración. Para 1, $\int_{\gamma \circ \varphi} f dz = \int_a^b f(\gamma(\varphi(s))) (\gamma \circ \varphi)'(s) ds = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\gamma} f dz$. Se ha usado el cambio de variables dado por φ , que se puede aplicar por separado a la parte real y a la parte imaginaria para obtener ese resultado en la integral general. Para 2 y 3, basta con poner la definición y operar con las propiedades de la integral real. Para 4, tenemos que $|\int_{\gamma} f dz| = |\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f| |dz|$ (la otra cota es inmediata). Para 5, tenemos que $|\int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| |dz| \leq \sup |f_n - f| \cdot l(\gamma) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ por la convergencia uniforme. La 6 sigue de aplicar el teorema fundamental del cálculo a la parte real y parte imaginaria de la integral. \square

3.1. Teorema de Cauchy

Sabemos por la fórmula de Green que si γ es un camino cerrado continuo, se tiene que $\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\Omega} (Q_x - P_y) dA$, donde Ω es el interior de la región encerrada por γ . Ahora, si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio Ω que es el interior de un camino simple cerrado γ en \mathbb{C} , y f' es continua, lo que sale es:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = - \int_{\Omega} (v_x + u_y) dA + i \int_{\Omega} (u_x - v_y) dA = 0$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, esto requiere continuidad en f' , y queremos quitar esa condición.

Teorema 5 (Cauchy-Goursat). *Sea f holomorfa en un dominio Ω y R un rectángulo contenido en Ω . Entonces $\int_{\partial R} f dz = 0$.*

Demostración. Dividimos R en cuatro rectángulos congruentes R^1, R^2, R^3 y R^4 , orientando todas sus fronteras en sentido antihorario. Entonces, se tiene que $\int_{\partial R} f dz = \sum_1^4 \int_{\partial R^j} f dz$, y entonces $|\int_{\partial R} f dz| \leq \sum_1^4 |\int_{\partial R^j} f dz|$. Por lo tanto, uno de ellos, digamos R^1 , ha de satisfacer que $|\int_{\partial R^1} f dz| \geq \frac{1}{4} |\int_{\partial R} f dz|$. Ahora puede repetirse el proceso en R^1 , obteniendo así una sucesión decreciente de rectángulos $\{R_j\}_j$, que verifican:

$$\left| \int_{\partial R_n} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_{n-1}} f dz \right|,$$

así como que $\text{diam}(R_n) = \frac{1}{2} \text{diam}(R_{n-1})$, y $\text{long}(\partial R_n) = \frac{1}{2} \text{long}(\partial R_{n-1})$. Encadenando las desigualdades de las integrales, se tiene que $|\int_{\partial R} f dz| \leq 4^n |\int_{\partial R_n} f dz|$, así que ahora basta ver que el término derecho tiende a cero.

Sea ahora $z^* \in \Omega$ tal que $\bigcap R_n = \{z^*\}$ (teorema de compactos encajados cuyo diámetro tiende a 0). Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que si $|z - z^*| < \delta$ entonces $|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)| < \epsilon$, que existe por ser f holomorfa. Sea n suficientemente grande para que $R_n \subset \{z : |z - z^*| < \delta\}$. A partir de este n , se tiene que $|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \epsilon |z - z^*|$, si $z \in R_n$.

Como, además, se tiene $\int_{\partial R_n} dz = \int_{\partial R_n} z dz = 0$ (al tener 1 y z primitivas, y ser la curva simple cerrada), se tiene: $|\int_{\partial R_n} f dz| = |\int_{\partial R_n} f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*) dz| \leq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| |dz| \leq \int_{\partial R_n} \epsilon |z - z^*| |dz| \leq \epsilon \cdot \text{diam}(R_n) \int_{\partial R_n} |dz| = \epsilon \text{diam}(R_n) \text{long}(\partial R_n) = \frac{\epsilon}{4^n} \text{diam}(R) \text{long}(\partial R)$.

Por lo tanto, $|\int_{\partial R} f dz| \leq \epsilon \cdot \text{diam}(R) \text{long}(\partial R)$, y como ϵ era arbitrario, hemos acabado. \square

Teorema 6. *Sea f holomorfa en un dominio Ω , excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos, y R un rectángulo contenido en Ω tal que los puntos donde f no es holomorfa están en el interior de R . Supongamos, asimismo que $\lim_{z \rightarrow z^*} (z - z^*)f(z) = 0$ para todos los z^* donde no es holomorfa. Entonces $\int_{\partial R} f dz = 0$.*

Demostración. Vemos solo el caso de un punto problemático, digamos z_1 , y el resto sigue inductivamente. Dado $\epsilon > 0$ se divide R en 9 rectángulos de tal forma que z_1 esté en el centro de un cuadrado R_0 que cumple que $|f(z)| \leq \frac{\epsilon}{|z - z_1|}$, para todo $z \in \partial R_0$. Esto es posible porque $\lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = 0$. Por el teorema de Cauchy-Goursat, se tiene que $\int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_0} f dz$. Ahora, $|\int_{\partial R_0} f dz| \leq \int_{\partial R_0} |f| |dz| \leq \epsilon \int_{\partial R_0} \frac{1}{|z - z_1|} |dz| \leq \frac{2\epsilon}{l_0} \cdot 4l_0 = 8\epsilon$, donde l_0 es el lado del cuadrado, y hemos acabado. \square

Teorema 7. *Si f es holomorfa en $B(z_0, r)$, se tiene una F holomorfa en $B(z_0, r)$ tal que $F'(z) = f(z)$.*

Demostración. Dado z , consideramos γ_z la curva que conecta z_0 con z , primero desplazándose paralelo al eje real, y luego al eje imaginario (medio rectángulo). La curva permanece en el dominio por convexidad. Definimos:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw = \int_{x_0}^x f(t + iy_0) dt + i \int_{y_0}^y f(x + it) dt.$$

Ahora, sea Γ la frontera del rectángulo de vértices opuestos z_0 y z , orientada de manera antihoraria. También, sea $\tilde{\gamma}_z$ la curva que conecta z con z_0 , primero por el eje real y luego por el imaginario. Entonces, y usando el teorema de Cauchy-Goursat:

$$0 = \int_{\Gamma} f(w) dw = \int_{\gamma_z} f dw - \int_{\tilde{\gamma}_z} f dw$$

es decir, ambas integrales coinciden y valen $F(z)$. Por tanto:

$$F(z) = \int_{\tilde{\gamma}_z} f dw = i \int_{y_0}^y f(x_0 + it) dt + \int_{x_0}^x f(t + iy) dt.$$

Podemos derivar la primera expresión de F con respecto a y : $F_y(z) = if(x + iy) = if(z)$. Derivando la segunda expresión de F con respecto a x : $F_x(z) = f(z)$. Por tanto, $F_x(z) = -iF_y(z)$, o lo que es lo mismo, $(u_x, v_x) = (v_y, -u_y)$, luego cumple Cauchy-Riemann. Como además f es continua, entonces F_x, F_y son continuas, es decir, u y v son diferenciables. Por tanto, F es holomorfa en todo el dominio, y, por ser holomorfa, $F'(z) = F_x(z) = f(z)$. \square

Observación 16 (Corolario: Teorema de Cauchy en el disco). Si f es holomorfa en $B(z_0, r)$, entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo camino cerrado γ en el dominio.

