Cálculo II

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Mayo 2018

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Revisado en 2022
Apuntes de la asignatura impartida por Eva Tourís
en la Universidad Autónoma de Madrid en Mayo 2018.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Cálculo II del grado en matemáticas, tomados en Mayo 2018 por Miguel González. La asignatura fue impartida por Eva Tourís. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Cálculo II

En cálculo II, o cálculo multivariable, se extienden los conceptos de análisis real en una variable a funciones que aceptan más de una entrada, es decir, que trabajan con valores de $\mathbb{R}^n$. El objetivo es conseguir las mismas nociones de límite, derivada e integral para este tipo de funciones, lo que está un paso más cerca de obtener estos conceptos en espacios mucho más abstractos.

Asimismo, en este tipo de funciones, surgirán conceptos nuevos e interesantes como las integrales de línea o las derivadas parciales, que hacen uso intrínseco del hecho de estar trabajando con más de una variable.

Requisitos previos

1. Conocimientos básicos de notación matemática.
2. Conocimientos de análisis real: límite, derivada e integral de funciones de una variable (correspondiente a los apuntes: *Cálculo I*).
3. Conocimentos básicos de álgebra lineal, en particular, el concepto de *determinante* (ver apuntes: *Álgebra Lineal*).

Índice

1. Introducción al espacio $\mathbb{R}^n$ 3
1.1. Vectores, producto escalar y distancia . . . 3
1.2. Conceptos métricos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.2.1. Bolas abiertas y conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.2.2. Límites de sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Completitud . . . 6
1.2.3. Más sobre la topología de $\mathbb{R}^n$ . . . 6
1.3. Funciones en $\mathbb{R}^n$: curvas y superficies de nivel . . . 8

2. Cálculo diferencial en varias variables 9
2.1. Límites y continuidad . . . 9
2.1.1. Límites . . . 9
2.1.2. Continuidad . . . 10
2.1.3. Abiertos, cerrados y funciones continuas . . . 11
2.2. Diferenciabilidad . . . 11
2.2.1. Derivadas parciales . . . 11
2.2.2. Diferencial . . . 12
2.2.3. Derivadas direccionales . . . 13
2.2.4. Más sobre diferenciabilidad y gradiente . . . 13
2.3. Regla de la cadena . . . 14
2.4. Derivadas de orden superior . . . 15
2.5. Extremos . . . 17
2.5.1. Máximos y mínimos locales . . . 17
2.5.2. Máximos y mínimos absolutos . . . 18
2.5.3. Extremos condicionados o restringidos . . . 19

3. Funciones con valores vectoriales 19
3.1. Curvas parametrizadas . . . 19
3.2. Campos vectoriales . . . 20
3.3. Operador nabla (∇): Divergencia y rotacional . . . 21
3.4. Superficies parametrizadas y plano tangente . . . 21

4. Integración en $\mathbb{R}^n$ 23
4.1. Integrales dobles. El caso de $\mathbb{R}^2$. . . . 23
4.1.1. Integrales sobre una región rectangular. . . . 23
4.1.2. Integrales dobles sobre regiones más generales . . . 26
4.2. Integrales triples . . . 27
4.2.1. Integrales sobre cubos . . . 27
4.2.2. Integrales sobre regiones generales . . . 27
4.3. Cambio de variables en integrales dobles . . . 28
4.4. Cambio de variables en integrales triples . . . 29

5. Integrales curvilíneas 29
5.1. Integral de línea de una función escalar . . . 29
5.2. Integral de línea de un campo vectorial . . . 30
5.3. Teorema de Green . . . 31
5.4. Campos conservativos . . . 32

6. Integrales de superficie **34**
6.1. Integral de superficie de funciones escalares 34
6.2. Integral de superficie de campos vectoriales 34
6.3. Teorema de Gauss. Teorema de Stokes. 34

1. Introducción al espacio $\mathbb{R}^n$

1.1. Vectores, producto escalar y distancia

Se define $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todos los puntos representados cada uno por una colección ordenada de n reales: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i,\ 1 \leq i \leq n\}$. También se puede interpretar como un conjunto de vectores:

Definición 1. Geométricamente, un vector $\vec{x}$ es un segmento de recta dirigido que comienza en el origen de coordenadas y termina en un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Así, cada vector se corresponde biunívocamente a un punto.

Definición 2. Los vectores $\vec{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0); \vec{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0); ...; \vec{e_n} = (0, 0, 0, ..., 1)$ forman la **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

A continuación se tratarán las principales operaciones con vectores. En primer lugar, las que dotan a $\mathbb{R}^n$ de las propiedades de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

Definición 3 (Suma y producto por escalar)**.** Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Se define el vector suma por $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, donde x_i y y_i son las coordenadas de $\vec{x}$ y $\vec{y}$, respectivamente.
Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define el producto como $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Y la siguiente operación relaciona $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}$:

Definición 4 (Producto escalar o interno)**.** Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas denotadas como anteriormente. Se define la aplicación **producto escalar** como $\langle\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, por $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. También se denota comúnmente $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Proposición 1. *Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. El producto escalar verifica las propiedades siguientes:*

1. ***Linealidad.*** $(\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{z}) + \beta(\vec{y} \cdot \vec{z})$.
2. ***Conmutativa.*** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
3. ***Definición positiva.*** $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ *y* $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, ..., 0)$.

Demostración.

1. $(\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k + \beta y_k)z_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k z_k = \lambda(\vec{x}\vec{z}) + \beta(\vec{y}\vec{z})$, donde se han usado la propiedad distributiva de los reales y asociativa de la suma.
2. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \vec{y} \cdot \vec{x}$, donde se ha usado la conmutativa del producto real.
3. $\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ al ser suma de términos no negativos. Para la segunda parte, $\Longleftarrow$ es trivial, y para $\Longrightarrow$ supongamos que $\vec{x}$ es no nulo en la coordenada *i-ésima*. Entonces, se verifica que $\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq x_i^2 > 0$, luego el producto es no nulo. □

Definición 5 (Norma)**.** Se define la **norma euclídea** de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y se escribe $||\vec{x}||$, como la raíz cuadrada del producto escalar consigo mismo:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Geométricamente representa la longitud o distancia al origen del vector. Un vector de norma 1 se conoce como **unitario**. Cualquier vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se puede **normalizar**, es decir, transformar en otro $\hat{v}$ de igual dirección y sentido pero unitario, de la siguiente manera:

$$\hat{v} = \frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}.$$

La norma de un valor real coincide con su valor absoluto, dado que $\sqrt{x^2} = |x|$. Antes de ver las propiedades de la norma, conviene probar el siguiente resultado:

Teorema 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vectores. Se verifica que la norma de su producto escalar es menor o igual al producto de sus normas, es decir:*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Sean los reales $a = \vec{y}\vec{y}$ y $b = -\vec{x}\vec{y}$. Si $a = 0$ entonces $\vec{y} = 0$ y la igualdad es trivial. Ahora, si $a \neq 0$, con las propiedades del producto escalar: $0 \leq (a\vec{x} + b\vec{y})(a\vec{x} + b\vec{y}) = a^2\vec{x}\vec{x} + b^2\vec{y}\vec{y} + 2ab\vec{x}\vec{y} = ||\vec{y}||^4||\vec{x}||^2 + (\vec{x}\vec{y})^2||\vec{x}||^2 - 2||\vec{y}||^2(\vec{x}\vec{y})^2 = ||\vec{y}||^4||\vec{x}||^2 - (\vec{x}\vec{y})^2||\vec{y}||^2 \implies 0 \leq ||\vec{y}||^2||\vec{x}||^2 - (\vec{x}\vec{y})^2 \implies ||\vec{x}||^2||\vec{y}||^2 \geq (\vec{x}\vec{y})^2$ □

Ahora observemos que esta desigualdad se puede reescribir como $-||\vec{x}||||\vec{y}|| \leq \vec{x}\vec{y} \leq ||\vec{x}||||\vec{y}||$, y si ninguno es el vector nulo, sigue que $-1 \leq \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||} \leq 1$. Así, se definirá este valor en relación al ángulo entre los vectores:

Definición 6. Se define el **ángulo** θ entre los vectores como aquel que cumple $\cos(\theta) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||}$. Sigue entonces que, conocido el ángulo, se tiene $\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cos(\theta)$.

En el caso de $\mathbb{R}^n$, el ángulo así definido coincide con el medido siguiendo la noción habitual de ángulo.

Definición 7. Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son **ortogonales o perpendiculares** si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. Se denota por $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Proposición 2 (Pitágoras y teorema del coseno)**.** *Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, con $\vec{x} \perp \vec{y}$. Se verifica que $||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x} + \vec{y}||^2$.*

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$. Se verifica que $||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2||\vec{x}||||\vec{y}|| \cos\theta = ||\vec{x} - \vec{y}||^2$, con θ el ángulo entre los vectores.

Demostración. Para el teorema de pitágoras: $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x}+\vec{y}\vec{y}+2\vec{x}\vec{y} = ||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2+0$.
Para el teorema del coseno: $||\vec{x}-\vec{y}||^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x}+\vec{y}\vec{y}-2\vec{x}\vec{y} = ||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2-2||\vec{x}||||\vec{y}|| \cos\theta$ □

Proposición 3 (Propiedades de la norma euclídea)**.** *Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene:*

1. $||\vec{x}|| \geq 0$
2. $||\vec{x}|| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
3. $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||$
4. ***Desigualdad triangular.*** $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$
5. ***Desigualdad triangular inversa.*** $|||\vec{x}|| - ||\vec{y}||| \leq ||\vec{x} - \vec{y}||$

Demostración.

1. $||\vec{x}|| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ puesto que la exponencial de un valor positivo existe y es positiva.

2. $||\vec{x}|| = 0 \iff \vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \iff \vec{x} = 0$, dado que $x^{\frac{1}{2}} = 0 \iff x = 0$.
3. $||\lambda\vec{x}|| = (\sum_{k=1}^{n} \lambda^2 x_k^2)^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\cdot||\vec{x}||$.
4. $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\vec{x}\vec{y} \leq ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2||\vec{x}||||\vec{y}|| \leq (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2$, donde se ha usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
5. $(|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\||)^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2||\vec{x}||||\vec{y}|| \leq ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\vec{x}\vec{y} = ||\vec{x}-\vec{y}||^2$ □

Ahora se definirá la noción de distancia o métrica.

Definición 8 (Distancia)**.** Una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ es una distancia si verifica:

1. $d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
2. $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$
3. $d(\vec{x},\vec{z}) \leq d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z})$

Para todos $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

La distancia que se usará mas a menudo será la **distancia euclídea**, que se define por $d(\vec{x},\vec{y}) = ||\vec{x}-\vec{y}|| = (\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$. Veamos que se trata de una distancia:

1. $||\vec{x}-\vec{y}|| = 0 \iff \vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{y}$
2. Como $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = (y-x)^2$, sigue que $(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2)^{\frac{1}{2}}$.
3. La tercera propiedad es la desigualdad triangular aplicada a $\vec{x}-\vec{y}$ y $\vec{y}-\vec{z}$.

1.2. Conceptos métricos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

1.2.1. Bolas abiertas y conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$

Definición 9 (Bola abierta)**.** Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se llama **bola abierta** de centro x_0 y radio r, y se denota $B_r(x_0)$, al conjunto: $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$.

Definición 10 (Conjunto abierto)**.** Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto abierto** si $\forall x_0 \in A$, $\exists r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, t.q $B_r(x_0) \subset A$.

Definición 11 (Entorno)**.** Un **entorno** del punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que lo contiene.

Razonablemente, una bola abierta es un conjunto abierto:

Proposición 4. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Entonces $B_r(x_0)$ es abierto.*

Demostración. Sea $x \in B_r(x_0)$. Fijamos $s = r - \|x - x_0\|$, claramente $s > 0$ por la definición de bola abierta. Vamos a probar que $B_s(x) \subset B_r(x_0)$. Sea $y \in B_s(x)$. Entonces, $\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r$, de modo que $y \in B_r(x_0)$. □

Proposición 5. *La unión, finita o infinita, de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos arbitraria. Sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ la unión. Ahora, sea $x \in A$. Por pertenecer a la unión, $\exists i \in I$ t.q. $x \in A_i$. Ahora, como A_i es abierto, sigue que $\exists r > 0$ t.q. $B_r(x) \subset A_i$. Para finalizar, probaremos que la bola también es subconjunto de A. Sea $y \in B_r(x)$. Entonces, $y \in A_i$ pero, por la definición de unión de conjuntos, sigue que $y \in A$. □

Proposición 6. *La intersección finita de conjuntos abiertos es un abierto.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de conjuntos abiertos, y sea $A = \bigcap_{1\leq i\leq n} A_i$ la intersección. Sea $x \in A$. Entonces, $x \in A_i$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n$. Como cada uno es abierto, $\exists r_1, r_2, ..., r_n$ tales que $B_{r_i}(x) \subset A_i$ $\forall i$. Si tomamos $0 < r \leq \text{mín}\{r_i\}$, sigue que $B_r(x) \subset A$. □

1.2.2. Límites de sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Completitud

Definición 12. Una **sucesión** en $\mathbb{R}^n$ es una colección de n sucesiones en $\mathbb{R}$: $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, ...a_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ donde a_i^k es la i-ésima sucesión en $\mathbb{R}$.

Definición 13. Dada una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = L$, es decir, que el límite de A_k es L o que A_k converge a L si $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\|A_k - L\| < \epsilon$, $\forall k \geq N$, es decir, $A_k \in B_\epsilon(L)$ $\forall k \geq N$.

