Geometría de Curvas y Superficies

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com
miguelgg.com

Mayo de 2020

$$\mathbf{X}_{uu} - \mathbf{X}_{vv} - \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv} = -\frac{1}{4}\left(\frac{E_u G_u + E_v^2}{2} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{2}\right) + (eg - f^2)$$

Revisado en 2022
Apuntes de la asignatura impartida por José Luis Fernández
en la Universidad Autónoma de Madrid en Mayo de 2020.

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Geometría de Curvas y Superficies del grado en matemáticas, tomados en Mayo de 2020 por Miguel González. La asignatura fue impartida por José Luis Fernández. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Geometría de Curvas y Superficies

Esta asignatura está dedicada al estudio de las *curvas* y las *superficies*, y es uno de los primeros pasos que se adentran en la geometría diferencial. Estas curvas y superficies son espacios de dimensión uno y dos, en un espacio euclídeo (en este documento, real), de los cuales se definen y estudian propiedades como curvatura, torsión o regularidad.

Uno de los resultados más importantes que se tratan es el Teorema Egregio, que muestra que la curvatura gaussiana es intrínseca a la superficie, es decir, no depende de cómo esté inmersa en el espacio euclídeo.

Requisitos previos

1. Familiaridad con la notación matemática básica.
2. Conocimientos de álgebra lineal.
3. Conocimientos de cálculo en una y varias variables (Cálculo I y II).
4. Puede ser conveniente estar familiarizado con algunas definiciones de geometría diferencial (como las introducidas en los apuntes de Análisis Matemático), aunque no es necesario.

Índice

1. Curvas

Definición 1. Una **curva** es una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I)$, donde I es un intervalo abierto (que puede ser infinito tanto por la izquierda como por la derecha). Se denota comúnmente $\gamma(t) = x(t), y(t), z(t))$.

Definición 2. La **traza** de una curva es el conjunto de puntos $\{\gamma(t) : t \in I\}$, es decir, su imagen. Se dice que γ es una parametrización de dicha traza.

Se observa que con curva nos referimos a la función en sí, es decir a la manera de describir la traza. Por ejemplo, para $t \in \mathbb{R}$, las curvas $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ y $\eta(t) = (t^3, t^6, t^9)$ describen la misma traza, pero lo hacen de maneras distintas y con distinta velocidad.

Definición 3. La **velocidad** de la curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ en tiempo t es $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Su **rapidez** es $\|\gamma'(t)\|$.

A continuación veremos algunos ejemplos interesantes:

Observación 1 (Gráfica de función)*.* Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ que es $\mathcal{C}^\infty$, la gráfica $G = \{(x, f(x), 0) : x \in I\}$ es traza de una curva que viene dada por $\gamma(t) = (t, f(t), 0)$.

Observación 2 (Curva de gráfica no regular)*.* Consideremos la gráfica $G = \{(x, |x|, 0) : x \in (-1, 1)\}$. Es la gráfica de una función no diferenciable, que es $f(x) = |x|$. Sin embargo, existe una curva (por tanto $\mathcal{C}^\infty$) cuya traza es precisamente G. La idea radica en que si estableciésemos $g(t) = (t, |t|, 0)$, la velocidad cambia bruscamente al pasar de antes del 0 a después del 0, evitando la derivabilidad. Por tanto, en lugar de recorrerla con velocidad constante, lo haremos de tal manera que la rapidez decrezca suavemente (pero de manera rápida) al aproximarse al cero y posteriormente vaya aumentando de nuevo. Definimos en todo $\mathbb{R}$:

$$\omega(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \\ -e^{-\frac{1}{t^2}} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Esta función es $\mathcal{C}^\infty$, $\omega^{(k)}(0) = 0$ siempre, y tiene límite -1 por la izquierda y 1 por la derecha. Asimismo, $|\omega(t)|$ también es $\mathcal{C}^\infty$ dado que vale $e^{-\frac{1}{t^2}}$ fuera del 0 y 0 en caso contrario, de tal modo que un cálculo como el anterior indica que también tiene todas las derivadas y valen 0. Por lo tanto, $\gamma(t) = (\omega(t), |\omega(t)|, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$, es la curva buscada, y es posible dado que va *modulando* la rapidez para no cambiar bruscamente al pasar por 0.