La razón es que usamos el teorema previo para obtener F primitiva, y entonces $\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

Estos resultados se siguen cumpliendo si hay un conjunto finito de puntos z_i con $\lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i)f(z) = 0$ en los que f no es holomorfa, dado que el teorema de Cauchy-Goursat sigue verificándose bajo estas condiciones.

Observación 17. Si f es holomorfa en $B(z_0, r)$, y $z \in B(z_0, r)$, puede considerarse $F(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$. Esta es holomorfa en todo el dominio salvo z , pero en z se cumple que $\lim_{w \rightarrow z} (z-w)F(w) = \lim_{w \rightarrow z} f(z) - f(w) = 0$, luego podemos aplicar el teorema previo. Así, $0 = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw$. Es decir:

$$f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Si, por ejemplo, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ es $\gamma(t) = z + re^{it}$, con r pequeño para no salir del dominio, se cumple que:

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \pi \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

Luego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Es decir, si f es holomorfa en ese dominio, el valor en z está completamente determinado por el valor de f en una circunferencia que rodea a z . Esto se conoce como **fórmula integral de Cauchy**.

Con el fin de generalizar esta observación, definimos:

Definición 41. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{traza}(\gamma)$. Se define el **índice de z_0 con respecto a γ** como:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z_0) = \frac{\arg(\gamma(b) - z_0) - \arg(\gamma(a) - z_0)}{2\pi},$$

donde $\arg(\gamma(t) - z_0)$ es una rama del argumento de $\gamma(t) - z_0$.

Es decir, el índice es el *número de vueltas* que γ da alrededor de z_0 .

Definimos $F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} ds + c_1$, con γ , z_0 y a según la notación anterior. c_1 es tal que $e^{c_1} = \gamma(a) - z_0$.

Se tiene que F es continua en $[a, b]$ y derivable donde γ lo es, y se tiene que $F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$. Además, si definimos $\Phi(t) = (\gamma(t) - z_0)e^{-F(t)}$, se tiene que $\Phi'(t) = \gamma'(t)e^{-F(t)} - (\gamma(t) - z_0)e^{-F(t)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} = 0$. Por tanto, es constante y $\Phi(a) = (\gamma(a) - z_0)e^{-F(a)} = 1$ por la elección de c_1 : Así, entonces, $e^{F(t)} = \gamma(t) - z_0$. Es decir, esta F es una **rama del logaritmo de $\gamma - z_0$** . Como γ es cerrada, además, $F(b) - F(a) = \log|\gamma(b) - z_0| - \log|\gamma(a) - z_0| + i(\arg(\gamma(b) - z_0) - \arg(\gamma(a) - z_0)) = i(\arg(\gamma(b) - z_0) - \arg(\gamma(a) - z_0))$.

Por tanto:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z_0) = \frac{F(b) - F(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Proposición 19. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino, y $\Phi : \text{traza}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw$, en todos los z fuera de la traza. Entonces, es analítica, por tanto holomorfa, y verifica:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Demostración. Tomamos z_0 fuera de la traza, r la distancia de z_0 a la traza y $z \in B(z_0, r)$. Entonces, se tiene que $2\pi i f(z) = \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw$. Ahora, la función $g_N(w) = \frac{\Phi(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ converge uniformemente a $g(w) = \frac{\Phi(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \text{frac} \Phi(w) w - z_0 \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}$, siempre que $|w - z_0| >$

$|z - z_0|$. En particular, dado w en la traza, se tiene $|w - z_0| \geq r > |z - z_0|$ luego se tiene esa convergencia en $B(z_0, r)$. Por la convergencia uniforme, $\int_\gamma g dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma g_n dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_\gamma \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k \frac{\Phi(w)}{w-z_0} dw$. Es decir, finalmente, en ese entorno:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\Phi(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n$$

□

Teorema 8. *Sea f holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces, f es analítica en Ω , y por tanto tiene todas las derivadas y son holomorfas.*

Demostración. Sea $z \in \Omega$ y $r > 0$ pequeño para que $B(z, 2r) \subset \Omega$. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$ dada por $\gamma(t) = z + re^{it}$. Por la fórmula integral de Cauchy, se tiene que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$, y por el teorema previo, esta f es analítica. □

Proposición 20. *Sea $z_0 \in \Omega$ un abierto de \mathbb{C} . Si $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, entonces f puede extenderse a una función holomorfa en Ω . En este caso, z_0 se denomina **singularidad evitable**.*

Demostración. Sin perder generalidad se supone $z_0 = 0$, dado que si no basta considerar $g(z) = f(z + z_0)$. Sea R un rectángulo que contiene al 0 y fijamos $z \neq 0$ en su interior. Se define $F(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$, que es holomorfa en $\Omega \setminus \{0, z\}$. Además, $(w-z)F(w) = f(w) - f(z) \rightarrow 0$ si $w \rightarrow z$, y $wF(w) = w \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \rightarrow 0$ si $w \rightarrow 0$. Por tanto, el teorema de Cauchy-Goursat aplicado a F asegura que $0 = \int_{\partial R} F(w) dw = \int_{\partial R} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\partial R} \frac{1}{w-z} dw = \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z)2\pi i$, por la fórmula integral. Entonces, $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w-z} dw$, para $z \neq 0$ en el rectángulo R . Pero entonces, por la proposición 19, $\int_{\partial R} \frac{f(w)}{z-w}$ es analítica en $\Omega \setminus \partial R$, y entonces basta con poner $\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w-z} dw & z \in \text{Int}(R) \end{cases}$, que está bien definida por lo que acabamos de ver. □

Teorema 9 (Morera). *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua en el abierto Ω . Si para todo $z \in \Omega$ se tiene que $\exists r_z > 0$ con $B(z, r_z) \subset \Omega$ tal que $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ en todo rectángulo $R \subset B(z, r_z)$, se tiene que f es holomorfa en Ω .*

A continuación vamos a ver los resultados para un dominio simplemente conexo arbitrario, que es el caso más general:

Teorema 10. *Sea f holomorfa en un dominio Ω y γ un camino cerrado en Ω con $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$ en todo $w \notin \Omega$. Entonces $\int_\gamma f(z) dz = 0$, y además $\text{Ind}_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$, en todo $z \in \Omega \setminus \text{traza}(\gamma)$, y $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos Ω acotado, si no, basta con considerar $\Omega \cap B(0, R)$ con $R > 0$ como para que $\text{traza}(\gamma) \subset B(0, R)$. Dado $\delta > 0$ cubrimos el plano con una red de cuadrados cerrados de lado δ . Para $\delta > 0$ pequeño, se tiene que la colección $\{Q_j : j \in J\}$ de los cuadrados con $Q_j \subset \Omega$ es finita y no vacía. Véase que además $\text{traza}(\gamma) \subset \text{Int}(\bigcup Q_j)$. Denotamos $\bigcup Q_j = \Omega_\delta$ y sea Γ_δ su frontera. Para todo $\xi \in \Gamma_\delta$ se tiene un $w \notin \Omega$ tal que el segmento que une ξ con w no está en Ω_δ . La transformación $g(z) = \frac{z-\xi}{z-w}$ convierte el segmento que va entre ξ y w en el eje real negativo. Por tanto, si consideramos g definida sobre todo \mathbb{C} menos ese segmento, se puede tomar $F(z) = \text{Log}(g(z))$ una rama del logaritmo, que verifica $F'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{z-w}$.

Como $\text{traza}(\gamma) \subset \Omega_\gamma$ y el segmento que une ξ con w no está en Ω_γ , entonces se tiene una primitiva en un entorno de γ , así que $\text{Ind}_\gamma(\xi) - \text{Ind}_\gamma(w) = \int_\gamma \frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{z-w} dz = 0$, luego $\text{Ind}_\gamma(\xi) = \text{Ind}_\gamma(w) = 0$, porque $w \notin \Omega$.

Ahora, si $z \in \text{Int}(Q_j)$ para algún $j \in J$, la fórmula integral asegura que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(w)}{w-z} dz = \sum_{j \in J} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(w)}{w-z} dz$ dado que en el resto de cuadrados vale 0. Así: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$ para todo $z \in \text{Int}(Q_j)$ para algún j . Como ambos lados de la igualdad son continuos, se cumple para todo $z \in \Omega_\delta$, y entonces:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \right] dz = \int_{\Gamma_\delta} f(\xi) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{\xi-z} \right] d\xi = 0$$

dado que $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{\xi-z} = -\text{Ind}_\gamma(\xi) = 0$.

Para la segunda afirmación, basta con hacer lo mismo que en el caso del disco y considerar $F(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$, obteniendo la fórmula integral de Cauchy y derivándola. \square

Teorema 11. *Sea f holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo. Entonces, existe una F holomorfa en Ω con $F' = f$.*

Demostración. Fijamos $z_0 \in \Omega$ y definimos $F(z) := \int_{\gamma_{z_0 z}} f(w) dw$, donde $\gamma_{z_0 z}$ es una camino continuo de z_0 a z en Ω . La definición no depende del camino por el teorema de Cauchy. Ahora, dado $r > 0$ pequeño para que $B(z, r) \subset \Omega$, si tomamos $z' \in B(z, r)$, se tiene $F(z') - F(z) = \int_{\gamma_{z_0 z'}} f(w) dw = \int_0^1 f(z(1-t) + tz')(z-z') dt = (z-z') \int_0^1 f(z(1-t) + tz') dt$, donde hemos tomado como camino un segmento, dado que no depende del camino. Entonces, $\frac{F(z')-F(z)}{z'-z} = \int_0^1 f(z(1-t) + tz') dt \rightarrow f(z)$ si $z' \rightarrow z$, por continuidad de f . \square

Observación 18 (Corolario del teorema previo). En Ω un dominio simplemente conexo, dada $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfa, se tiene una rama holomorfa del logaritmo de f y de la raíz n -ésima de f . Para ello, basta con tomar F la primitiva de $\frac{f'}{f}$, que existe por el teorema previo. En ese caso, $(fe^{-F})' = f'e^{-F} - fe^{-F}\frac{f'}{f} = 0$, luego es constante y no nula, y por tanto $f(z)e^{-F} = e^{z_0}$ para cierto z_0 , luego $f(z) = e^{F(z)+z_0}$. Por tanto, la rama buscada es $F + z_0$. Para la raíz n -ésima, ya sabemos que basta con $e^{\frac{1}{n}(F+z_0)}$.

Teorema 12 (Continuación única). *Sean f, g holomorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si el conjunto de puntos donde $f(z) = g(z)$ tiene un punto de acumulación, y dicho punto está en Ω , entonces $f \equiv g$ en todo Ω .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad sea $g \equiv 0$ (considerando $f - g$ si fuese necesario). Sea $A = \{a \in \Omega : f^{(n)}(a) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Dado $a \in A$, se tiene un $B(a, r) \subset \Omega$ en el que, si $z \in B(a, r)$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = 0$, por como estaba definido A . Como eso se tiene en un entorno del z (que es $B(a, r)$), se verifica derivando que $f^{(n)}(z) = 0$ luego $z \in A$. Es decir, A es abierto. Por otro lado, $\Omega \setminus A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^{(n)})^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, luego es unión de abiertos y por tanto es abierto. Así, A es abierto y cerrado en Ω , y como este último es conexo, sigue que $A = \Omega$, dado que además es no vacío: dado z_0 un punto de acumulación de los ceros de f , ya vimos que todos los coeficientes a_n del desarrollo en serie de potencias de f entorno a z_0 eran nulos, luego $f^{(n)}(z_0) = 0$, para todo n . \square

De esto se deduce que si los ceros de una función holomorfa tienen un punto de acumulación, la función ha de ser idénticamente nula. Dicho de otro modo, si no es nula, los ceros son aislados. También se deducen otros resultados como que si coinciden en un intervalo de \mathbb{R} , son idénticas. Así, por ejemplo, la exponencial compleja es la única función holomorfa que extiende a la exponencial real. Otro ejemplo de este teorema es que como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en \mathbb{R} , y $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ son holomorfas, ha de ser en todo \mathbb{C} que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Teorema 13 (Liouville). *Si f es entera y acotada, entonces es constante.*

Demostración. Como f es acotada, se tiene que $|f(z)| \leq M$ para cierto $M \in \mathbb{R}$. Por la fórmula integral, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$, donde γ es la circunferencia centrada en z y de radio $r > 0$ arbitrario recorrida una vez en sentido positivo. Entonces, $|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2} |dw| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r}$. Como se verifica para r arbitrario, entonces $|f'(z)| = 0$, por lo que $f'(z) = 0$. Como z era arbitrario sigue que f es constante. \square

Teorema 14 (Liouville generalizado). *Si f es entera y $|f| \leq a|z|^\alpha$ para todo z con $|z| > b$, y $a, b, \alpha \geq 0$ fijas, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que $m = \lfloor \alpha \rfloor$.*