El siguiente resultado relaciona los límites en $\mathbb{R}$ con los de $\mathbb{R}^n$:

Lema 1. *Dada una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $L = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n$, se verifica que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = L \iff \lim\limits_{k\to\infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, ..., n$.*

Demostración. Para probar $\implies$, veamos que $|a_i^k - l_i| = \sqrt{(a_i^k - l_i)^2} \leq (\sum_{i=1}^n (a_i^k - l_i)^2)^{\frac{1}{2}} = \|A_k - L\|$, de modo que $\forall i = 1, 2, ..., n$, si $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $|a_i^k - l_i| \leq \|A_k - L\| < \epsilon$.

Para probar $\impliedby$, veamos que para cada $i = 1, 2..., n$, si $\epsilon > 0$, entonces $\exists N_i \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall k \geq N_i$, $|a_i^k - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Si denotamos por $N = \max\limits_{1\leq i\leq n} N_i$, entonces si $k \geq N$, sigue que $\|A_k - L\| = (\sum_{i=1}^n (a_i^k - l_i)^2)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{n(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}})^2} = \epsilon$. □

Definición 14. Se dice que una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es **de Cauchy** en $\mathbb{R}^n$ si $\forall\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_{k_1} - A_{k_2}\| < \epsilon$ $\forall k_1, k_2 \geq N$.

Definición 15. Se dice que un espacio métrico cumple **la propiedad de completitud** si toda sucesión de Cauchy converge en ese espacio.

Teorema 2. *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge.*

Demostración. En primer lugar vamos a probar que $\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \leq \|(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq \sqrt{n}\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$. Supongamos que x_i es la coordenada tal que $|x_i|$ es ese máximo. Entonces, es evidente que:

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2} = \|(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq \sqrt{x_i^2 + x_i^2 + ... + x_i^2} = \sqrt{n}|x_i|$$

Ahora, seguiremos probando que $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = (a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$ es Cauchy **si y solo si** lo es a_i^k, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Veamos que si A_k es Cauchy, entonces, si $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $r, s \geq N$, entonces $\epsilon > \|A_r - A_s\| \geq \max |a_i^r - a_i^s| \geq |a_j^r - a_j^s|$ para cualquier $j = 1, 2, ..., n$, donde hemos usado el resultado anterior para minorar la norma por el máximo de las coordenadas. Entonces sigue que todas las a_j^k son de Cauchy.

Recíprocamente, si cada una es Cauchy, entonces si $\epsilon > 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$ $\exists N_i$ tal que si $r, s \geq N_i$, entonces $|a_i^r - a_i^s| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Si denotamos $N = \max\limits_{1\leq i\leq n} N_i$, entonces, si $r, s \geq N$, tenemos que todas las distancias entre coordenadas son menores que $\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$, y en particular: $\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \geq \max |a_i^r - a_i^s| \geq \frac{\|A_r - A_s\|}{\sqrt{n}}$, donde hemos usado el primer resultado, y multiplicando por $\sqrt{n}$ sigue que A_k es de Cauchy.

Finalmente, si una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy, concluimos que todas sus coordenadas lo son en $\mathbb{R}$ de manera que todas convergen y por el lema 1 la sucesión converge. □

1.2.3. Más sobre la topología de $\mathbb{R}^n$

Definición 16. Sea A un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Se dice que un punto $x \in A$ es **punto interior** de A si $\exists r > 0$ t.q. $B_r(x) \subset A$. El conjunto de puntos interiores de A se denota $\mathring{A}$ o $int(A)$.

Proposición 7. *Las siguientes son propiedades de $\mathring{A}$:*

1. *$\mathring{A}$ es abierto. Además se trata del máximo subconjunto abierto de A.*
2. *$\mathring{A} \subseteq A$.*
3. *Si A es abierto, entonces $A = \mathring{A}$.*

Definición 17. Se dice que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si su complementario C^c es abierto.

Proposición 8. *La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada. La intersección finita o infinita de conjuntos cerrados es cerrada.*

Demostración. Podemos aplicar las leyes de De Morgan a los lemas acerca de conjuntos abiertos. Por ejemplo, si se tiene $\{A_k\}_{k\in I}$ una familia de cerrados, entonces $(\bigcap_{k\in I} A_k)^c = \bigcup_{k\in I} A_k^c$ es unión de abiertos y por tanto el complemento de la intersección es abierto, luego esta es cerrada. $\square$

Proposición 9 (Caracterización de cerrados)**.** *$C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\iff$ $\forall \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C$ convergente, sigue que $\lim_{k\to\infty} A_k = L \in C$.*

Demostración. Para $\implies$, supongamos que $\exists\{A_k\}_k \subset C$ convergente con $\lim_{k\to\infty} A_k = L \notin C$. Entonces, $L \in C^c$. Si C fuese cerrado, entonces C^c sería abierto, de modo que $\exists r > 0$ t.q. $B_r(L) \subset C^c$. Por ser límite, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_k - L\| < r \ \forall k \geq N$, es decir, para esos valores, $A_k \in B_r(L)$, luego $A_k \notin C$ contradiciendo el supuesto. Por tanto, C no es cerrado en este caso.

Para $\impliedby$, supongamos que C no es cerrado. Entonces, C^c no es abierto, es decir, $\exists x_0 \in C^c$ tal que $\forall r > 0$, $B_r(x_0) \nsubseteq C^c$. Tomamos ahora $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x_0)$ que verifique $x_k \notin C^c$, es decir, $x_k \in C$. La sucesión $\{x_k\}_k \subset C$ así formada cumple $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \notin C$, contradiciendo la hipótesis. Entonces C es cerrado. $\square$.

Definición 18. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario. Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de adherencia o clausura** de C si $\forall r > 0$, $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$, es decir, toda bola abierta alrededor del punto tiene algún punto de C. Al conjunto de todos estos puntos se le llama **cierre o clausura** de C, y se denota $\bar{C}$.

De esta definición es evidente que todos los puntos de C son de clausura. Estas son algunas propiedades:

Proposición 10.

1. *$\bar{C}$ es cerrado.*
2. *$C \subseteq \bar{C}$. Además, $\bar{C}$ es el menor cerrado que contiene a C.*
3. *Si C es cerrado, $C = \bar{C}$.*

Definición 19. Sea C un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es **punto de acumulación** si $\forall r > 0$, $B_r(x)\backslash\{x\} \cap C \neq \emptyset$, es decir, toda bola centrada en x contiene algún punto adicional de C que no sea x. Al conjunto de todos estos puntos se le denota C'.

Los puntos de acumulación verifican que $C' \subset \bar{C}$, aunque el opuesto no es válido en general.

Definición 20. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto. Los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \in \bar{C}\backslash C'$ se conocen como **puntos aislados**. Es decir, son aquellos tales que $\exists r > 0$ con $B_r(x) \cap C = \{x\}$.

Definición 21. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es **frontera** de C si $\forall r > 0$, $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ y $B_r(x) \cap C^c \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos frontera se le denota por ∂C.

Es fácil ver que los puntos de clausura que no son interiores son los puntos frontera. Ahora veremos lo que son conjuntos acotados y compactos:

Definición 22. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si $\exists M > 0$ t.q. $\forall x \in C$ se tiene $\|x\| < M$, es decir, $C \subset B_M(0)$.

Definición 23 (Recubrimiento por abiertos)**.** Un **recubrimiento por abiertos** del conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una familia **numerable** de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $S \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Definición 24 (Conjunto compacto)**.** Un conjunto C es **compacto** si en **todo** recubrimiento por abiertos del mismo hay una subfamilia **finita** que recubre al conjunto.

Así, si existe algún recubrimiento que requiere estrictamente infinitos conjuntos, no es compacto. Existe un resultado que permite caracterizar fácilmente los compactos del espacio euclídeo:

Teorema 3 (Heine-Borel)**.** *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto **si y solo si** es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.*

Para finalizar el apartado de topología, veremos un último resultado importante:

Teorema 4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Si C es infinito y acotado, $C' \neq \emptyset$.*
Equivalentemente, podemos decir que toda sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ en un compacto C tiene una subsucesión que converge en C.

1.3. Funciones en $\mathbb{R}^n$: curvas y superficies de nivel

Definición 25. Se denomina **función de varias variables** a la función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $(x_1, x_2, ..., x_n) \to f((x_1, ..., x_n)) = (f_1((x_1, ..., x_n)), f_2((x_1, ..., x_n)), ..., f_m((x_1, ..., x_n)))$.

Si $m = 1$ entonces la función se llama **función escalar** y si $m > 1$ se trata de una **función vectorial**.

Definición 26. Dada una función escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se denomina **gráfica** de la función al conjunto $\{(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) : x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Si $n = 1$ o $n = 2$, es fácil visualizar las gráficas al ser subconjuntos del espacio bidimensional o tridimensional. Sin embargo para dimensiones superiores no es posible visualizar las gráficas. El siguiente concepto ayuda, en ocasiones, al respecto:

Definición 27. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$. El **conjunto de nivel** del valor c es $\{x \in D : f(x) = c\}$. Si $n = 2$ se llaman curvas de nivel y si $n = 3$ superficies de nivel.

2. Cálculo diferencial en varias variables

En esta sección se extienden los conceptos del cálculo en una variable al caso de varias variables.

2.1. Límites y continuidad

2.1.1. Límites

Definición 28. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x_0 \in A'$ un punto de acumulación. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función escalar. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es **límite** de f cuando x tiende a x_0 ($\lim_{x \to x_0} f(x) = L$) si y solo si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A$, $0 < \|x - x_0\| < \delta$, se tiene que $\|f(x) - L\| < \epsilon$. Es decir, $x \in B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\} \cap A \implies f(x) \in B_\epsilon(L)$.

Por ejemplo, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + y^2 = 0$, ya que si $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = \sqrt{\epsilon} > 0$, y entonces $\|(x, y)\| < \delta \implies x^2 + y^2 < \delta^2 = \epsilon$ luego $|x^2 + y^2| < \epsilon$.

Teorema 5. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto y sea $x_0 \in A'$. Si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, entonces es único.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$. Entonces si $\epsilon > 0$, $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ si tomamos $x \in B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\} \cap A$, de modo que $|L_1 - L_2| < \epsilon$ y como este era arbitrario y positivo, $L_1 = L_2$. □

Proposición 11. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite en $x_0 \in A$, entonces está acotada en un entorno de x_0.*

Demostración. Si $\epsilon = 1$, entonces hay un entorno de x_0, $B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$ donde $|f(x) - L| < 1 \implies |f(x)| - |L| < 1$ a causa de la desigualdad triangular inversa, de manera que $|f(x)| < 1 + |L|$. Técnicamente, para tener en cuenta el propio punto, en el entorno $B_\delta(x_0)$ se verificará que $|f(x)| < \max\{1 + |L|, 1 + |f(x_0)|\}$. □

Proposición 12 (Propiedades de límites)**.** *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto y sea $x_0 \in A'$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = G$, sigue que:*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = F + G$
2. $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda F$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = FG$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$ *si $G \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ en un entorno de x_0.*
5. $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = F^G$

Demostración. La idea de todas estas demostraciones es que si se puede hacer arbitrariamente pequeña la distancia al límite de cada una, se puede hacer arbitrariamente pequeña la distancia de la operación al nuevo límite, valiéndose de propiedades del valor absoluto. Se va a dar la prueba de *3* siendo las demás similares en cuanto a estrategia:

Sea M la cota de $|f(x)|$. Sea $\epsilon > 0$ y δ tal que $|f(x) - F| < \frac{\epsilon}{2|G|}$ y $|g(x) - G| < \frac{\epsilon}{2M}$ si $0 < \|x_0 - x\| < \delta$. (tomar el mínimo de ambas deltas que garantizan cada una de las desigualdades). Ahora, si $0 < \|x_0 - x\| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - FG| = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| \leq |f(x)||g(x) - G| + |f(x) - F||G| < M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2|G|}|G| = \epsilon$. □

Proposición 13. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Sigue que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i$, $\forall i = 1, 2, ..., m$.*

Demostración. Análoga a la del Lema 1. □

Proposición 14 (Caracterización por sucesiones)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto, $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que son equivalentes:*

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$
2. $\forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A \backslash \{x_0\}$, $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \implies \lim_{k \to \infty} f(x_k) = L$

Demostración. $\implies$. Suponiendo *1*, Sea $\{x_k\}$ con tales características. Entonces, si $\epsilon > 0$, y $\delta > 0$ es el de la definición de *1*, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$ asegura $\|x_k - x_0\| < \delta$, con lo que $|f(x_k) - L| < \epsilon$.

$\impliedby$. Supongamos que no se verifica *1*. Entonces, $\exists \epsilon_0 \geq 0$ t.q. $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in A$, con $0 < \|x_\delta - x_0\| < \delta$, pero $|f(x_\delta) - L| \geq \epsilon_0$. Construimos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A \backslash \{x_0\}$ tal que $x_k = x_{\delta = \frac{1}{k}}$. Sigue que $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, pero $\lim_{k \to \infty} f(x_k) \neq L$, contradiciendo *2*. □

Observación 1. Por lo anterior, debe verificarse que la función tienda a L sin importar desde que dirección/curva nos acerquemos a f. Por ello, sobre todo en $\mathbb{R}^2$, conviene utilizar **límites iterados** como $\lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x, y))$, $\lim_{x \to y_0} (\lim_{y \to x_0} f(x, y))$, que, si existe $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$, deben valer ambos lo mismo que este en caso de existir, así como límites radiales $\lim_{x \to x_0} f(x, y_0 + \lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, que permiten acercarse desde cualquier recta. Si existen, igualmente, deben valer lo mismo que el límite original.