Observación 3 (Cicloide)*.* Consideramos un círculo unidad en el plano XY situado sobre el eje X de tal modo que lo toca en $(0, 0)$. Supongamos que el círculo rueda hacia la derecha de tal manera que el centro (inicialmente en $(0, 1)$) se desplaza con una velocidad de 1. Es decir, describe la trayectoria $c(t) = (t, 1)$. Si fijamos el punto de la circunferencia que comenzaba en $(0, 0)$, la trayectoria que describe se denomina **cicloide**. Tras t unidades de tiempo, ha descrito un arco de t radianes desde la posición inicial, que es $-\frac{\pi}{2}$ desde la horizontal. Por tanto, la curva está dada por:

$$\gamma(t) = (t, 1) + (\cos(-\frac{\pi}{2} - t), \sin(-\frac{\pi}{2} - t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Su velocidad es $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, que se anula cada 2π unidades de tiempo.

Los dos ejemplos anteriores muestran *picos* en su traza pese a ser curvas $\mathcal{C}^\infty$. Ese comportamiento es el que motiva la siguiente definición:

Definición 4. La curva γ de dominio (a, b) es **regular** si $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a, b)$.

Observación 4. Consideremos la gráfica $G = \{(x, |x|, 0) : x \in (-1, 1)\}$. Ya hemos visto una curva no regular que la describe. Vamos a argumentar que no hay ninguna curva regular que lo haga. Supongamos que $\gamma = (x, y, z)$ es tal curva y desplazamos su parámetro para que esté definida en 0 y $\gamma(0) = 0$. Como $y(t) = |x(t)| \geq 0$, entonces en 0 hay un mínimo y por tanto $y'(0) = 0$, de donde sigue que $x'(0) \neq 0$ por regularidad. Supongamos $x'(0) > 0$ siendo análogo en caso contrario. Por continuidad de x' sigue que $\exists\delta > 0$ tal que x es estrictamente creciente en $(-\delta, \delta)$, y por tanto $x(t) > 0$ en $(0, \delta)$. De aquí sigue que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in (0, \delta)$, y por tanto $x'(0^+) = y'(0^+) = 0$, de donde $x'(0) = 0$, lo que contradice lo supuesto.

Definición 5. Sea γ una curva regular. La **recta tangente** en $\gamma(t_0)$ a la curva está dada por $\eta(u) = \gamma(t_0) + u\gamma'(t_0)$, con $u \in \mathbb{R}$.

A continuación vamos a tratar de definir una noción de *longitud* para una curva. Sabemos que si tenemos el segmento $\overline{AB}$, su longitud tiene sentido definirla por $\|B - A\|$. Asimismo, dada una poligonal formada por segmentos consecutivos uniendo los puntos $\{a_1, \dots, a_n\}$, tiene sentido que su longitud sea $\sum_{i=2}^{n} \|a_i - a_{i-1}\|$. Para definir la longitud en curvas arbitrarias, crearemos poligonales cada vez más finas sobre la curva y el límite de las longitudes será el valor buscado.

Definición 6. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ una curva. Sean $t_0, t_1 \in (a, b)$. Denotamos $P(a_1, \dots, a_n)$ la longitud de la poligonal que se obtiene al unir los puntos consecutivos de $a_1, \dots, a_n$. Se define la **longitud de la curva entre t_0 y t_1** por:

$$L(\gamma, t_0, t_1) = \sup_{\mathcal{P}} P(\gamma(u_0), \dots, \gamma(u_n))$$

Donde $\mathcal{P} = \{u_0, \dots, u_n\}$ es cualquiera tal que $u_0 = t_0$, $u_n = t_1$ y $u_i < u_{i+1}$.