Demostración. Ponemos, al ser f entera y por tanto analítica, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si $R > 0$, se tiene $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$. Por tanto, si $R > b$, sigue que $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{aR^\alpha}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{a}{R^{n-\alpha}}$, luego, si $\alpha < n$, se tiene tomando límites que $a_n = 0$. Así, $f(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} a_n z^n$. \square

Como importante corolario:

Teorema 15 (Fundamental del Álgebra). *Si $p(z)$ es un polinomio en z de grado mayor o igual que 1 con coeficientes en \mathbb{C} , entonces $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

Demostración. Si no hubiese tal z_0 , entonces la función $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ es entera, porque p lo es y no se anula. Cuando $|z| \rightarrow \infty$, se tiene que $|p(z)| \rightarrow \infty$, de tal manera que $|f(z)| \rightarrow 0$ y por tanto f es acotada y por el teorema de Liouville, es constante. De aquí sigue que $p(z)$ es constante y por tanto de grado 0. \square

Teorema 16 (Principio del módulo máximo). *Sea f holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $|f|$ tiene un máximo local en Ω , entonces f es constante.*

Demostración. Sean $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in B(a, r) \subset \Omega$. Dado $r' < r$, se tiene que $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r')} \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + r'e^{it}) dt$, de tal manera que $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r'e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| dt = |f(a)|$. Por tanto, sigue que $|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r'e^{it})| dt$, es decir, que $0 = \int_0^{2\pi} [|f(a)| - |f(a + r'e^{it})|] dt$. Pero el integrando en esta última expresión es no negativo, luego ha de ser que $|f(a)| = |f(a + r'e^{it})|$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, es decir, que $|f|$ es constante en $B(a, r)$ y, por tanto, al ser holomorfa, f es constante en $B(a, r)$ (esto puede deducirse fácilmente de las ecuaciones de Cauchy-Riemann). Por continuación única, debe ser f constante en Ω . \square

Un corolario evidente es:

Proposición 21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y continua en $\bar{\Omega}$. Se tiene que $|f|$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$.*

Demostración. Como f es continua en $\bar{\Omega}$ que es compacto, $|f|$ alcanza un máximo en $\bar{\Omega}$. Si lo alcanza en Ω , por el principio del módulo máximo, f es constante luego lo alcanza en todos los puntos $\partial\Omega$ inclusive. Si no, lo alcanza en $\bar{\Omega} \setminus \Omega \subset \partial\Omega$. \square

Teorema 17 (Lema de Schwarz). *Sea f holomorfa en el disco $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, con $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ si $z \in \mathbb{D}$. Entonces, $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, vale la igualdad en alguna de las dos expresiones (y por tanto en las dos) si y solo si $f(z) = e^{i\theta} z$ para cierto θ , es decir, si y solo si es una rotación.*

Demostración. Sea $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$. Esta función es holomorfa en \mathbb{D} , porque $z \cdot \frac{f(z)}{z} \rightarrow f(0) = 0$ cuando $z \rightarrow 0$, luego g es holomorfa por el teorema de la singularidad evitable, y su valor en 0, al tener que ser continua, ha de ser $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$, como hemos establecido. Por la proposición previa,

considerada en $B(0, r)$ para $r < 1$, sigue que: $|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)|$ para todo $|z| < r < 1$, es decir, $|g(z)| \leq \frac{\max_{|w|=r} |f(w)|}{r}$. Si $r \rightarrow 1$, sigue que $|g(z)| \leq \max_{|w|=1} |f(w)| \leq 1$, por lo que $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$.

Si en alguna vale la igualdad, como $g : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$, por el principio del módulo máximo, g es constante en \mathbb{D} , así que $g(z) = c$ con módulo 1, luego $g(z) = e^{i\theta}$, así que $f(z) = ze^{i\theta}$. \square

Definición 42. Sea f holomorfa en un dominio Ω , y no idénticamente nula (por tanto, sus ceros están aislados). Se dice que z_0 es un **cerro de multiplicidad** $k \in \mathbb{N}$ si $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Nótese que si no existiera tal k , es decir, si se anulase en todas las derivadas, la serie de potencias centrada en z_0 sería nula y por continuación única f sería nula.

Proposición 22. Si f es holomorfa en Ω y z_0 es un cerro de f de multiplicidad k , entonces $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ con g holomorfa y $g(z_0) \neq 0$.

Demostración. Por ser analítica, en $B(z_0, R)$ se tiene $f(z) = \sum_j \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j$, y dicha suma puede empezar en k al anularse todas las derivadas anteriores, luego $f(z) = (z - z_0)^k \sum_{j=0} \frac{f^{(j+k)}(z_0)}{(j+k)!} (z - z_0)^j$ y la serie no se anula en z_0 (dado que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$). Si consideramos ahora la función $g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$ (dada por esa serie en $B(z_0, R)$), sabemos que es holomorfa en todo Ω (fuera de z_0 no se anula el denominador, y en $B(z_0, R)$ sabemos que es una serie luego es holomorfa). \square

Teorema 18 (Principio del argumento para funciones holomorfas). Sea f holomorfa no idénticamente nula en Ω un simplemente conexo, y sean $\{z_j\}$ los ceros de f contados tantas veces como su multiplicidad k (es decir, si un cerro es de multiplicidad k aparece k veces). Para todo camino γ cerrado en Ω cuya traza no contenga ningún cerro de f , se verifica que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_j \text{Índ}_{\gamma}(z_j)$$

es decir, pueden contarse así los ceros encerrados por la curva, teniendo en cuenta que cada cerro contribuye a la suma tantas veces como su multiplicidad y como el índice de γ en ese cerro. Implícitamente se tiene que la cantidad de ceros dentro de γ es finita.

Demostración. Sea B un simplemente conexo acotado con $\overline{B} \subset \Omega$ y traza(γ) $\subset B$. En B solo puede haber un número finito de ceros de f dado que, en caso contrario, se puede aplicar Bolzano-Weierstrass en \overline{B} , y se obtendría un cerro no aislado, luego f sería nula en B y por tanto (continuación única) en todo Ω . Sean z_1, \dots, z_n esos ceros, contados con multiplicidad. Por la proposición previa:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)g(z)$$

con g holomorfa en B y que no se anula en ningún punto. Así, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} + \frac{g'}{g}$, Por tanto:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_j} dz + \int_{\gamma} \frac{g'}{g} dz = 2\pi i \sum_j \text{Índ}_{\gamma}(z_j) + 0$$

donde la última integral se anula por el teorema de Cauchy, al no anularse g en todo el interior de la traza (no se anulaba en B). Claramente, los ceros fuera de B tienen índice 0 (es simplemente conexo) así que pueden incluirse en la suma. \square

Se tiene un corolario inmediato aplicado a $g(z) = f(z) - a$, que permite aplicar el resultado con las soluciones de $f(z) = a$ en vez de a los ceros. Otra cosa que puede hacerse es mirar a la curva imagen:

Observación 19. Si f está en las condiciones del principio del argumento, y transforma la curva cerrada γ en Γ , entonces:

$$\sum_j \text{Índ}_\gamma(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \text{Índ}_\Gamma(0)$$

y, en general, aplicando esto a los w_j en los que $f(w_j) = a$ y a la función $g(z) = f(z) - a$, se tiene que $\sum_j \text{Índ}_\gamma(w_j) = \text{Índ}_\Gamma(a)$. En particular, si a y b cumplen que $\text{Índ}_\Gamma(a) = \text{Índ}_\Gamma(b)$, para γ la circunferencia de radio R en torno al 0, entonces en $|z| < R$ **hay el mismo número de soluciones de $f(z) = a$ que de $f(z) = b$ (contadas con multiplicidad).**

Se tiene el siguiente corolario:

Proposición 23. *Sea f holomorfa no constante en $B(z_0, R)$, donde z_0 es raíz de la ecuación $f(z) - w_0$ con multiplicidad n . Entonces hay un $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$, se tiene un $\delta > 0$ tal que dado $w \in B(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene n raíces simples (es decir, de multiplicidad 1) en $B(z_0, \epsilon)$.*

Demostración. Como los ceros de una función holomorfa no nula son aislados, se tiene $\epsilon_0 > 0$ tal que $f(z) \neq w_0$ y también $f'(z) \neq 0$ en $z \in \overline{B}(z_0, \epsilon_0) \setminus \{z_0\}$. Para la segunda condición ($f'(z) \neq 0$) se usa continuidad si $f(z_0) \neq 0$, es decir, si $n = 1$, o bien los ceros aislados en f' si $n > 1$. Tomamos el radio también para que $\overline{B}(z_0, \epsilon_0) \subset B(z_0, R)$.

Sea ahora $\epsilon \leq \epsilon_0$ y γ la circunferencia $\partial B(z_0, \epsilon)$ recorrida una vez en sentido antihorario. Sea $\Gamma = f \circ \gamma$. La traza de Γ ha de ser compacta por ser f continua y la traza de γ compacta. Como $w_0 \notin \text{traza}(\Gamma)$, que es cerrado, se tiene un $\delta > 0$ con $B(w_0, \delta) \cap \text{traza}(\Gamma) = \emptyset$. Por tanto, si $w \in B(w_0, \delta)$, se tiene que $\text{Índ}_\Gamma(w) = \text{Índ}_\Gamma(w_0)$, y como además $f(z) - w \neq 0$ para todo $z \in \text{traza}(\gamma)$, se tiene de la observación previa que el número de raíces de $f(z) = w$ en $B(z_0, \epsilon)$ es n (el mismo que el de $f(z) = w_0$, que tenía n veces una única raíz: z_0). Además han de ser simples porque $f'(z) \neq 0$ en $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$. \square

Teorema 19 (Aplicación abierta). *Sea f holomorfa no constante en Ω un dominio. Dado un abierto $U \subset \Omega$, se tiene $f(U)$ es abierto.*

Demostración. Sea $w_0 \in f(U)$ y $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = w_0$. Por la proposición previa, y por ser U abierto, hay un $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subset U$ y tal que $\forall w \in B(w_0, \delta)$ hay un $z \in B(z_0, \epsilon)$ con $f(z) = w$, es decir, $B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \epsilon)) \subset f(U)$. \square

Teorema 20 (Rouché). *Sean f y g holomorfas en Ω simplemente conexo y sea γ un camino cerrado simple en Ω . Si se tiene que $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ en $z \in \text{traza}(\gamma)$, entonces f y g tienen los mismos ceros en el interior de γ , contados con multiplicidad.*

Demostración. Obsérvese en primer lugar que $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ en la traza de γ dado que no se cumpliría la desigualdad en caso contrario. Entonces, dividiendo, se tiene en la traza que $|\frac{f}{g} - 1| < |\frac{f}{g}| + 1$. Véase asimismo que $\frac{f(z)}{g(z)} \notin (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$, dado que si fuese así, y λ es ese valor, se tendría en la desigualdad que $|\lambda - 1| < |\lambda| + 1$, es decir, sabiendo que sería negativo, se tendría $1 - \lambda < 1 - \lambda$ lo cual es falso. Por tanto, $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, y por ello se tiene una rama holomorfa del logaritmo de $\frac{f}{g}$, dada por componer con el logaritmo principal, que denotaremos $\log \frac{f}{g}$. Como $(\log \frac{f}{g})' = \frac{g f' - f g'}{f^2} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$.

Por lo tanto, integrando a ambos lados y siendo una integral de una derivada en una curva cerrada, se tiene que: $0 = \int_\gamma \frac{f'}{f} - \int_\gamma \frac{g'}{g}$, luego, por el principio del argumento, tienen los mismos ceros. \square

4. Series de Laurent y Residuos

Definición 43. Una **serie de Laurent** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$, y $z \neq z_0$. Se dice que converge si y solo si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(\frac{1}{z-z_0})^m$ convergen.

La convergencia absoluta o uniforme también se define si y solo si las dos series (de índices positivos y negativos) convergen absoluta o uniformemente. El valor de la serie se obtiene sumando los dos valores.

Teorema 21. Sean $r = \limsup_m |a_{-m}|^{\frac{1}{m}}$ y $\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$, y se tiene que $0 \leq r < R \leq \infty$, entonces en el anillo A dado por $r < |z-z_0| < R$ se tiene convergencia absoluta, y uniforme en todo compacto $K \subset A$. También, diverge si $|z-z_0| > R$ o $|z-z_0| < r$.

En A , se tiene que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es holomorfa y $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$.

Esto sigue del mismo resultado que en series de potencias, aplicado en ambos términos.

Teorema 22. Si f es holomorfa en un anillo $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$, con $0 \leq r < R \leq \infty$, entonces $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para todo $z \in A$, con:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

donde la curva se orienta de manera antihoraria, se recorre una vez y $r < \rho < R$ arbitrario.

Demostración. Consideramos en adelante todas las circunferencias con orientación antihoraria. Sean r', R' con $r < r' < R' < R$. Por la fórmula integral de Cauchy, sigue que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$, donde Ω_1 es la región de los z con $r' < |z-z_0| < R$, y $\Im(z) > \Im(z_0)$, y Ω_2 es la región de los z con $r' < |z-z_0| < R$, y $\Im(z) \leq \Im(z_0)$, para los $z \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Nótese que esto es así porque una de las dos integrales vale 0 y la otra es en la región que contiene a z . Pero esta suma de integrales es lo mismo que hacerlas en la frontera del anillo, así que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Para los puntos en los que $\Im(z) = \Im(z_0)$ se puede hacer el mismo procedimiento pero dividiendo el anillo en su parte izquierda y parte derecha, es decir, atendiendo a la parte real en lugar de la imaginaria.