Proposición 15 (Límites en polares)**.** *Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que:*
$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L \iff |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - L| \leq F(r)$, *con* $\lim_{r \to 0} F(r) = 0$.

2.1.2. Continuidad

Definición 29. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, es decir, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A$, $0 < \|x - x_0\| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Observación 2. Una función vectorial $f : A \to \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si lo son cada una de sus coordenadas.

Proposición 16 (Caracterización por sucesiones)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto, $x_0 \in A$ y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. $\forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A \backslash \{x_0\}$, $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \implies \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0)$

Sigue de la proposición 13. □

Proposición 17 (Caracterización por sucesiones)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto y continua en $x_0 \in A$. Entonces, también son continuas en x_0:*

1. $f(x) + g(x)$
2. $\lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $f(x) g(x)$

4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ *si* $g(x_0) \neq 0$.

5. $f(x)^{g(x)}$

Demostración. Sigue de las propiedades de los límites. $\square$

Teorema 6. *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$*, con* $Im(f) \subset B$*,* A *y* B *abiertos,* f *continua en* $x_0 \in A$ *y* g *continua en* $f(x_0)$*. Entonces* $g \circ f$ *es continua en* x_0*.*

2.1.3. Abiertos, cerrados y funciones continuas

Definición 30. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Se define la **preimagen** de Y a través de f como el conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.

Proposición 18. *Algunas propiedades de la preimagen son:*

1. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $Y \subset \mathbb{R}^m$*, sigue que* $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$*.*

2. Para $X \subset A$*, entonces* $X \subset f^{-1}(f(X))$*.*

El siguiente teorema caracteriza las funciones continuas:

Teorema 7. *Dada* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, sigue que* f *es continua* $\iff$ $\forall A \subset \mathbb{R}^m$ *abierto, se tiene que* $f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto.*

Corolario. *Dada* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, sigue que* f *es continua* $\iff$ $\forall A \subset \mathbb{R}^m$ *cerrado, se tiene que* $f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ *es cerrado.*

Demostración. Para $\implies$, sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y $A \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Sea $x \in f^{-1}(A)$, entonces $\exists r > 0$ t.q. $B_r(f(x)) \subset A$ al ser A abierto. Ahora bien, por ser continua f, $\exists \delta > 0$ t.q. $f(B_\delta(x)) \subset B_r(f(x)) \subset A$. Esto implica que $f^{-1}(f(B_\delta(x))) \subset f^{-1}(B_r(f(x))) \subset f^{-1}(A)$. Ahora, usando la propiedad 2 de la preimagen, sigue que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(f(B_\delta(x))) \subset f^{-1}(A)$, de modo que como x era arbitrario sigue que $f^{-1}(A)$ es abierto.

Para $\impliedby$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$. Tenemos que $B_\epsilon(f(x))$ es abierto al ser una bola. Por lo tanto, $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ también lo es. Al ser este abierto, $\exists \delta > 0$ t.q. $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ (observar que x está en la preimagen ya que el conjunto en cuestión contiene a f(x)). Esto quiere decir que $f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\epsilon(f(x))))$, y por la propiedad 1 de preimágenes, $f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))) \subset B_\epsilon(f(x))$ y como x era arbitrario y ϵ también, sigue la continuidad. $\square$

El corolario se deduce fácilmente a través de complementarios.

2.2. Diferenciabilidad

2.2.1. Derivadas parciales

De las funciones en $\mathbb{R}$ recordamos que una función es derivable en un punto si se puede calcular un límite que da lugar a la recta tangente en dicho punto, que además se aproxima a la función más rapido que lo que lo hace x al punto. Ademas ahí derivabilidad implica continuidad. La idea se extiende a $\mathbb{R}^n$, con planos e hiperplanos en vez de rectas. Sigue indicando una noción de "suavidad". Para extender el concepto a funciones multivariable:

Definición 31. Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Se define la **derivada parcial i-ésima** de f en el punto $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ como $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1,x_2,...,x_i+h,...,x_n)-f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{h}$, si existe ese límite. Es decir, se trata de la derivada de f con respecto a x_i y el resto de variables fijadas como constantes a su valor en x.

Geométricamente se trata de tomar la curva que resulta de fijar f con todas las variables constantes salvo x_i, y obtener la recta tangente en el punto indicado. Es decir, derivar en las direcciones paralelas a los ejes.

Observación 3. La existencia de derivadas parciales en un punto no implica diferenciabilidad.

Por ejemplo, funciones como $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; xy = 0 \\ 0 \; si \; xy \neq 0 \end{cases}$ tienen parciales en $(0,0)$, donde son discontinuas.

2.2.2. Diferencial

El caso de $\mathbb{R}^2$. Lo que se busca para que una función sea diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (se generalizará a $\mathbb{R}^n$) es que exista el plano tangente a la función en el punto (x_0, y_0), y que este aproxime bien a la función en el mismo, es decir que se acerque más rapido a la función de lo que lo hace (x,y) al punto (x_0, y_0). Así, para que lo sea, pedimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-P_{x_0,y_0}(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$.

Observación 4 (La ecuación del plano tangente en $\mathbb{R}^2$). Queremos obtener $P_{x_0,y_0}(x,y) = ax + by + c$, el plano tangente a una función en (x_0, y_0). Si imponemos que $P_{x_0,y_0}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, es decir, que coincida en el punto, y que varíe igual en (x_0, y_0) en la dirección de los ejes, es decir que las parciales de P y f coincidan, se infiere que:

$$P_{x_0,y_0}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Esta idea se extenderá naturalmente a $\mathbb{R}^n$.

Notemos que el plano tangente se puede escribir como $f(x_0,y_0) + (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$. Esta noción será util para la definición de diferenciable en general, que se da a continuación:

Definición 32 (Diferenciabilidad)**.** Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con U abierto. Se dice que f es diferenciable en $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ si $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$ $\forall j = 1, 2, ..., m$, $i = 1, 2, ..., n$, y si, además, definiendo:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

se cumple que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)\cdot[x - x_0]\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

donde $[x - x_0] = \begin{pmatrix} x_1 - x_0^1 \\ x_2 - x_0^2 \\ \vdots \\ x_n - x_0^n \end{pmatrix}$.

La matriz $Df(x_0)$ se conoce como **derivada de** f en x_0 o **matriz jacobiana** de f en x_0. En el caso de $m = 1$ también se conoce como **vector gradiente** y se representa $\nabla f(x_0)$

Teorema 8. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x_0, entonces es continua en ese punto.*

Demostración. Hay que probar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $0 < \|x - x_0\| < \delta$, $x \in U$ implique $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. Esto seguirá de probar que $\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$. Esta expresión la podemos escribir así: $\|f(x) - f(x_0)\| = \frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)\cdot[x-x_0]+Df(x_0)\cdot[x-x_0]\|}{\|x-x_0\|} \|x - x_0\| \leq \frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)\cdot[x-x_0]\|}{\|x-x_0\|} \|x - x_0\| +$ $D_f(x_0)[x - x_0]$. Ahora bien, $\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)\cdot[x-x_0]\|}{\|x-x_0\|} \|x - x_0\| + D_f(x_0)[x - x_0] = 0 \cdot 0 + 0 = 0$, luego por compresión se tiene el resultado. □

Teorema 9. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con U abierto y $x_0 \in U$ tal que $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ en un entorno de x_0 $\forall i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m$, y además cada una de las parciales es continua en ese entorno. Entonces, f es diferenciable en x_0.*

Definición 33. Una función f que cumpla las características del teorema anterior en todos los puntos de un abierto U se dice que es de **clase** $\mathcal{C}^1(U)$ y se denota $f \in \mathcal{C}^1(U)$.

Teorema 10 (Propiedades de la derivada jacobiana)**.** *Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tales que $\exists Df(x_0), Dg(x_0)$ con $x_0 \in U$. Entonces:*

1. $D\lambda f(x_0) = \lambda Df(x_0)$.
2. $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$.
3. $D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0)$.
4. $D(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0)-f(x_0)Dg(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

2.2.3. Derivadas direccionales

Definición 34. Dado $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ **unitario** y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define la **derivada direccional de** f en dirección de $\hat{u}$ en $x_0 \in U$ como:
$D_{\hat{u}} f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h\hat{u})-f(x_0)}{h}$

Obsérvese que coincide con la derivada de una variable siguiente: $\frac{d}{dt}(f(x_0 + t\hat{u}))(0)$.

Además, cabe notar que las parciales son derivadas direccionales en la dirección de los vectores base canónicos.

Proposición 19. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable con U abierto y $x_0 \in U$, así como $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Entonces, $D_{\hat{u}} f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \hat{u} \rangle$.*

Demostración. Se dará la del caso en $\mathbb{R}^2$. $D_{\hat{u}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(u_1,u_2))-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0)}{t} =$ $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0+tu_2)+f(x_0,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0)}{t}$. Ahora pondremos $h_1 = tu_1$ y $h_2 = tu_2$, así como $\tilde{y_0} = y_0 + h_2$. Veamos que t tiende a 0 si y solo si h_i tiende a 0, y si h_2 tiende a 0, $\tilde{y_0}$ tiende a y_0 uniformemente por la derivabilidad. Por tanto: $D_{\hat{u}} f(x_0) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0+h_1,\tilde{y_0})-f(x_0,\tilde{y_0})}{h_1} u_1 + \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}{h_2} u_2 =$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2$. □

2.2.4. Más sobre diferenciabilidad y gradiente

Proposición 20. *La dirección y sentido de **máximo crecimiento** en una función f diferenciable en el punto x_0 es la de $\nabla f(x_0)$. El valor de dicho crecimiento (derivada direccional en esa dirección y sentido) es $\|\nabla f(x_0)\|$. La de mínimo crecimiento es la de dirección y sentido de $-\nabla f(x_0)$, con un valor de $-\|\nabla f(x_0)\|$.*

Razón. Como f es diferenciable, se busca la dirección y sentido $\hat{u}$ tal que $\langle \nabla f(x_0), \hat{u} \rangle = \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta$, con θ el ángulo entre $\hat{u}$ y gradiente, sea máximo. Esto ocurre con $\theta = 0$. Para que sea mínima, $\theta = \pi$.

Proposición 21. *Si f es diferenciable y x_0 es un punto de su dominio, esta no crece ni decrece en x_0 en las direcciones $\hat{u}$ tales que $\nabla f(x_0) \perp \hat{u}$.*

Razón. Se trata del mismo motivo que la proposición anterior.

Observación 5. La dirección de $\nabla f(x_0)$ es perpendicular en x_0 al conjunto de nivel $f(x) = c$ que contiene a x_0.

Razón. El conjunto de nivel indica valores constantes de la función, luego en las direcciones tangentes al mismo en x_0 la función no cambia, y por tanto el gradiente ahí es perpendicular a estas.

Proposición 22 (Plano tangente a un conjunto de nivel)**.** *El plano tangente en x_0 al conjunto de nivel $F(x) = c$ (que contiene a x_0) de la función F viene dado por $\nabla F(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$ donde $(x - x_0)$ es el vector columna ya visto.*

Razón. Esto se verifica por la observación anterior: se trata de todos los puntos ortogonales al conjunto de nivel en x_0, de manera que el plano contenga a x_0.

Esto permite hallar planos tangentes a superficies que no son funciones, como esferas.

2.3. Regla de la cadena

Teorema 11 (Regla de la cadena)**.** *Sean $f : V \to \mathbb{R}^k$ y $g : U \to \mathbb{R}^m$ con $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, y sea $x_0 \in U$ tal que $g(x_0) \in V$. Entonces, si g es diferenciable en x_0 y f lo es en $g(x_0)$, se verifica que la composición $h : U \to \mathbb{R}^k$ dada por $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x_0, y además:*

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

Ahora veremos dos casos particulares de interés:

Observación 6 (Función escalar con coordenadas parametrizadas por una variable.). Veremos el ejemplo en $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Ahora, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Observemos que la composición $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde lo que hacemos es parametrizar las coordenadas en función del parámetro t. La regla de la cadena mencionada anteriormente nos da su derivada:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

que, en ocasiones, se denota directamente $\frac{df}{dt}$, es decir, la derivada de f en función del parámetro t.

Observemos que se han omitido los puntos en los que se evalúan las derivadas, pero es fácil ver que si estamos evaluando en t_0, las parciales se evaluarán en $g(t_0)$ según dicta la regla de la cadena.

Observación 7 (Función escalar con coordenadas parametrizadas por varias variables). Veremos el ejemplo en $\mathbb{R}^3$ con 3 parámetros. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Ahora, sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$. Observemos que la composición $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, donde lo que hacemos es parametrizar las coordenadas en función de los parámetros x, y, z. Esto podría tratarse, por ejemplo, de un cambio de coordenadas. La regla de la cadena mencionada anteriormente nos da la derivada respecto de cada una de las nuevas coordenadas:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

(Una vez más, no se indican los puntos de evaluación.)

2.4. Derivadas de orden superior

Definición 35. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con U abierto. Se definen sus **derivadas parciales de orden 2 con respecto a** x_i **y** x_j como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

y en ocasiones se denota $f_{x_j x_i}$. Se trata de obtener la derivada de f respecto de una variable, y después derivar el resultado respecto de otra. Las variables pueden ser distintas o la misma, por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, hay derivadas *iteradas* como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y *mixtas o cruzadas* como $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

En general, las parciales de orden n se definirán como $\frac{\partial f^n}{\partial x_i \partial x_j ... \partial x_z} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j}...(\frac{\partial f}{\partial x_z}))$

Definición 36. Una función $f : U \to \mathbb{R}$ se dice de **clase** $\mathcal{C}^k$, y se denota $f \in \mathcal{C}^k(U)$, si f es continua en U, y existen **todas** las derivadas parciales de orden 1 hasta k, y además son continuas en todos los puntos de U.