Este concepto de longitud es válido para cualquier función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, no necesariamente curvas suaves. En el caso de que tengan derivada continua, tenemos el siguiente método práctico para calcular la longitud:

Proposición 1. *Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ con $t_0, t_1 \in (a, b)$. Se tiene que $L(\gamma, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|\, dt$.*

Demostración. Necesitaremos dos resultados previos:

Lema 1. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\|\alpha\| = \sup_{\|\beta\|=1}\{\langle \alpha, \beta \rangle\}$.*

Demostración del lema. Si $\alpha = 0$ es inmediato. En caso contrario, sabemos que si $\beta \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \|\alpha\|$ aplicando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*. Además satura cuando $\beta = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$, luego ese supremo es de hecho un máximo y vale $\|\alpha\|$. □

Lema 2. *Sea $v : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ continuo. Definimos $\int_a^b v(t)dt = (\int_a^b v_1(t)dt, \int_a^b v_2(t)dt, \int_a^b v_3(t)dt)$. Entonces se tiene que $\left\| \int_a^b v(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\|\, dt$.*

Demostración del lema. Si $\alpha = \int_a^b v(t)dt$, y $\beta \in \mathbb{S}^2$, tenemos, atendiendo a la definición, que $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_a^b \langle v(t), \beta \rangle\, dt \leq \int_a^b \|v(t)\|\, dt$. Sigue por el lema previo que $\|\alpha\| \leq \int_a^b \|v(t)\|\, dt$, como se quería. □

A continuación denotamos $S = \sup_{\mathcal{P}} P(\gamma(u_0), \dots, \gamma(u_n))$ e $I = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|\, dt$. Lo que queremos probar es que son iguales. Damos la partición $\mathcal{P} = \{t_0 = s_0, s_1, \dots, s_n = t_1\}$. Entonces $P(\gamma(s_0), \dots, \gamma(s_n)) = \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u)du \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \|\gamma'(u)du\| = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(u)\|\, du$. Por tanto sigue que $S \leq I$.

Ahora sea $\epsilon > 0$. Como $\gamma' \in \mathcal{C}^0([t_0, t_1])$, se tiene que es uniformemente continua. Por tanto, sea $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [t_0, t_1]$, $|x - y| < \delta$, se tiene $\|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| < \epsilon$. Tomamos la partición $\mathcal{P} = \{t_0 =$

$s_0, s_1, \ldots, s_n = t_n\}$ de tal modo que $|s_j - s_{j-1}| < \delta$. Además sea $u_j = \underset{u \in [s_{j-1}, s_j]}{\arg\max}\{\|\gamma'(u)\|\}$. Sea P la poligonal que une los puntos $\gamma(s_j)$ consecutivos.

Con todo esto, observemos que $S \geq L(P) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})\| = \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(t)dt\right\| = \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j)dt - \int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j) - \gamma'(t)dt\right\| \geq \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j)dt\right\| - \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j) - \gamma'(t)dt\right\| \geq \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j)dt\right\| - \int_{s_{j-1}}^{s_j} \|\gamma'(u_j) - \gamma'(t)\| \, dt \geq \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j)dt\right\| - \int_{s_{j-1}}^{s_j} \epsilon dt = \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j)dt\right\| - \epsilon(s_j - s_{j-1}) = -\epsilon(t_1 - t_0) + \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(u_j)dt\right\| \geq -\epsilon(t_1 - t_0) + \sum_{j=1}^n \left\|\int_{s_{j-1}}^{s_j} \gamma'(t)dt\right\| = -\epsilon(t_1 - t_0) + I$.

Como ϵ era arbitrario sigue por tanto que $S \geq I$ y hemos acabado. □

Corolario. Para calcular la longitud de arco de una gráfica $(x, f(x))$ con $f \in \mathcal{C}^\infty$, la curva correspondiente es $\gamma(t) = (t, f(t))$ y por tanto la longitud entre dos puntos x_0 y x_1 es $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

Definición 7. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$. Una **reparametrización** es un $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfismo $h : (c, d) \to (a, b)$. Da lugar a la curva reparametrizada $\eta = \gamma \circ h$.