Como f es continua en $|z-z_0| = R'$, vimos que $A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw$ era holomorfa en todo el plano salvo en la circunferencia donde se integra, luego $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para $|z-z_0| < R$, con cada $a_n = \frac{A^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R'} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$. Del mismo modo, la segunda parte $B(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw$ es holomorfa en todo el plano salvo en la circunferencia donde se integra. Como $\frac{-1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{w-z_0}{z-z_0})^n$, para $|w-z_0| < |z-z_0|$ (que se satisface en nuestra región de interés porque $r' < |z-z_0|$), tenemos que:

$$B(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \int_{|z-z_0|=r'} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{w-z_0}{z-z_0})^n dw$$

y, por convergencia uniforme, sigue que:

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} f(w) (w-z_0)^n dw \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r'} f(w) (w-z_0)^{m-1} dw \frac{1}{(z-z_0)^m}$$

como se quería. □

Además, es fácil ver que el desarrollo es único y está determinado por f .

Definición 44. Si f es una función holomorfa en $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, pero no en $B(z_0, r)$, se dice que f tiene una **singularidad aislada en** z_0 .

Observación 20 (Tipos de singularidades aisladas). La singularidad z_0 se dice **evitable** si f está acotada cerca de z_0 , es decir, si $|f(z)| \leq M$ para cierto M y los $z \in B(z_0, r') \setminus \{z_0\}$ con $r' < r$. En ese caso, $|(z - z_0)f(z)| \leq |z - z_0|M \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_0$, y por el teorema de la singularidad evitable, extiende a una función holomorfa en z_0 .

Por otro lado, se denomina **polo** si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. En ese caso, $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene una singularidad evitable en z_0 , y extendiendo g se tiene que $g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, luego $g(z) = (z - z_0)^n h(z)$ con $n \in \mathbb{N}$ y h holomorfa cerca de z_0 con $h(z_0) \neq 0$. De esta manera, $(z - z_0)^n f(z) = \frac{1}{h(z)}$ está acotada cerca de z_0 . El menor entero $n > 0$ que verifica eso, es decir la multiplicidad de z_0 en $g = \frac{1}{f}$, se denomina **orden del polo** z_0 de f .

Finalmente, se dice que z_0 es una **singularidad esencial** si $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$.

En términos de la serie de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, la singularidad z_0 es evitable si y solo si $a_n = 0 \forall n < 0$, es un polo de orden $m > 0$ si y solo si $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$ para $n < -m$, y es una singularidad esencial si $a_n \neq 0$ para infinitos n negativos.

Observación 21 (L'Hôpital). Si f y g son holomorfas en un dominio Ω y $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, entonces si $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$, se tiene que también existe $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ y coincide con el anterior.

Definición 45. Sea z_0 una singularidad aislada de $f : B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Se define el residuo de f en z_0 como:

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

donde γ es la circunferencia de centro z_0 y radio $\epsilon < r$ arbitrario, recorrida una vez en sentido antihorario. Nótese que por el teorema de Cauchy no depende del ϵ .

Véase que en términos de la serie de Laurent se tiene $\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n = a_{-1}$, dado que todas esas integrales son de funciones con primitiva salvo la de $n = -1$, que tiene valor $2\pi i$ por la fórmula integral de Cauchy.

Proposición 24. Si f tiene un polo de orden m en z_0 , se tiene $\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} ((z - z_0)^m f(z))$.

Demostración. Consideramos $g = (z - z_0)^m f(z)$ que tiene una singularidad evitable en z_0 . Se tiene $\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} dz = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$, donde se usa la fórmula integral de Cauchy para la g (realmente para su extensión a z_0 con el límite). \square

Teorema 23 (Residuos). Sea Ω un dominio simplemente conexo y sea f holomorfa en Ω salvo en un conjunto $\{z_j\}$ de singularidades aisladas. Entonces, si γ es un camino cerrado en Ω cuya traza no pasa por ninguna singularidad, se tiene:

$$\int_{\gamma} f dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f; z_j) \cdot \text{Índ}_{\gamma}(z_j)$$

Demostración. Sea U un abierto acotado y con la traza de γ contenido en él. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Índ}_{\gamma}(z) = 0\}$. Se tiene que $X \setminus U \subset A$, por estar la curva en un simplemente conexo, y por tanto $X \setminus A \subset U$ está acotado y es compacto, y solo puede contener un número finito de singularidades aisladas dado que,

si hubiese infinitas, habría un punto de acumulación (por compacidad), lo que sería una singularidad no aislada, que hemos asumido que no hay. Por tanto, $nd_\gamma(z_j) \neq 0$ para un número finito de ellas, digamos $j \in \{1, \dots, n\}$. Elegimos $r_j > 0$ con $\overline{B}(z_j, r_j) \subset \Omega$ y $\overline{B}(z_i, r_i) \cap \overline{B}(z_j, r_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Ahora basta con aplicar el teorema de Cauchy apropiadamente para obtener el resultado final, sabiendo que los residuos se definen como las integrales en torno a esas singularidades, y el resto del camino se va a anular al no tener singularidades. \square

Teorema 24 (Principio del argumento). *Sea Ω un dominio simplemente conexo y f una función que solo tiene singularidades aisladas en Ω , siendo estas evitables o polos (en ese caso se dice que es **meromorfa**). Sean $\{z_j\}$ las raíces de f y $\{p_k\}$ sus polos, contados ambos con su multiplicidad. Entonces, dado un camino cerrado γ de Ω cuya traza no tiene ceros ni polos, se tiene:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \sum_j \text{Índ}_\gamma(z_j) - \sum_k \text{Índ}_\gamma(p_k)$$

Demostración. Consiste en aplicar el teorema de los residuos a $\frac{f'}{f}$, sabiendo que si z_0 es una raíz de orden n de f , entonces, como $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$ y holomorfa en un entorno, se tiene que $\frac{f'}{f} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'}{g}$, luego $\text{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = \frac{n}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = n$, donde γ es una circunferencia en torno de z_0 . Por otro lado, si p es un polo de orden m en f , $f(z) = \frac{1}{(z - p)^m} g(z)$ con $g(p) \neq 0$ y holomorfa en torno de p . De nuevo, $\frac{f'}{f} = \frac{-m}{z - p} + \frac{g'}{g}$, y si se integra con la circunferencia en un entorno de p , sigue como antes que $\text{Res}(\frac{f'}{f}, p) = -m$, y hemos acabado. \square

Observación 22 (Corolario: Rouché para meromorfas). Si f y g son meromorfas en Ω simplemente conexo, y γ un camino simple cerrado en Ω , y además f y g no tienen polos en la traza de γ , y allí verifican $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$, se tiene que la diferencia entre ceros y polos de f en el interior de γ es la misma que la de g , contados con multiplicidad. La demostración es la misma que la del teorema de Rouché, pero utilizando el principio del argumento.