Una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ será de clase $\mathcal{C}^k$ si todas sus coordenadas f_i lo son.

Teorema 12. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $f \in \mathcal{C}^2$. Entonces se verifica que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\forall i, j = 1, 2, ..., n$

Teorema 13 (Taylor)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función* ***diferenciable*** *en x_0. Entonces:*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0_i}) + R_{1,x_0}(f(x)),$$

(donde x_{0_i} es la i-ésima coordenada de x_0) que representa a la función como el polinomio de Taylor más el resto, verifica que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_{1,x_0} f(x)}{\|x - x_0\|} = 0$, o sea, el polinomio de Taylor aproxima mejor a $f(x)$ de lo que x aproxima a x_0.

Demostración. Como f es diferenciable, se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$, pero justamente $R_{1,x_0}(f(x)) = f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)) = f(x) - f(x_0) - \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{0_i})$ □

Teorema 14 (Resto en forma de Lagrange)**.** *Si f verifica las condiciones del teorema anterior y además $f \in \mathcal{C}^2$, entonces, se tiene la siguiente forma para el resto:*

$$R_{1,x_0}(f(x)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^2(c)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0_i})(x_j - x_{0_j})$$

Donde c está en el segmento que une a x y x_0.

Demostración. Definimos el vector $h = x - x_0$. En primer lugar parametrizamos el segmento que une x y x_0 a través de $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ dada por $\alpha(t) = x_0 + ht$. Para $t \in [0, 1]$ se tiene el segmento que une x_0 y x. Entonces, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será $g(t) = f(\alpha(t)) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$.

Con esto en mente, tenemos que por el teorema de Taylor en una variable, $g(t) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(t_0)$, con $t_0 \in [0, t]$. Por tanto, $f(x) = g(1)$ vendrá dada por $t_0 \in [0, 1]$. Ahora, $g(0) = f(x_0)$. Por la regla de la cadena:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \nabla f(x_0+th)\cdot\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}x_1(t) = h_1 = x - x_1^0\\ \frac{d}{dt}x_2(t) = h_2 = x - x_2^0\\ \vdots\\ \frac{d}{dt}x_n(t) = h_n = x - x_n^0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0+th)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)$$

Luego $g'(0)$ sigue de evaluar el 0.

Ahora queda hallar $g''(t_0)$. Como se trata de derivar $g'(t)$, que hemos visto que se trata de una suma de funciones, bastará con derivar cada una y acto seguido sumar los resultados. Vamos a hallar la derivada de una, con la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f(x_0+th)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0) = (x_i - x_i^0)\frac{d}{dt}\frac{\partial f(x_0+th)}{\partial x_i} =$$

$$(x_i - x_i^0)\nabla\frac{\partial f(x_0+th)}{\partial x_i}\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}x_1(t) = h_1 = x - x_1^0\\ \frac{d}{dt}x_2(t) = h_2 = x - x_2^0\\ \vdots\\ \frac{d}{dt}x_n(t) = h_n = x - x_n^0\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0+th)}{\partial x_j\partial x_i}(x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0)$$

Luego, $g''(t) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0+th)}{\partial x_j\partial x_i}(x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0)$.

Sustituyendo en el polinomio de Taylor inicial, queda que $f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0_i}) + R_{1,x_0}(f(x)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^2(c)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i - x_{0_i})(x_j - x_{0_j})$ donde, como $t_0\in[0,1]$, $c = x_0 + t_0h \in [x_0, x]$. □

Vamos a ver el caso de un orden superior:

Proposición 23 (Taylor de orden 2)**.** *Sea $f : U \to \mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2$. Entonces,*

$$f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0_i}) + R_{1,x_0}(f(x)) + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i - x_{0_i})(x_j - x_{0_j}) + R_{2,x_0}(f(x)),$$

donde $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_{2,x_0}(f(x))}{\|x-x_0\|^2} = 0$.

Proposición 24 (Forma de Lagrange para el resto de orden 2)**.** *Si f verifica las condiciones anteriores, entonces:*

$$R_{2,x_0}(f(x)) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f(c)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)$$

donde $c\in[x_0, x]$.

Definición 37 (Hessiano y matriz hessiana)**.** El **hessiano** de la función $f : U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i - x_{0_i})(x_j - x_{0_j}) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1 - x_1^0 & x_2 - x_2^0 & \dots & x_n - x_n^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 - x_1^0\\ x_2 - x_2^0\\ \cdots\\ x_n - x_n^0\end{pmatrix}.$$

Se conoce como **matriz hessiana** a la matriz de derivadas parciales segundas mostrada arriba. Obsérvese que si $f \in \mathcal{C}^2$, entonces la matriz hessiana es simétrica.

2.5. Extremos

2.5.1. Máximos y mínimos locales

Definición 38. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua en el abierto U. Entonces:

1. $x_0 \in U$ es **mínimo local** si $\exists \epsilon > 0$ t.q. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B_\epsilon(x_0)$.
2. $x_0 \in U$ es **máximo local** si $\exists \epsilon > 0$ t.q. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B_\epsilon(x_0)$.
3. $x_0 \in U$ es **punto crítico** si $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$
4. $x_0 \in U$ es **punto de silla** si es punto crítico y no es máximo ni mínimo, es decir, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x, y \in B_\epsilon(x_0)$ t.q. $f(x) < f(x_0)$ y $f(y) > f(x_0)$.

Teorema 15. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$, con x_0 extremo local. Entonces, x_0 es punto crítico de f.*

Demostración. Sin perder en generalidad, supongamos que x_0 es máximo, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B_\epsilon(x_0)$. Definimos $g(t) = f(x_0 + th)$, con $h \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Veamos que si hacemos $|t| < \frac{\epsilon}{\|h\|}$, se tiene que $\|th\| < \epsilon$, esto es, $\|th + x_0 - x_0\| < \epsilon$ y por tanto $f(th + x_0) = g(t) \leq f(x_0) = g(0)$. Concluimos que en $t = 0$, g alcanza un máximo, por lo cual $g'(0) = 0$.

Además, por la regla de la cadena: $0 = g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot h$. Como h es arbitrario, sigue que $\nabla f(x_0) = 0$. □

Para determinar si un punto es máximo o mínimo habrá que estudiar el signo del hessiano.

Definición 39. Sea $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. La función $g_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(h_1, ..., h_n) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j$$

donde a_{ij} son las entradas de M, se conoce como **forma cuadrática asociada a** M.

El hessiano se corresponde a la forma cuadrática de la matriz hessiana.

Observación 8. Si g_m es forma cuadrática y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $g_m(\lambda h) = \lambda^2 g(h)$.

Definición 40. Una forma cuadrática g es **definida positiva** si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, se tiene que $g(x) > 0$. Evidentemente, $g(0) = 0$. Será **definida negativa** si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, se tiene $g(x) < 0$.

Si es simétrica, el signo de los autovalores determina la definición.

Lema 2. *Si g es cuadrática definida positiva, $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $g(h) \geq m \|h\|^2$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como g es continua, alcanzará un mínimo m en el compacto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ (teorema de Weierstrass, explicado posteriormente). Sea $h \in \mathbb{R}^n$. Entonces $g(h) = g(\frac{h}{\|h\|} \|h\|) = \|h\|^2 g(\frac{h}{\|h\|}) \geq \|h\|^2 m$ dado que ese vector está en S. □

Vamos a tratar de determinar cuando la cuadrática de una simétrica $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ es definida positiva o negativa. En este caso, dicha función es $Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2$, que, tras completar cuadrados, adquiere la forma $A(h_1 + \frac{B}{A}h_2)^2 + \frac{1}{A}(AC - B^2)h_2^2$, siempre que $A \neq 0$. Entonces, sigue que si $A > 0, \det(M) = AC - B^2 > 0$, es definida positiva, y si $A < 0$, $\det(M) = AC - B^2 > 0$ es definida negativa. Una generalización da lugar a:

Proposición 25 (Criterio de Sylvester). *Sea $M = \{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ una matriz simétrica, y sea $A_k = |a_{ij}|$ con $1 \leq i, j \leq k$, es decir, el determinante de la submatriz de orden k correspondiente. Se tiene que:*

1. *Si $A_k > 0$ $\forall k = 1, 2, ..., n$, entonces la forma cuadrática asociada es definida positiva.*
2. *Si $A_k < 0$ $\forall k = 1, 3, 5, ..., 2p + 1$ y $A_k > 0$ $\forall k = 2, 4, 6, ..., 2p$, es definida negativa.*
3. *Si $A_k \neq 0$ $\forall k = 1, 2, ..., n$ y no aplica lo anterior, no es definida positiva ni negativa.*

Teorema 16 (Criterio del hessiano para máximos y mínimos). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con U abierto y $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de $x_0 \in U$. Si x_0 es punto crítico, se tiene:*

1. *Si el hessiano de f en x_0 es definido positivo, x_0 es mínimo local.*
2. *Si el hessiano de f en x_0 es definido negativo, x_0 es máximo local.*
3. *Si el hessiano de f en x_0 no es definido positivo ni negativo, x_0 es punto de silla de f.*

Observemos que si alguno de los subdeterminantes de la matriz hessiana es nulo, no aplica este criterio dado que el criterio de Sylvester no permite concluir la definición de la cuadrática.

Observación 9. En $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) es mínimo si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ y además $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 > 0$. Esta $D = \det(Hf(x_0, y_0))$ se denomina **discriminante**.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ con $D > 0$, es máximo. Si $D < 0$ será punto de silla, y si $D = 0$ no se puede aplicar el criterio.

2.5.2. Máximos y mínimos absolutos

Definición 41. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que $x_0 \in D$ es **máximo absoluto** de f si $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in D$. Será **mínimo absoluto** si $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in D$.

Lema 3. *Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con C compacto una función continua. Entonces $f(C)$ está acotado.*

Demostración. Supongamos que no lo está, esto es, $\exists x_k \in C$ t.q. $f(x_k) \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. La sucesión así definida es $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C$. Por estar en un compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que $\exists \{x_{k_j}\}_j$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = x_0 \in C$. Por continuidad, $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x_0) \in f(C)$, lo cual no es posible al no estar acotada $f(x_{k_j})$. $\square$

Teorema 17 (Weierstrass). *Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en un compacto C. Entonces, $\exists x_0, x_1$ tales que x_0 es máximo absoluto y x_1 es mínimo absoluto de f.*

Demostración. Sabemos que $f(C)$ está acotada, luego $\exists \sup f(C) = M$. Falta probar que está en el conjunto. Al ser supremo, $\exists \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = M$. Sea $\{x_k\}_k$ tal que $f(x_k) = y_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Entonces al estar en el compacto C, hay una subsucesión con $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = x_0 \in C$, por continuidad $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x_0)$, con $f(x_0) \in f(C)$, pero además, por ser subsucesión, $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} y_{k_j} = M$, y por unicidad del límite $M \in f(C)$. Análogo para el mínimo. $\square$

2.5.3. Extremos condicionados o restringidos

Otra situación interesante es restringir la función a un espacio de menor dimensión, dado por el conjunto de nivel de un polinomio, y preguntarse por los extremos dentro de ese espacio. Las técnicas vistas hasta ahora no sirven dado que la diferenciabilidad requiere de un entorno euclídeo, que no se tiene al restringirse a una superficie.

Teorema 18 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones suaves, y S el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$. Si $\nabla g(x_0) \neq 0$, con $x_0 \in S$, y $f|_S : S \to \mathbb{R}$ es la restricción de f en S, se tiene que:*

x_0 es extremo en $f|_S \implies \nabla f(x_0)||\nabla g(x_0) \implies \nabla f(x_0) = \lambda g(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si la restricción es en numerosos conjuntos de nivel, de las funciones $g_1, g_2, ..., g_n$ (en su intersección), entonces se tendría que $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0)$...

Demostración. Sea $\alpha(t)$ una trayectoria en S ($\alpha : \mathbb{R} \to S$) que pasa por x_0 en t_0. Entonces $\alpha'(t_0) \perp \nabla g(x_0)$, dado que el vector velocidad es tangente a S y, como sabemos, el gradiente es perpendicular a los conjuntos de nivel. Si definimos $h(t) = f(\alpha(t))$, como x_0 es extremo de f, $h'(t_0) = 0$. Además, por la regla de la cadena, $h'(t_0) = \nabla f(x_0) \cdot \alpha'(t)$. Como se verifica para cualquier trayectoria, deben ser paralelos los gradientes. □

Observación 10 (**Estrategia para hallar extremos globales en una función**)**.** Para hallar los valores máximo y mínimo de una función $f : C \to \mathbb{R}$, con $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto (sabemos que existen por el teorema de Weierstrass), podemos combinar los resultados obtenidos anteriormente:

1. Hallar los extremos locales de la función considerada en $\mathring{C}$, que, al ser abierto, permite usar el criterio del gradiente nulo para encontrarlos y el criterio del hessiano para determinar su tipo.

2. Hallar los extremos de la función restringida a ∂C mediante los multiplicadores de Lagrange.

3. Hallar los valores de la función donde no sea diferenciable (dado que no habremos podido usar lo anterior)

4. Comparar los valores obtenidos: el mayor será el máximo absoluto y el menor el mínimo.

3. Funciones con valores vectoriales

3.1. Curvas parametrizadas

Definición 42. Una **curva parametrizada** en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con I un intervalo (puede ser infinito), y $c(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$. La imagen de c es la curva. Si $I = [a, b]$, la curva va de $c(a)$ a $c(b)$ en el espacio.

Definición 43. Una curva es clase C^k si la función c lo es: $c \in C^k(I)$

Definición 44. Una curva es **simple** si $c : I \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva dentro de I, es decir, si $c(t_1) \neq c(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathring{I}$ t.q. $t_1 \neq t_2$.

Definición 45. Una curva $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es **cerrada** si coinciden sus extremos, esto es, $c(a) = c(b)$.

Observación 11 (Ejemplos)**.**

1. Una recta que pasa por $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en la dirección de $v \in \mathbb{R}^n$ se puede parametrizar con $c : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ dada por $c(t) = x_0 + tv$, es decir, $(x_1(t), ..., x_n(t)) = (x_1^0, ..., x_n^0) + t(v_1, ..., v_n)$.

2. La gráfica de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede parametrizar en $\mathbb{R}^2$ con $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (t, f(t))$.

3. Una circunferencia de radio r y centro (a,b) en $\mathbb{R}^2$, es decir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ se puede parametrizar de esta manera: $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t)$. Esto es así porque se cubren todos los puntos distintos que verifican la ecuación de esa circunferencia.

4. Una elipse de ejes p y q y centro (a,b), $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-a)^2}{p^2} + \frac{(y-b)^2}{q^2} = 1\}$ se puede parametrizar siguiendo la misma estrategia: $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $c(t) = (a + p\cos t, b + q\sin t)$.

5. Una hélice circular de radio r y una vuelta puede parametrizarse de 0 a 2π con $c(t) = (r\cos t, r\sin t, \lambda t)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ indicando la altura de la vuelta. (Para más vueltas basta con incrementar el recorrido del ángulo).

Definición 46. Sea c una curva parametrizada diferenciable:

1. Su **velocidad** es el vector $c'(t) = v(t) = (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t))$, es decir, las derivadas de cada componente (su jacobiana). $c'(t_0)$ es el **vector tangente** a la curva en $c(t_0)$.

2. El punto $c(t_0)$ de la curva es **regular** si $c'(t_0) \neq \vec{0}$. La curva es regular si sus puntos lo son.

3. Su **rapidez** en t_0 es $\|c'(t_0)\|$.

4. La **recta tangente** a la curva en $c(t_0)$ es la que pasa por dicho punto, en dirección del vector tangente, es decir, la parametrizada por $r(t) = c(t_0) + tc'(t_0)$.

5. Si es dos veces diferenciable, su **aceleración** es $a(t) = c''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), ..., x_n''(t))$ el vector de las derivadas segundas de sus componentes.

3.2. Campos vectoriales

Definición 47. Un **campo vectorial** es una aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x_1, ..., x_n) = (F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_m(x_1, ..., x_n))$ que a cada punto del espacio $\mathbb{R}^n$ le asocia un vector de $\mathbb{R}^m$.

De particular interés son los campos en los que $n = m$, ya que a cada punto del espacio les asocia un vector del mismo espacio.

Definición 48 (Campo conservativo)**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $F = \nabla f$ se conoce como **campo vectorial gradiente**.

Se dice que el campo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **conservativo** si $\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. $F = \nabla f$. A la función f se le llama **función potencial** de F.

Proposición 26. *Si* $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ *es un campo conservativo cuya función potencial es* $f \in \mathcal{C}^2$*, entonces* $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Demostración. $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ al ser $f \in \mathcal{C}^2$. □

Definición 49 (Línea de flujo)**.** Se dice que la curva diferenciable $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es **línea de flujo** de $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si se tiene que $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$, $\forall t \in I$; esto es, la dirección tangente a la curva en un punto viene dada por el campo F allí.

Estas curvas son regulares si $F \neq 0$. Las rectas tangentes a ellas están dirigidas por el campo: $r(t) = \gamma(t_0) + tF(\gamma(t_0))$.

3.3. Operador nabla (∇): Divergencia y rotacional

Definición 50. El **operador nabla**, ∇, se define en $\mathbb{R}^n$ como $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$, y se aplica tanto a campos escalares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como a vectoriales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Observación 12. Si el campo es escalar, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el operador nabla proporciona el gradiente (su derivada) $\nabla \cdot f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$

Definición 51. Si $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x_1, ..., x_n) = (F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_n(x_1, ..., x_n))$ se define su **divergencia** como el campo $\nabla \cdot F : U \to \mathbb{R}$, en ocasiones denotado $div(F)$:

$$div(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

La divergencia en un punto da una idea de si el campo se aleja o acerca a dicho punto, es decir, de si dicho punto es una fuente o un sumidero del campo. Una divergencia positiva indica campo saliente de ese punto, mientras que si es negativa será entrante al mismo.

Definición 52. Si $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, se define su **rotacional** como el campo $\nabla \times F : U \to \mathbb{R}^3$, en ocasiones denotado por $rot(F)$:

$$rot(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

También se puede definir para $\mathbb{R}^2$ del mismo modo considerando la tercera coordenada como 0. En este caso, $\nabla \times F = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$.

El rotacional da una idea de la tendencia a girar/rotar del campo en torno a un punto dado, siendo su dirección el eje de rotación y su sentido el indicador de si es antihoraria u horaria la rotación.

Un campo tal que $rot(F) = 0$ se denomina **irrotacional**.

Teorema 19. *Un campo vectorial $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{R}^2$) conservativo con $F \in C^1$ verifica que $rot(F) = 0$, esto es, es irrotacional.*

Demostración. Si es conservativo, $F = \nabla f$ para alguna $f \in C^2$ al tenerse que $F \in C^1$. Entonces, las parciales de F tenidas en cuenta en su rotacional son iguales, luego es nulo. $\square$

Teorema 20. *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F \in C^2(U)$. Entonces, $div(rot(F)) = 0$, es decir, $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.*

Demostración. $div(rot(F)) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0$ dado que al ser $\mathcal{C}^2$ esas cruzadas son iguales entre ellas y se anulan. $\square$

Definición 53. El **laplaciano** de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotado $\Delta f = \nabla^2 f$ es el campo $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ dado por $\nabla \cdot (\nabla f) = div(grad(f))$.

3.4. Superficies parametrizadas y plano tangente

Definición 54. Una **superficie parametrizada** es una función continua $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. La superficie es la imagen de la curva en $\mathbb{R}^3$.

Observación 13 (Ejemplos).
1. Un plano que pasa por $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ en la dirección de $a, b \in \mathbb{R}^3$ se puede parametrizar con $\Phi : (-\infty, +\infty) \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(u, v) = (x_0, y_0, z_0) + au + bv$. Restringir el dominio permitirá obtener trozos del plano.

2. La gráfica de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se puede parametrizar con $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

3. Una superficie esférica de radio ρ y centro (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$, es decir $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2\}$ se puede parametrizar de esta manera: $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(\theta, \phi) = (a + \rho\cos\theta\sin\phi, b + \rho\sin\theta\sin\phi, c + \rho\cos\phi)$. Esto es así porque se cubren todos los puntos distintos que verifican la ecuación de esa esfera, indicando los parámetros la latitud y longitud.

4. Un cilindro de radio r en dirección del eje Z parametrizarse con $\Phi : (-\infty, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ con $\Phi(z, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

Definición 55. Una superficie parametrizada Φ es **diferenciable** si la función $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lo es.

Observación 14. Dado un punto (u_0, v_0) en el dominio, los vectores tangentes a la superficie en $\Phi(u_0, v_0)$ pueden obtenerse con $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$, al ser los vectores velocidad de las curvas parametrizadas que se obtienen fijando u_0 o v_0 en Φ, que pasan por la imagen de (u_0, v_0). Se suelen denotar $\vec{T}_u$ y $\vec{T}_v$ respectivamente.

Definición 56.

1. Una superficie $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tiene por **vector normal** en $\Phi(u_0, v_0)$ al vector $\vec{N}(u_0, v_0) = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$, al ser perpendicular a los vectores tangentes.

2. La superficie $S = \Phi(D)$ es **regular o suave** en $\Phi(u_0, v_0)$ si $\vec{N}(u_0, v_0) \neq 0$.

Proposición 27 (Plano tangente a una superficie parametrizada)**.** *Si* $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *es una superficie parametrizada, el plano tangente a ella en* $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ *viene dado por la ecuación:* $\left\langle \vec{N}(u_0, v_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0$.

La idea es imponer que sea perpendicular al vector normal, y que lo verifique el propio punto.

Observación 15 (La curva cicloide. Parametrización.). La curva cicloide es la que describe un punto P solidario a un disco circular de radio R, que rota sobre una superficie plana, moviéndose a velocidad constante v. Supongamos que el punto parte en $(0, 0)$. El centro del disco sigue la trayectoria $C(t) = (vt, R)$ ya que su altura no varía. Por otro lado, el ángulo del vector $\vec{CP}$ con la horizontal se puede deducir como $\alpha(t) = \frac{vt}{R} - \frac{\pi}{2}$, de modo que la cicloide se puede parametrizar como:

$$\gamma(t) = (vt - R\cos(\frac{vt}{R} - \frac{\pi}{2}), R + R\sin(\frac{vt}{R} - \frac{\pi}{2})) = (vt - R\sin\frac{vt}{R}, R(1 - \cos\frac{vt}{R})).$$

4. Integración en $\mathbb{R}^n$

4.1. Integrales dobles. El caso de $\mathbb{R}^2$.

4.1.1. Integrales sobre una región rectangular.

Si consideramos $f : R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función positiva y acotada, la gráfica $z = f(x,y)$ con los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ delimitan un cuerpo sólido V en $\mathbb{R}^3$. La integración permitirá, de algún modo, obtener su volumen.

Definición 57. Una **partición** $\mathcal{P}$ del rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ se trata de un par de particiones $\{x_i\}_{i=0}^k$ y $\{y_j\}_{j=0}^l$ de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente, y se denota $\mathcal{P} = (\{x_i\}_{i=0}^k, \{y_j\}_{j=0}^l)$.

$\mathcal{P}$ divide al rectángulo R en $k \cdot l$ rectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-i}, y_j]$. El área de cada uno es $a(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$.

Así, $R = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{l} R_{ij}$, y su área es $a(R) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{l} \Delta x_i \Delta y_j$.

El **diámetro** de la partición, $diam(\mathcal{P})$, es la distancia máxima que puede haber entre dos puntos de un mismo R_{ij}, o sea, la diagonal más larga de entre todos los rectángulos.

Definición 58 (Sumas de Riemann)**.** Sea $\mathcal{P} = (\{x_i\}_0^k, \{y_j\}_0^l)$ una partición de R, y sean $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada, $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y)$ y $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y)$. Se definen para f sobre $\mathcal{P}$:

1. **Suma superior de Riemann:** $U(f,\mathcal{P}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{l} M_{ij} \cdot a(R_{ij})$.

2. **Suma inferior de Riemann:** $L(f,\mathcal{P}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{l} m_{ij} \cdot a(R_{ij})$.

3. **Sumas de Riemann:** $S(f,\mathcal{P}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{l} f(c_{ij}) \cdot a(R_{ij})$, con $c_{ij} \in R_{ij}$ un punto cualquiera del rectángulo.

Observación 16. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $\mathcal{P}$ una partición de R. Entonces $L(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P})$.

Definición 59 (Integrabilidad e integral)**.** Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función acotada. Es integrable, y se denota su integral $\iint_R f(x,y)dA(x,y)$, si y solo si se verifica alguna de las siguientes (son equivalentes entre sí):

1. $\sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ es partición de $R\} = \inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ es partición de $R\} := \iint_R f(x,y)dA(x,y)$.
2. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $diam(\mathcal{P}) < \delta \implies U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \epsilon$.
3. $\exists \lim\limits_{diam(\mathcal{P})\to 0} S(f,\mathcal{P}) := \iint_R f(x,y)dA(x,y)$, independientemente de los c_{ij} seleccionados.

Proposición 28 (Propiedades)**.** *Sean $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrables.*

1. $\iint (f+g)(x,y)dA(x,y) = \iint f(x,y)dA(x,y) + \iint g(x,y)dA(x,y)$
2. $\iint \lambda f(x,y)dA(x,y) = \lambda \iint f(x,y)dA(x,y)$
3. *Si $\{Q_i\}_1^m$ son rectángulos disjuntos tales que $\bigcup_1^m Q_i = R$, entonces $\sum_1^m \iint_{Q_i} f(x,y)dA(x,y) = \iint_R f(x,y)dA(x,y)$.*

4. *Si* $m \leq f(x,y) \leq M$, $\forall (x,y) \in R$, *entonces* $m \cdot a(R) \leq \iint_R f(x,y)dA(x,y) \leq M \cdot a(R)$.
5. *Si* $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R$, *entonces* $\iint f(x,y)dA(x,y) \leq \iint g(x,y)dA(x,y)$.
6. $|\iint f(x,y)dA(x,y)| \leq \iint_R |f(x,y)|dA(x,y)$

Las demostraciones del 1 y 2 siguen de las propiedades de los límites. La demostración 4 sigue de acotar las sumas de Riemann convenientemente. La 5 sigue de la 4 con $m = 0$ y $\hat{f} = g - f$. La 6 sigue de aplicar la triangular a las sumas de Riemann.