Observación 23 (Truco de integración de senos y cosenos). Supongamos que tenemos que calcular $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$. Se tiene que esa integral es igual a $\int_{|z|=1} F\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$. En efecto, con la parametrización $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ de la circunferencia unidad, se tiene que:

$$\int_{|z|=1} F\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} F\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) (ie^{i\theta}) \frac{d\theta}{ie^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Esto tiene la ventaja de que si la función compleja resultante cumple las condiciones de alguno de los teoremas vistos, como el de los residuos, puede obtenerse fácilmente el valor de la integral.

Definición 46. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo cerrado. Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n F(x) dx$, se dice que **converge en el sentido de Cauchy** y el límite se denota por $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$.

Nótese que esto no coincide con la convergencia usual, dado que en ese caso se recorren las sucesiones por separado (es decir, tendría que converger $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m}^n F(x) dx$, y podría divergir alguno de los límites por separado). La convergencia usual implica la de Cauchy.

Proposición 25. *Sea f holomorfa en un dominio Ω salvo en un número finito de singularidades, ninguna de ellas en el eje real. Supongamos además que $\{z : \Im z \geq 0\} \subset \Omega$, es decir, que la región contiene al semiplano superior. Si $|z|^2 |f(z)|$ está acotado para los z con $\Im z \geq 0$, entonces puede calcularse (en el sentido de Cauchy) la integral: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{w \in W} \text{Res}(f; w)$, donde W son las singularidades de f en $\Im w > 0$. Además, como caso particular, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in W} \text{Res}(f e^{i\alpha z}; w)$.*

Demostración. Sabemos que si $|z| \geq R_0$ y $z \in \Omega$, entonces $|f(z)| \leq \frac{C_0}{|z|^2}$, por estar $|f(z)||z^2|$ acotado. Ahora, integramos en la región Ω_R de los z con $|z| < R$ y $\Im z > 0$, para R grande tal que no hay singularidades de f en la frontera de la región, todas las singularidades de f se contienen en la región, y se tenga la cota previamente explicada fuera de la región (es decir, $R \geq R_0$). Por el teorema de los residuos, $\int_{\partial\Omega_R} f dz = 2\pi i \sum_{w \in W} \text{Res}(f; w)$, pero por otro lado, $\int_{\partial\Omega_R} f dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma} f(z) dz$, donde γ es la semicircunferencia de radio R en sentido positivo. Se tiene que $|\int_{\gamma} f dz| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq \int_{\gamma} \frac{C_0}{R^2} |dz| = \frac{C_0 \pi}{R} \rightarrow 0$ si $R \rightarrow \infty$, luego hemos acabado. Se tiene convergencia usual por la cota del módulo de f , de tal modo que esta convergencia de Cauchy coincide con la de la integral. \square

Observación 24. En el teorema previo, para el segundo caso ($e^{i\alpha z} f(z)$), bastaría con que $|z| |f(z)|$ esté acotado, en lugar de $|z|^2 |f(z)|$, aunque en este caso no puede asumirse la convergencia usual de la integral, solamente se obtiene la de Cauchy. Esto es así porque $|f(z)e^{i\alpha z}| = |f(z)|e^{-\alpha \Im(z)} \leq \frac{C_0}{|z|} e^{-\alpha \Im(z)}$, de tal manera que la cota de la integral usada en la demostración anterior ahora es $|\int_{\gamma} f dz| \leq \int_{\gamma} \frac{C_0 e^{-\alpha \Im(z)}}{z} dz$.

Para finalizar, se usa el **lema de Jordan**, que indica que $\int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}$. La demostración es como sigue, usando la simetría del $\sin(x)$ respecto a $x = \frac{\pi}{2}$ en $[0, \pi]$: $\int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{R}$. Se ha usado que en el intervalo estudiado, por concavidad, se tiene $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$ (esta segunda expresión es la recta que une el origen con el $(\frac{\pi}{2}, 1)$).

Por tanto, puede calcularse la integral usando la parametrización de la semicircunferencia: $|\int_{\gamma} \frac{C_0 e^{-\alpha \Im(z)}}{z} dz| = |\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{-\alpha R \sin \theta} i R e^{i\theta} d\theta| \leq \int_0^{\pi} |f(Re^{i\theta})| e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta \leq C_0 \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi C_0}{\alpha R} \rightarrow 0$ si $R \rightarrow \infty$, como se quería.

Si hubiese singularidades en el eje real, puede hacerse algo parecido siempre que sean polos simples. En ese caso, los residuos del eje real *valen la mitad*:

Proposición 26. *Sea f holomorfa en un dominio Ω salvo en un número finito de singularidades, siendo polos simples aquellas que se encuentren en el eje real. Supongamos además que $\{z : \Im z \geq 0\} \subset \Omega$, es decir, que la región contiene al semiplano superior. Si $|z|^2 |f(z)|$ está acotado para los z con $\Im z \geq 0$, entonces puede calcularse (en el sentido de Cauchy) la integral: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{w \in W} \text{Res}(f; w) + 2\pi i \sum_{w \in W_1} \frac{1}{2} \text{Res}(f; w)$, donde W son las singularidades de f en $\Im w > 0$, y W_1 las singularidades de f en el eje real.*

Demostración. En este caso Ω_R no es la región de los z con $|z| < R$ y $\text{Im} z < 0$, sino que también debe saltarse los polos simples del eje real. Para eso, la curva frontera elegida describirá semicircunferencias de radio $r > 0$ pequeño en torno a los polos simples del eje real (es decir, es similar a la del caso anterior, una semicircunferencia, pero cada vez que encuentre un polo en el eje \mathbb{R} lo rodeará por encima con radio r en vez de seguir recto). El R debe cumplir lo mismo que antes, y el r debe verificar que f es holomorfa en $0 < |z| < r$, es decir, que no haya ninguna otra singularidad en las pequeñas circunferencias centradas en el eje real de radio r . Véase que la integral buscada se obtendrá haciendo $R \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$, para que se cubra todo el eje real.

El argumento, una vez elegida la región, es el mismo que anteriormente, observando que si η es la semicircunferencia de radio r en sentido horario centrada en un polo simple, se tiene, usando $f = \frac{a_{-1}}{z} + g(z)$ con g holomorfa en $|z| < r$, que $\int_{\eta} f dz = a_{-1} \int_{\eta} \frac{dz}{z} + \int_{\eta} g dz$. Por un lado, $|\int_{\eta} g dz| \leq \int_{\eta} |g| |dz| \leq C \pi r \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$. El C es el máximo de $|g|$ en el disco centrado en el polo y de radio r_0 inicial (de tal manera que la cota vale para todo $0 < r < r_0$). Por otro lado, $a_{-1} \int_{\eta} \frac{dz}{z} = a_{-1} \pi i = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{Res}(f; s)$ donde s es el polo en cuestión, como se quería. \square

5. Aplicaciones conformes

Definición 47. Sea Ω un dominio y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se dice que es **conforme** en $z_0 \in \Omega$ si preserva la *magnitud* y el *sentido* de los ángulos entre curvas en z_0 . Es decir, dadas $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ caminos con $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$ y derivada no nula en t_0 , se tiene que $\arg \frac{\gamma_2'(t_0)}{\gamma_1'(t_0)} = \arg \frac{\Gamma_2'(t_0)}{\Gamma_1'(t_0)}$, donde $\Gamma_j = f(\gamma_j)$.