Teorema 21. *Toda función* $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua es integrable.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua en un compacto, $\exists \delta > 0$ t.q. $|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\epsilon}{a(R)}$ si $\|(x,y) - (x',y')\| < \delta$. En particular, si $diam(\mathcal{P}) < \delta$ para una partición, entonces $M_{ij} - m_{ij} < \frac{\epsilon}{a(R)}$, $\forall i,j$. Pero entonces $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (M_{ij} - m_{ij}) a(R_{ij}) < \frac{\epsilon}{a(R)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a(R_{ij}) = \epsilon$. $\square$

Observación 17 (Interpretación geométrica.). Si $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada y positiva, forma el sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ como ya vimos. El volumen de este sólido es la integral: $vol(V) = \iint f(x,y)dA(x,y)$, al igual que cuando en una variable la integral aproximaba el área. De hecho, si $R = [a,b] \times [c,d]$, podemos obtener $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ el área debajo de la curva que sigue de fijar y en la función, donde $A(y)$ varía según la y que tomemos. Por el principio de Cavalieri, integrar todas las áreas debería dar el volumen, de modo que $vol(V) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$, e igual en orden inverso. A continuación estableceremos cuándo esto es posible.

Teorema 22 (Fubini)**.** *Sea* $f : R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua en* R*. Entonces, se tiene que:* $\iint_R f(x,y)dA(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$.

Demostración. Sea $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, que está bien definida al ser $f(x,y)$ continua y por tanto integrable en $[c,d]$. $F(x) = \lim\limits_{|\Delta y_j| \to 0} \sum_{j=1}^l f(x, \tilde{y_j})|\Delta y_j|$, con cada $\tilde{y_j} \in |\Delta y_j|$. Entonces:

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^k F(\tilde{x_i})|\Delta x_i| =$$

$$\lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^k \lim_{|\Delta y_j| \to 0} \sum_{j=1}^l f(\tilde{x_i}, \tilde{y_j})|\Delta y_j||\Delta x_i| =$$

$$\lim_{|\Delta x_i| \to 0} \lim_{|\Delta y_j| \to 0} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l f(\tilde{x_i}, \tilde{y_j}) a(R_{ij})$$

donde cada $(\tilde{x_i}, \tilde{y_j}) \in R_{ij}$. Además, como existe la integral doble por continuidad, ese límite debe coincidir con el de la integral doble, luego: $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \lim\limits_{diam(\mathcal{P} \to 0)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l f(\tilde{x_i}, \tilde{y_j}) a(R_{ij}) = \iint_r f(x,y)dA(x,y)$, donde $\mathcal{P}$ es la de R con los R_{ij}. Análogo para el otro orden. $\square$

Definición 60. Una función f cumple una propiedad en **casi todo punto** si el conjunto de puntos de su dominio donde no la cumple es de medida cero.

Definición 61 (Medida cero en el caso de $\mathbb{R}^2$)**.** Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es de **medida o área cero** si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \{R_i\}_{i=1}^I$ rectángulos tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^I R_i$ (recubren a A), y además $\sum_{i=1}^I a(R_i) \leq \epsilon$.

Por ejemplo, cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ es de área cero. También cualquier segmento. De hecho:

Proposición 29. *Si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre un intervalo cerrado, su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ tiene área cero en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Como es continua en $[a,b]$, será uniformemente continua y si $\epsilon > 0$, entonces:

(i) $\exists \delta > 0$ t.q. si $0 < |x-y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Vamos a tomar $\lfloor 2\frac{b-a}{\delta} \rfloor$ intervalos de tamaño $\frac{\delta}{2}$ (y uno más del tamaño restante para acabar de cubrir $[a,b]$) que particionan $[a,b]$, denotados $\Delta x_i = [x_i - \frac{\delta}{2}, x_i]$ donde $x_i - \frac{\delta}{2} = x_{i-1}$. Entonces consideramos los rectángulos $R_i = \Delta x_i \times [m_i, M_i]$. Claramente contienen a la gráfica, ya que $x \in \Delta x_i \implies m_i \leq f(x) \leq M_i$ al ser mínimo y máximo. Además, por (i) : $\sum_i a(R_i) = \sum_i |\Delta x_i|(M_i - m_i) < \frac{\epsilon}{b-a}\sum_i |\Delta x_i| = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$. □

Proposición 30. *Si $\{A_i\}_1^n$ son finitos conjuntos de área cero, entonces $\bigcup_1^n A_i = A$ también lo es.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para cada A_i, hay $\{R_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ rectángulos que lo recubren y tal que $\sum_{j=1}^{n_i} a(R_{ij}) \leq \frac{\epsilon}{n}$. Entonces, está claro que: $A \in \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_i} R_{ij}$ puesto que cada punto de A está en un A_i recubierto por su familia. Además, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a(R_{ij}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$. □

Teorema 23 (Fubini generalizado)**.** *Sea $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función acotada, continua en casi todo punto de R. Entonces:*

1. $\exists \int_a^b f(x,y)dx \implies \exists \iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$
2. $\exists \int_c^d f(x,y)dy \implies \exists \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$

Esto sigue directamente de la demostración anterior y del lema siguiente:

Lema 4. *Sea $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función acotada, y además continua en casi todo punto de R. Entonces es integrable.*

Demostración. Tenemos que $|f(x,y)| \leq M \ \forall (x,y) \in R$. Sea A la región de área cero donde es discontinua. Sea $\epsilon > 0$. Entonces $\exists \delta > 0$ t.q. $\|(x,y) - (x',y')\| < \delta \implies |f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\epsilon}{2a(R)}$ siempre que $(x,y),(x',y') \in R \backslash A$. Asimismo, $\exists \{R_t\}_{t=1}^l$ t.q. $A \subset \bigcup\limits_{t=1}^{l} R_t$ y $\sum_{t=1}^l a(R_t) \leq \frac{\epsilon}{4M}$.

Ahora, sea $\mathcal{P} = (\{x_i\}_0^k, \{y_j\}_0^l)$ tal que $diam(\mathcal{P}) < \delta$ y que incluya a los $\{R_t\}$, es decir, que $\forall t, i, j$, se tiene $R_{ij} \subset R_t$ o bien $R_{ij} \cap \mathring{R}_t = \emptyset$. Para ello, si algún R_{ij} interseca con algún R_t, basta con refinar la partición subdividiendo el R_{ij} apropiadamente en partes completamente dentro o completamente fuera.

Vamos a probar, finalmente, que para esa partición $\mathcal{P}$ y todas las de diámetro menor, se tiene $(*) = |U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})| < \epsilon$. Veamos que

$$(*) = |\sum_{i,j}(M_{ij} - m_{ij})a(R_{ij})| \leq \sum_{i,j}|M_{ij} - m_{ij}|a(R_{ij}) = \sum_{R_{ij}\cap \mathring{R}_t = \emptyset}|M_{ij} - m_{ij}|a(R_{ij}) + \sum_{R_{ij}\subset R_t}|M_{ij} - m_{ij}|a(R_{ij}) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2a(R)}\sum_{R_{ij}\cap \mathring{R}_t = \emptyset} a(R_{ij}) + 2M\sum_{R_{ij}\subset R_t} a(R_{ij}) \leq \frac{\epsilon}{2a(R)}\sum_{i,j} a(R_{ij}) + 2M\frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$$

donde hemos usado las distintas cotas mostradas al principio de la demostración. □

4.1.2. Integrales dobles sobre regiones más generales

Definición 62. Sea $f : D \subsetneq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada y tal que ∂D es de área cero. Si $D \subset R = [a, b] \times [c, d]$, se define la función de R en $\mathbb{R}$ dada por $f \cdot \chi_D(x, y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \in D \\ 0 \quad si & (x,y) \in R \backslash D \end{cases}$, dado que $\chi_D(x, y)$ es la indicatriz que vale 1 en D y 0 fuera. Observemos que si f es continua, $f \cdot \chi_D$ es integrable en R por el lema 6.

Definición 63. Acorde a lo anterior, se define $\iint_D f(x, y)dA(x, y) = \iint_R f \cdot \chi_D(x, y)dA(x, y)$.

Definición 64 (Región elemental *y-simple*)**.** Una región $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ es **y-simple** si $\exists \varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas tales que:

1. $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \ \forall x \in [a, b]$
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
3. $D \subset [a, b] \times [c, d]$ para algunos $c, d \in \mathbb{R}$.

Definición 65 (Región elemental *x-simple*)**.** Una región $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ es **x-simple** si $\exists \psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas tales que:

1. $\psi_1(y) \leq \psi_2(y) \ \forall y \in [c, d]$
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$
3. $D \subset [a, b] \times [c, d]$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación 18. Ya sea D x-simple o y-simple, se tiene que ∂D es de área cero al ser unión finita de gráficas.

Teorema 24. *Si $f : D \subsetneq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en casi todo punto de D, y D es y-simple o bien x-simple, entonces es integrable y se tiene (manteniendo la notación de las definiciones anteriores):*

- $\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dydx$ *(Si D es y-simple)*
- $\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dxdy$ *(Si D es x-simple)*

Demostración. Por la observación 18 y el lema 6, se tiene que es integrable. Si $R = [a, b] \times [c, d]$ es el rectángulo que contiene la región, aplicando el teorema de Fubini: $\iint_D f(x, y)dA = \iint_R f \cdot \chi_D(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f \cdot \chi_D(x, y)dydx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dydx$ al tenerse que fuera de los límites indicados por las funciones la función vale cero y no aporta a la integral. Análogo si es x-simple. $\square$

Definición 66 (Región simple)**.** Una región $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ es **elemental simple** si es tanto x-simple como y-simple.

Definición 67 (Área de una región y volumen de un cuerpo)**.** Se define el **área** de la región elemental $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ como $A(D) = \iint_D dA$.

Se define el **volumen** del cuerpo debajo de la gráfica de la función $f : D \subsetneq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $V = \iint_D f(x, y)dA$.

Teorema 25 (Valor medio)**.** *Sea $f :_D \subsetneq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en el compacto D. Entonces, $\exists c \in D$ t.q. $A(D)f(c) = \iint_D f(x, y)dA$.*

Demostración. Al ser f continua en un compacto, $\exists m = \min_D f$, $M = \max_D f$, y por lo tanto $mA(D) \leq \iint_D f(x, y)dA \leq MA(D) \implies m \leq \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) \leq M$. Por el teorema de los valores intermedios, $\exists c \in D$ t.q. $f(c) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y)$ ya que la función alcanza todos los valores entre M y m. $\square$

4.2. Integrales triples

4.2.1. Integrales sobre cubos

Definición 68. Una **partición** del cubo $Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, $\mathcal{P} = (\{x_i\}, \{y_j\}, \{z_k\})$ es una colección de tres particiones, cada una de cada intervalo que define el cubo, dando lugar a una colección de cubos disjuntos $Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ de forma que $Q = \bigcup_{i,j,k} Q_{i,j,k}$.

Definición 69. La función $g : Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}$ es **integrable** si $\sup_{\mathcal{P}}\{L(g,\mathcal{P})\} = \text{ínf}_{\mathcal{P}}\{U(g,\mathcal{P})\} = \text{lím}_{diam(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i,j,k} g(c_{ijk})V(Q_{ijk})$, al igual que en dos variables. Dicho valor es la integral y se denota $\iiint_Q g(x,y,z)dV$ Alternativamente, lo será si $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ t.q. si $diam(\mathcal{P}) < \delta$, entonces $|U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P})| < \epsilon$.

Los resultados de integrales dobles se extienden con naturalidad a tres variables:

Teorema 26. *Si $g : Q \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable.*

Teorema 27 (Fubini)**.** *Si $g : Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}$ es continua, se tiene: $\iiint_Q g(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x,y)dzdydx$, valiendo además cualquier otro orden de las integrales simples.*

Proposición 31 (Propiedades de la integral triple)**.** *La integral triple cumple todas las propiedades de la proposición 26 adaptadas a $\mathbb{R}^3$.*

4.2.2. Integrales sobre regiones generales

Definición 70. El conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ es de **volumen cero** si $\forall\epsilon > 0\ \exists\{Q_i\}_i$ cubos tales que $C \subset \bigcup_i Q_i$ y $\sum_i V(Q_i) < \epsilon$.

Definición 71. Sea $f : W \subsetneq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ acotada tal que ∂W es de volumen cero, y con Q el cubo tal que $W \subset Q$. Se define en Q la función $f\chi_W(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & si \quad (x,y,z) \in W \\ 0 \quad si & (x,y,z) \notin W \end{cases}$. Si f es continua en todo W salvo un conjunto de volumen cero, entonces $f\chi_W$ también es continua en casi todo punto y se define:

$$\iiint_W f(x,y,z)dV = \iiint_Q f\chi(x,y,z)dV$$

Ahora presentaremos la generalización natural de la integración en regiones elementales simples:

Definición 72.

- La región $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D_1,\ \phi_1(y,z) \le x \le \phi_2(y,z)\}$ con ϕ_1, ϕ_2 continuas se denomina **x-simple**. Sigue que $\iiint_W f(x,y,z)dV = \iint_{D_1} \int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x,y,z)dxdA$.
- La región $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D_2,\ \phi_1(x,z) \le y \le \phi_2(x,z)\}$ con ϕ_1, ϕ_2 continuas se denomina **y-simple**. Sigue que $\iiint_W f(x,y,z)dV = \iint_{D_2} \int_{\phi_1(x,z)}^{\phi_2(x,z)} f(x,y,z)dydA$.
- La región $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_3,\ \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y)\}$ con ϕ_1, ϕ_2 continuas se denomina **z-simple**. Sigue que $\iiint_W f(x,y,z)dV = \iint_{D_3} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdA$.

Definición 73. El **volumen** de la región W en $\mathbb{R}^3$ se puede calcular como $\iiint_W dV = V(W)$

4.3. Cambio de variables en integrales dobles

Se quiere obtener una manera de poder simplificar el recinto de integración o la función a integrar mediante un cambio de variables. La idea es hallar, en $\mathbb{R}^2$ por ejemplo, una función de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo que, compuesto con la función dada, permita operar sobre nuevas variables e integrar sobre ellas de algún modo.

Definición 74. Un **cambio de variables** en $\mathbb{R}^2$ a la hora de integrar $f : D \subsetneq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ será una aplicación $T : U \to D$ diferenciable y biyectiva. Veremos como relacionar $\iint_U f(T(u,v))dA$ con $\iint_D f(x,y)dA$, la integral a calcular.

Un ejemplo podría ser $T : \{(0,1] \times [0, 2\pi)\} \cup (0,0) \to \bar{B}_1(0,0)$ dada por $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ que se trataría del cambio a polares. De primeras, vemos como el recinto se simplifica a un rectángulo.

Para conseguir relacionar ambas integrales necesitamos ver cómo se deforma el recinto, en particular, como se deforman los rectángulos que particionan el recinto:

Lema 5. *Sea $T : R \subsetneq \mathbb{R}^2 \to D$ dada por $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ una transformación lineal de matriz asociada $\hat{T}$. Se verifica que $a(D) = a(R)|det(\hat{T})|$.*

Demostración. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Ponemos $R = [u_0, u_0+\lambda_1] \times [v_0, v_0+\lambda_2]$. Entonces, como $R = (u_0, v_0) + r\lambda_1 e_1 + s\lambda_2 e_2$ con $r, s \in [0,1]$ se tiene que $D = (T(u_0, v_0) + \lambda_1 T(e_1)s + \lambda_2 T(e_2)t)$ con $t, s \in [0, 1]$. Así, $a(D) = \lambda_1\lambda_2 a(T(e_1), T(e_2))$ donde $(T(e_1), T(e_2))$ es el paralelogramo que delimitan estos vectores. Observemos a continuación que si $\hat{T} = \begin{pmatrix} x(1,0) & x(0,1) \\ y(1,0) & y(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se tiene que $\langle T(e_1), T(e_2)\rangle = (ab + cd)$ y que $\|T_1\|^2 \|T_2\|^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$. Además sea α el ángulo entre T_1 y T_2.

Ahora entonces tenemos que $a(D) = \lambda_1\lambda_2 a(T(e_1), T(e_2)) = \lambda_1\lambda_2(\|T(e_1)\|^2 \|T(e_2)\|^2 (1-\cos^2(\alpha)))^{\frac{1}{2}} = \lambda_1\lambda_2(\|T(e_1)\|^2 \|T(e_2)\|^2 - < T(e_1), T(e_2) >^2))^{\frac{1}{2}} = \lambda_1\lambda_2((a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2))^{\frac{1}{2}} = \lambda_1\lambda_2((ad - bc)^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda_1\lambda_2|det(\hat{T})| = a(R)|det(\hat{T})|$. Hemos usado que el área del paralelogramo es la norma del producto vectorial. □

Proposición 32. *Sea $T : R = [u_0, u_0 + \lambda_1] \times [v_0, v_0 + \lambda_2] \subsetneq \mathbb{R}^2 \to D$ dada por $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ una transformación diferenciable. Se tiene entonces que $a(D) \approx \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u} & \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u} & \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial v} \end{vmatrix} a(R)$, y el error se desvanece cuando $a(R) \approx 0$. Ese determinante se denomina **jacobiano** y es el de la matriz jacobiana de T.*

Demostración. Si $a(R) \approx 0$, se tiene que $T(R) \approx (T(u_0, v_0) + \lambda_1 s\frac{\partial T}{\partial u} + \lambda_2 t\frac{\partial T}{\partial v})$, con $s, t \in [0, 1]$ es decir, el paralelogramo formado por las rectas tangentes a las curvas $T(u_0, v)$ y $T(u, v_0)$ en $T(u_0, v_0)$. Ahora se trata del caso del lema 7. □

Teorema 28 (Cambio de variables)**.** *Sea $T : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \in \mathcal{C}^1$ inyectiva en casi todo punto de U. Si $D = T(U)$ y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable en D, se tiene:*

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_U f(T(u,v))| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} |dA$$

Es decir, se multiplica por el módulo del jacobiano (en (u,v)) para tener en cuenta la deformación en los rectángulos de las particiones.

Observación 19 (Área en polares). Dada una curva $r = g(\theta)$ con $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, el área que delimita esta curva con el origen se puede calcular con $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} g^2(\theta)d\theta$

Demostración. Se tiene que, si D es dicha región, su preimagen por el cambio a polares es $R = [0, g(\theta)] \times [\theta_0, \theta_1]$. Así, $A = \iint_D dA = \iint_R rdA = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_0^{g(\theta)} rdrd\theta$, dado que el jacobiano es r, de donde sale la fórmula. □

4.4. Cambio de variables en integrales triples

Se generaliza con naturalidad lo anterior:

Lema 6. *Sea $T : Q \subsetneq \mathbb{R}^3 \to D$ dada por $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ una transformación lineal de matriz asociada $\hat{T}$. Se verifica que $V(D) = V(Q)|det(\hat{T})|$.*

Proposición 33. *Sea $T : Q \subsetneq \mathbb{R}^3 \to D$ dada por $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ una transformación diferenciable. Se tiene entonces que $V(D) \approx \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} V(R)$, y el error se desvanece cuando $V(R) \approx 0$.*

Teorema 29 (Cambio de variables)**.** *Sea $T : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T \in \mathcal{C}^1$ inyectiva en casi todo punto de U. Si $W = T(U)$ y $f : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es integrable en W, se tiene:*

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \iiint_W f(T(u, v, w))| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} |dV$$

Es decir, se multiplica por el módulo del jacobiano (en (u,v,w)) para tener en cuenta la deformación en los rectángulos de las particiones.

Observación 20 (Jacobianos típicos)*.* Para $\mathbb{R}^2$, el jacobiano del paso a polares $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ vale $JT = r$.

Para $\mathbb{R}^3$, el jacobiano del paso a cilíndricas $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ vale $JT = r$. El jacobiano del paso a esféricas $T(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$ es $JT = -\rho^2 \sin \phi$.

5. Integrales curvilíneas

5.1. Integral de línea de una función escalar

Vamos a considerar integrales sobre una curva C que es la imagen de una parametrización $c(t)$: $[a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. La idea es considerar solo los valores sobre la curva.

Definición 75 (Sumas de Riemann)**.** Dada una partición $\mathcal{P} = \{t_i\}_0^k$, esta define una partición en la curva C, $\{c(t_i)\}_0^n$. Se definen las sumas de Riemann por $S(f, \mathcal{P}) = \sum_1^k f(c(t_i^*)) \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$ con cada $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.

Supongamos ahora que $c \in C^1([a, b])$. Podemos reescribir esto valiéndonos del teorema del valor medio univariable: $S(f, \mathcal{P}) = \sum_1^k f(c(t_i^*)) \|c'(\tilde{t}_i)\| |t_i - t_{i-1}|$

con $\tilde{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Si ahora tomamos el límite cuando el tamaño de la partición tiende a cero, llegamos a la definición de integral de línea:

Definición 76 (Integral de línea)**.** Sea C la curva parametrizada por $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ con $c \in C^1([a, b])$, y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $C \subset U$, y tal que $f \circ c$ es integrable en $[a, b]$. Entonces, su **integral de línea sobre C** es:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\| dt$$

Ahora vamos a comprobar que la integral de línea, a través de esta definición, es la misma independientemente de la parametrización de la curva escogida.

Definición 77. Sea $c_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase C^1 de la curva C, y sea $c_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ otra parametrización C^1 de la misma curva. Se dice que se trata de una **reparametrización** de c_1 si $\exists \alpha : [c, d] \to [a, b]$ biyectiva tal que $c_2 = c_1 \circ \alpha$.

En ese caso, puede **preservar la orientación**, si $\alpha(c) = a$ y $\alpha(d) = b$, es decir, si mantiene los extremos en orden, o bien **revertir la orientación** de la curva si $\alpha(c) = b$ y $\alpha(d) = a$, es decir, si c_2 recorre la curva en sentido contrario a c_1.

Teorema 30. *Sea $c_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, tal que $C = c_1([a, b]) \subset U$, y sea c_2 una reparametrización de c_1. Se tiene que $\int_{c_1} f ds = \int_{c_2} f ds$, es decir, no importa la parametrización tomada.*

Demostración. Supongamos que c_2 preserva la orientación. En ese caso, α es creciente al ser biyectiva. Así, $\int_{c_2} f ds = \int_c^d f(c_2(t)) \|c_2'(t)\| dt = \int_c^d f(c_1(\alpha(t))) \|c_1'(\alpha(t))\| |\alpha'(t)| dt = \int_c^d f(c_1(\alpha(t))) \|c_1'(\alpha(t))\| \alpha'(t) dt = \int_a^b f(c_1(s)) \|c_1'(s)\| ds = \int_{c_1} f ds$.

Si revierte la orientación: $\int_{c_2} f ds = \int_c^d f(c_2(t)) \|c_2'(t)\| dt = \int_c^d f(c_1(\alpha(t))) \|c_1'(\alpha(t))\| |\alpha'(t)| dt = \int_c^d f(c_1(\alpha(t))) \|c_1'(\alpha(t))\| (-\alpha'(t)) dt = \int_b^a f(c_1(s)) \|c_1'(s)\| (-1) ds = \int_a^b f(c_1(s)) \|c_1'(s)\| ds = \int_{c_1} f ds$. □

Observación 21. Si C es C^1 solo a trozos, la integral se puede separar en cada curva y luego sumar todas para hallar la integral sobre el resultado.

Definición 78 (Longitud de arco)**.** La longitud de una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 es la integral de 1 sobre la curva: $L(\gamma) = \int_C ds = \int_a^b \|c'(t)\| dt$

Observación 22 (Interpretación geométrica). La integral de línea de una función en $\mathbb{R}^2$ da el área de la superficie limitada por la curva y la gráfica de la función.

5.2. Integral de línea de un campo vectorial

Definición 79. Sea $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la curva parametrizada de clase C^1 y sea $\vec{F} = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido sobre C. Se define su **integral de línea** sobre C como:

$$\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot c'(t) dt$$

Si $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ y $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, se puede denotar también por $\int_a^b F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + ... + F_n dx_n$, pero el cálculo es el mismo.

También si c es C^1 a trozos, se puede partir en dichos trozos y sumar todas las integrales para hallar la global.

Proposición 34. *Si $c'(t) \neq 0$, entonces $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_C < \vec{F}, \vec{T} > ds$ donde la última es la integral de línea del campo escalar que sale del producto entre los campos F y T, que da el vector tangente unitario a C en cada punto.*

Demostración. $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot T(c(t)) \|c'(t)\|$, dado que $T(c(t)) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$, y sale directamente la integral escalar mencionada. □

Observación 23 (Interpretación geométrica). La integral de línea representa el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{F}$ al mover una partícula a lo largo de la curva c.

Teorema 31. *Sea $c_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tal que $C = c_1([a, b]) \subset U$, y sea c_2 una reparametrización de c_1 a través de α. Se tiene que $\int_{c_1} \vec{F} d\vec{s} = +\int_{c_2} \vec{F} d\vec{s}$ si α preserva la orientación, y $\int_{c_1} \vec{F} d\vec{s} = -\int_{c_2} \vec{F} d\vec{s}$ si la revierte. En este último caso se suele denotar $\int_{c_1} \vec{F} d\vec{s} = +\int_{c_2^-} \vec{F} d\vec{s}$, es decir, es igual a la integral sobre c_2 en sentido contrario.*

Demostración. Si la mantiene: $\int_{c_2} F ds = \int_c^d F(c_2(t))c_2'(t)dt = \int_c^d F(c_1(\alpha(t)))c_1'(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_a^b F(c_1(s))c_1'(s)ds = \int_{c_1} F ds$.

Si la revierte: $\int_{c_2} F ds = \int_c^d F(c_2(t))c_2'(t)dt = \int_c^d F(c_1(\alpha(t)))c_1'(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_b^a F(c_1(s))c_1'(s)ds = -\int_{c_1} F ds$. En ambos casos usamos la regla de la cadena para derivar el vector.

5.3. Teorema de Green

El teorema de Green relaciona en $\mathbb{R}^2$ integrales de línea de campos vectoriales con la integral doble de su rotacional.

Definición 80 (Orientación)**.** Dado $D \subset \mathbb{R}^2$ acotado y cerrado, con $\partial D = C$ la unión finita de curvas **simples y cerradas**, se denomina **orientación positiva o inducida por D** de la(s) curva(s) que compone(n) C como aquella en la que, al recorrer la curva en dicha orientación, en todo momento queda a la izquierda el conjunto D.

Teorema 32 (Green)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ cerrado y acotado, cuya frontera $C = \partial D$ son curvas simples y cerradas parametrizadas en la orientación inducida por D. Sea $F = (P(x, y), Q(x, y)) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con $F \in C^1(D)$. Entonces:*

$$\int_{\partial D} F d\vec{s} = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = \iint_D rot(F) \cdot \hat{k} dA.$$

La integral de línea se lleva a cabo, entonces, en dicha parametrización con la orientación inducida. Para demostrarlo, veamos un lema previo:

Lema 7. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región y-simple descrita por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, cuya frontera ∂D se tiene en la orientación inducida por D. Sea $P : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar con $P \in C^1(D)$. Entonces:*

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{\partial D} (P, 0) d\vec{s} = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Demostración. En este caso, $\partial D = \bigcup_1^4 \Gamma_i$, donde Γ_1, Γ_2 son las partes de las curvas dadas por ϕ_1, ϕ_2 y Γ_3, Γ_4 los segmentos adecuados de $x = a$ y $x = b$, todo en la orientación inducida. Veamos que $\iint \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x)) dx$ por el teorema fundamental del cáculo.