Proposición 27. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces es conforme en ese punto.

Demostración. Basta con ver que $\arg \frac{\Gamma_2'(t_0)}{\Gamma_1'(t_0)} = \arg \frac{f'(z_0)\gamma_2'(t_0)}{f'(z_0)\gamma_1'(t_0)} = \arg \frac{\gamma_2'(t_0)}{\gamma_1'(t_0)}$. \square

Proposición 28. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) = 0$, entonces **no** es conforme en ese punto.

Demostración. Escribimos $g(z) = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n h(z)$ con $n \geq 2$ y $h(z_0) \neq 0$. Esto es así porque g es holomorfa en z_0 y tiene una raíz ahí, pero no puede ser simple ($n = 1$) dado que en ese caso su derivada sería no nula. Entonces, si dos curvas γ_1 y γ_2 intersecan en z_0 , su ángulo no se ve afectado por h , por la proposición previa, pero se ve multiplicado por $n \geq 2$, a causa de la potencia que aparece, así que no coincide. \square

Teorema 25 (Aplicación de Riemann). Sea Ω un dominio simplemente conexo en \mathbb{C} , distinto de \mathbb{C} . Entonces existe $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa y biyectiva. Además, dado $z_0 \in \Omega$, puede conseguirse una tal φ con $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, y es única con tales propiedades.

5.1. Transformaciones de Möbius

Definición 48. Una **transformación de Möbius** es una aplicación biyectiva $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, dada por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Es fácil ver que es biyectiva dado que su inversa es $f^{-1}(z) = \frac{zd-b}{a-zc}$, suponiendo que $ad - bc \neq 0$. Asimismo puede pensarse como una función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, donde ponemos, si $c \neq 0$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$ y $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, y si $c = 0$ simplemente $f(\infty) = \infty$. Con esta definición es continua en la esfera de Riemann.

Estas funciones son holomorfas y $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$. Si $c \neq 0$, por tanto, es conforme en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, y si $c = 0$, entonces $ad \neq 0$ y la función es $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, conforme en todo \mathbb{C} .

Proposición 29. Toda transformación de Möbius es composición de traslaciones ($z \rightarrow z + z_0$), dilataciones ($z \rightarrow \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$), rotaciones ($z \rightarrow w_0 z$, $w_0 \in \mathbb{S}^1$) e inversiones ($z \rightarrow \frac{1}{z}$).

Demostración. Si $c \neq 0$, $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$. Se hace primero la traslación de $\frac{d}{c}$, luego una inversión, luego una dilatación más rotación (la multiplicación por $\frac{bc-ad}{c^2}$) y una última traslación de $\frac{a}{c}$. Si $c = 0$, entonces $\frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}(z + \frac{b}{a})$, más directo. \square

Recordando que las circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$ correspondían a circunferencias de \mathbb{C} o bien rectas de \mathbb{C} junto con ∞ , podemos enunciar este teorema:

Teorema 26. Si f es de Möbius, transforma circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$ en circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$.

Para la demostración, basta verlo para las cuatro transformaciones de Möbius elementales vistas en la proposición previa.

Definición 49. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$. Si ninguno de ellos es ∞ , se define la **razón doble**: $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$. Si alguno es ∞ , se considera el límite cuando ese valor tiende a ∞ . Por ejemplo, $[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$.

Teorema 27. Si f es de Möbius, se tiene que $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$, para puntos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos.

Demostración. La aplicación $T(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$ envía $z_2 \rightarrow 1$, $z_3 \rightarrow 0$ y $z_4 \rightarrow \infty$. Además es única, dado que si hubiese otra, S , con esas propiedades, se tiene que $S \circ T^{-1}$ fija el 1, el 0 y el ∞ , pero la única transformación de Möbius que fija 3 puntos es la identidad, dado que si $\frac{az+b}{cz+d} = z$, se tiene que $cz^2 + (d-a)z + b = 0$, así que debe darse que $c = b = 0$ y $a = d = 1$, o si no fijará 1 o 2 puntos.

Por lo tanto, $T \circ f^{-1}$ es la única aplicación de Möbius con $f(z_2) \rightarrow 1$, $f(z_3) \rightarrow 0$ y $f(z_4) \rightarrow \infty$. Por unicidad, se tiene $(T \circ f^{-1}) = [z, f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$, de tal modo que $[z_1, z_2, z_3, z_4] = T(z_1) = T \circ f^{-1}(f(z_1)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$. \square

Además, se deduce aquí que una aplicación de Möbius está determinada por la imagen de 3 puntos. En la expresión previa se coloca una z libre y esos 3 puntos, y se despeja la $f(z)$.

Definición 50. Sea Γ una circunferencia de $\hat{\mathbb{C}}$. Se define una **orientación** para Γ como una tripleta (z_1, z_2, z_3) ordenada, de tres puntos distintos de Γ . Se interpreta como el sentido de recorrido que va de z_1 a z_2 , de z_2 a z_3 y de z_3 en z_1 .

Se define el **lado derecho** de Γ dada una orientación como $\{z : \text{Im}[z, z_1, z_2, z_3] > 0\}$, y el **lado izquierdo** de Γ como $\{z : \text{Im}[z, z_1, z_2, z_3] < 0\}$.

Estas dos últimas definiciones surgen porque $[z, z_1, z_2, z_3]$ es la transformación de Möbius que envía Γ en el eje real, recorrido de derecha a izquierda. Por ello, su lado derecho es el semiplano superior.

Proposición 30. Sea Γ_1 una circunferencia de $\hat{\mathbb{C}}$ orientada por (z_1, z_2, z_3) y T una transformación de Möbius. Consideramos $T(\gamma_1)$ su imagen orientada por $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$. Entonces T envía el lado derecho de γ_1 en el lado derecho de $T(\gamma_1)$, y análogamente para el lado izquierdo.

Demostración. $T(\text{Im}[z, z_1, z_2, z_3] > 0) = \{T(z) : \text{Im}[z, z_1, z_2, z_3] > 0\} = \{z : \text{Im}[T^{-1}(z), z_1, z_2, z_3] > 0\} = \{z : \text{Im}[z, T(z_1), T(z_2), T(z_3)] > 0\}$. \square