Ahora, veamos las parametrizaciones de la frontera.

Para Γ_1: $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(x) = (x, \phi_1(x))$,

para Γ_2: $\gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(x) = (x, \phi_2(x))$,

para Γ_3: $\gamma_3 : [\phi(a), \phi(b)] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_3(x) = (a, x)$

y para Γ_4: $\gamma_4 : [\phi(a), \phi(b)] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_4(x) = (b, x)$. Cabe observar que Γ_2 y Γ_3 van en la orientación opuesta a la deseada. Por tanto:

$\int_{\partial D} P dx = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} (P, 0) ds = \int_a^b (\vec{P, 0})(x, \phi_1(x)) \cdot (1, \phi_1'(x)) dx - \int_a^b (\vec{P, 0})(x, \phi_2(x)) \cdot (1, \phi_2'(x)) dx + \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} (\vec{P, 0})(a, x) \cdot (0, 1)) dx - \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} (\vec{P, 0})(b, x) \cdot (0, 1)) dx = \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx$

De donde sigue el lema. □

Y su análogo:

Lema 8. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región x-simple descrita por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, cuya frontera ∂D se tiene en la orientación inducida por D. Sea $Q : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar con $Q \in C^1(D)$. Entonces:*

$$\int_{\partial D} Q dy = \int_{\partial D} (0, Q) d\vec{s} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA.$$

Demostración. En este caso, $\partial D = \bigcup_1^4 \Gamma_i$, donde Γ_1, Γ_2 son las partes de las curvas dadas por ψ_1, ψ_2 y Γ_3, Γ_4 los segmentos adecuados de $y = c$ y $y = d$, todo en la orientación inducida. Análogo al lema anterior: $\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dA = \int_c^d Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y) dy$.

Una vez más, las parametrizaciones de la frontera son:

Para Γ_1: $\gamma_1 : [c, d] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(y) = (\psi_1(y), y)$,

para Γ_2: $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(y) = (\psi_2(y), y)$,

para Γ_3: $\gamma_3 : [\psi(c), \psi(d)] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_3(y) = (y, c)$

y para Γ_4: $\gamma_4 : [\psi(c), \psi(d)] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_4(y) = (y, d)$. Ahora están en la orientación inversa γ_1 y γ_4. Entonces, procediendo como antes:

$\int_{\partial D} Q dy = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} (0, Q) ds = \int_c^d (0, \vec{Q})(\psi_2(y), y) \cdot (\psi_2'(y), 1) dy - \int_c^d (0, \vec{Q})(\psi_1(y), y) \cdot (\psi_1'(y), 1) dy = \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy$

De donde sigue el lema. □

Demostración. *(Teorema de Green)*. Si la región a considerar, D, es simple, aplicamos los dos lemas anteriores. Como $(P, Q) \in C^1(D)$ podemos sumar los resultados anteriores y sigue el teorema. Si no, se divide la región D en subregiones simples, y se aplica el lema en cada una de ellas. En cada frontera nueva que esté entre dos subregiones, creada en la división, la integral de línea se tiene en cuenta en un sentido con un signo y en el otro con el opuesto, haciendo que se cancelen y solo quede en el cómputo final la frontera original de D. □

Proposición 35 (Área de una región mediante el teorema de Green.)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada, con frontera $C = \partial D$ curvas finitas simples y cerradas en orientación positiva. Entonces, el cálculo del área se reduce a la integral de línea:*

$$a(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y, x) \vec{ds} = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy.$$

Demostración. Sigue directamente del teorema de Green, al ser $(-y, x) \in C^1(D)$: $\int_{\partial D} -y dx + x dy = \iint_D (1 - (-1)) dA = 2 \iint_D dA = 2a(D)$ □

Del teorema de Green se desprende también el siguiente resultado:

Teorema 33 (Teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^2$)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada, con frontera $C = \partial D$ curvas finitas simples y cerradas en orientación positiva, y sea $F : D \to \mathbb{R}^2$ con $F \in C^1(D)$ un campo vectorial, $F = (P(x, y), Q(x, y))$. Sea $\hat{n}(x, y) : D \to \mathbb{R}^2$ el vector unitario normal a la curva C, dada por $C(t) = (x(t), y(t))$, es decir: $\hat{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|c'(t)\|}$. Entonces:*

$$\int_C F \cdot \hat{n} ds = \iint_D div(F) dA.$$

*Esta integral se conoce como el **flujo** de F a través de la curva.*

Demostración. Se tiene que $\int_C F \cdot \hat{n} ds = \int_a^b P(c(t)) y'(t) - Q(c(t)) x'(t) dt = \int_C (-Q(x, y), P(x, y)) d\vec{s} = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} d\vec{s}$, por el teorema de Green. Para la segunda igualdad se cancela la norma del vector velocidad con la debida al vector unitario. □

5.4. Campos conservativos

Lo siguiente es una generalización del segundo teorema fundamental del cálculo:

Teorema 34. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1$ y $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a trozos, C, sobre U. Entonces:*

$$\int_C \nabla f d\vec{s} = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Demostración. Se tiene que $\int_C \nabla f d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(c(t))c'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(c(t))dt = f(c(b)) - f(c(a))$. □

Observación 24. La integral de línea de un campo conservativo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuo **depende solo de los extremos de la curva**, no del camino llevado a cabo por la curva. Además, si C es una curva clase C^1 **cerrada** y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es conservativo, entonces $\oint_C F d\vec{s} = 0$.

Los siguientes resultados permiten caracterizar cuándo es conservativo un campo:

Definición 81. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es **simplemente conexo** si toda curva en C se puede contraer de forma continua a un punto en C.

Teorema 35. *Sea $F : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (P(x,y), Q(x,y))$ clase C^1 donde C es simplemente conexo. Entonces F es conservativo ($F = \nabla f$, $f \in C^2(C)$) $\iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \iff rot(F) = 0$*

Teorema 36. *Sea U simplemente conexo y $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y)) \in C^1(U)$. Son equivalentes:*

1. *F es conservativo*
2. *$\int_C F\vec{ds}$ no depende del camino seguido por C (solo de los extremos de C) $\forall C \subset U$, $C \in C^1(U)$ a trozos.*
3. *$\oint_C F\vec{ds} = 0$ $\forall C \in C^1(U)$ a trozos, cerrada.*

Demostración. Que (1) $\implies$ (2) ya se ha demostrado. Para el recíproco, pongamos $F = (P, Q)$, supongamos (2) y sea $(x_0, y_0) \in U$ un punto arbitrario. Sea $C(x,y)$ una curva que comienza en (x_0, y_0) y finaliza en (x,y). Denotamos $f(x,y) = \int_{C(x,y)} F d\vec{s} \equiv \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F d\vec{s}$. Sigue que $F = \nabla f$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{(x_0,y_0)}^{(x+h,y)} F d\vec{s} - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F d\vec{s}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} F d\vec{s}}{h}$. Dicha integral de línea no depende del camino que sigamos, por lo que podemos dar el camino $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con $c(t) = (x + th, y)$, y calcular: $\lim_{h\to 0} \frac{\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} F d\vec{s}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 F(x+th,y)\cdot(h,0)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\int_0^1 P(x+th,y)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 P(x+th,y)dt = P(x,y)$, y análogamente se muestra que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$.

Ahora, para (2) $\implies$ (3) no hay nada que probar dado que ya se vio que (1) $\implies$ (3), y para el recíproco, fijamos dos curvas, C_1 y C_2 de clase C^1 a trozos que parten de $A = (x_a, y_a)$ y llegan a $B = (x_b, y_b)$. La curva $C = C_1 \cup C_2^-$ es C^1 a trozos también, entonces, y va de A a A, luego:

$0 = \oint_C F d\vec{s} = \int_{C_1} F\vec{ds} - \int_{C_2} F\vec{ds}$, por lo que coinciden. □

A continuación veremos cómo hallar la función potencial de un campo conservativo:

Observación 25. Dado $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conservativo, $F \in C^1(U)$, con $F = (P(x,y), Q(x,y))$, se puede hallar su potencial $f \in C^2$ mediante antiderivación:

En primer lugar, debe ser que $f(x,y) = \int P(x,y)dx + \gamma(y)$, para que al derivar con respecto a x se obtenga P. Asimismo, debe ser $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx) + \gamma'(y)$, pero como además $Q(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces $Q(x,y) = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx$, se obtiene de lo anterior que $\gamma'(y) = 0$ luego $\gamma(y) = k$, con $k \in \mathbb{R}$ constante cualquiera (vale 0 por ejemplo). Análogamente se puede hacer con la otra variable, es decir, basta con antiderivar una de las coordenadas.

Para dimensiones mayores ($\mathbb{R}^n$) el procedimiento es el mismo: antiderivar la primera coordenada respecto de la primera variable, quedando por averiguar una función γ que depende de las demás, luego derivar lo obtenido respecto a la segunda variable e igualar a la segunda componente del campo, etc. De esta manera se va infiriendo la forma de la función γ hasta conocerla por completo.

Proposición 36 (Principio de Cavalieri). *Sea $\{P_z\}_{z\in[a,b]}$ una colección de planos paralelos de altura z que cortan al sólido $W \subset \mathbb{R}^3$, que queda entre P_a y P_b. Sea A_z el área del recinto $P_z \cap W$. Entonces $Vol(W) = \int_a^b A(z)dz$.*

6. Integrales de superficie

Recordemos que una superficie se puede representar por un conjunto de nivel, una gráfica o bien una parametrización. Para esta sección nos interesa esta última forma.

6.1. Integral de superficie de funciones escalares

Definición 82. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie en el espacio de clase C^1 dada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ($\Phi \in C^1(D)$, inyectiva en casi todo punto), y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua en S. Se define la **integral de superficie** de f en S por:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \left\| \vec{T_u}(u,v) \times \vec{T_v}(u,v) \right\| dA(u,v).$$

Es decir, la integral de la función en la superficie por la norma del vector normal. Recordemos que $\vec{T_u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ y $\vec{T_v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

Observación 26. Al igual que en integrales de línea, se demuestra directamente que el resultado de la integral no depende de la parametrización de la superficie.

Definición 83 (Área de una superficie)**.** Se define el **área** de una superficie S en $\mathbb{R}^3$, dada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi \in C^1(D)$ inyectiva en casi todo punto, por $a(S) = \iint_S dS = \iint_D \vec{N}(u,v) dA$, donde $\vec{N}$ es el vector normal.

Observación 27. Si S es la gráfica de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, entonces, como $\vec{N}(x,y) = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$ si se toma la parametrización $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, entonces el área queda $a(G(f)) = \iint_D [\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1}] dA$

6.2. Integral de superficie de campos vectoriales

Definición 84. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie en el espacio de clase C^1 dada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ($\Phi \in C^1(D)$, inyectiva en casi todo punto), y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua en S. Se define la **integral de superficie** de $\vec{F}$ en S por:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\Phi(u,v)) \cdot (\vec{T_u}(u,v) \times \vec{T_v}(u,v)) dA(u,v).$$

Es decir, la integral de la función en la superficie en producto escalar con el vector normal. También se conoce como **flujo de $\vec{F}$ a través de** S.

Observación 28. Por el mismo razonamiento que en integrales de línea, si $\vec{n}(x,y,z)$ es el vector unitario normal a S en el punto (x,y,z) de la parametrización, entonces $\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$.

Observación 29. Al igual que en integrales de línea, se demuestra directamente que el resultado de la integral no depende de la parametrización de la superficie, salvo cambio de signo si la parametrización revierte la orientación anterior (el vector normal cambia de sentido).

6.3. Teorema de Gauss. Teorema de Stokes.

Los teoremas de Gauss y Stokes generalizan el de Green, relacionando integrales de superficie con integrales triples (Gauss) o con integrales de línea (Stokes). El primero, se demostró en $\mathbb{R}^2$ en la sección anterior, y para $\mathbb{R}^3$ queda de la forma:

Teorema 37 (de Gauss o de la Divergencia)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *acotada, de borde* $\partial\Omega$ *una superficie cerrada. Sea* $\hat{n}$ *el vector normal unitario exterior a* $\partial\Omega$*, y* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo* $F \in C^1(\Omega)$ *(en casi todo punto). Entonces:*

$$\iint_{\partial\Omega} F d\vec{S} = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_{\Omega} div(F) dV.$$

Teorema 38 (de Stokes o del Rotacional)**.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie de frontera la curva* ∂S*, y sea* $\vec{F} \in C^1(S)$ *(en casi todo punto). Si la superficie* $\Phi : D \to S$ *y la curva están parametrizadas de manera que, visto desde la cara positiva (de la que parte el vector normal), la curva se recorre en sentido positivo, o lo que es lo mismo,* ∂S *es* $\Phi(\partial D)$ *y* ∂D *cumple las condiciones del teorema de Green (unión finita de curvas simples cerradas de orientación positiva), entonces se tiene:*

$$\iint_S rot(\vec{F}) d\vec{S} = \iint_S rot(\vec{F}) \hat{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{s}.$$