Proposición 2. *Si η es reparametrización de γ (con $\eta = \gamma \circ h$ como en la definición), se tiene:*

1. *γ es reparametrización de η.*
2. *$\eta'(t) = \gamma'(h(t))h'(t)$.*
3. *η es regular $\iff$ γ es regular.*
4. *Si $c', d' \in (c, d)$ $h(c') = a'$ y $h(d') = b'$, entonces la longitud de arco de η entre c' y d' es la misma que la de γ entre a' y b'.*
5. *h es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. En el primer caso se dice que η recorre la traza en el mismo sentido que γ, y en el segundo caso, que lo hace en sentido contrario.*

Demostración. 1 se tiene porque $\gamma = \eta \circ h^{-1}$. 2 se tiene por la regla de la cadena. 3 se tiene porque $\|\eta'(t)\| = \|\gamma'(h(t))\| \, |h'(t)|$, y $|h'(t)| \neq 0$ por ser h difeomorfismo. 4 se tiene porque la longitud de arco es el supremo de las longitudes de las poligonales sobre la traza entre $\gamma(a') = \eta(c')$ y $\gamma(b') = \eta(d')$, luego son las mismas poligonales y el mismo supremo en cada caso. Se puede comprobar que la integral del teorema para calcular longitudes de arco también coincide. 5 sigue de que como h es un difeomorfismo, $h' \neq 0$ y por continuidad debe darse que $h' > 0$ siempre o que $h' < 0$ siempre. □

De entre todas las parametrizaciones de una traza, hay una que destaca:

Definición 8. Se dice que $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ está **parametrizada por longitud de arco** si $\forall s_1, s_2 \in (a, b)$, $s_1 < s_2$, se tiene que $L(\gamma, s_1, s_2) = s_2 - s_1$. Es decir, que la longitud que recorre el parámetro en el espacio de partida es la longitud de arco que recorre la curva.

Proposición 3. *La curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada por longitud de arco $\iff$ $\|\gamma'(t)\| = 1$ $\forall t \in (a, b)$.*

Demostración. $\Longleftarrow$ es evidente porque $L(\gamma, s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{s_1}^{s_2} 1dt = s_2 - s_1$. Para $\Longrightarrow$, sea $s \in (a, b)$. Tenemos para $t > s$ que $t - s = \int_s^t \|\gamma'(u)\| \, du$, por lo que $1 = \frac{1}{t-s} \int_s^t \|\gamma'(u)\| \, du$ y entonces $1 = \lim_{t \to s^+} 1 = \lim_{t \to s^+} \frac{1}{t-s} \int_s^t \|\gamma'(u)\| \, du = \frac{d}{dt}(\int_s^t \|\gamma'(u)\| \, du)(s) = \|\gamma'(s)\|$, donde hemos usado la definición de derivada y el teorema fundamental del cálculo. □

Teorema 1. *Dada* $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una curva regular cualquiera, entonces* $\exists h : (c, d) \to (a, b)$ *tal que* $\gamma \circ h$ *está parametrizada por longitud de arco. Es decir, toda curva se puede reparametrizar por longitud de arco.*

Demostración. Vamos a fijar un $t_0 \in (a, b)$ y vamos a hacer que el 0 vaya al t_0 a través de la reparametrización, y después cada punto s irá al $t \in (a, b)$ tal que $L(\gamma, t_0, t) = s$. De esta manera la longitud entre dos puntos s_1 y s_2 en la reparametrización será $L(\eta, s_1, s_2) = L(\gamma, h(s_1), h(0) = t_0) + L(\gamma, h(0) = t_0, h(s_2)) = -s_1 + s_2$ como se quiere. Para ello sea $g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du$, que es difeomorfismo al tenerse $g'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$ por ser γ regular, y entonces pondremos $h(t) = g^{-1}(t)$. Se comprueba entonces que $\eta = \gamma \circ h$ verifica $\|\eta'(s)\| = \|\gamma'(h(s))\|\, |h'(s)| = \|\gamma'(h(s))\| \frac{1}{g'(h(s))} = \frac{\|\gamma'(h(s))\|}{\|\gamma'(h(s))\|} = 1$ como se quería. $\square$

Cuando sea posible de manera explícita, el procedimiento descrito en esa demostración es el que se sigue para obtener la reparametrización.

1.1. Curvatura. Torsión. Triedro de Frenet.

Definición 9 (Vector tangente)**.** Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Se define el **vector tangente** como $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$, que es unitario y tangente a la traza.

Este vector unitario puede dar una idea de lo *curvada* que es la curva. Cuanto menos cambie este vector, menos curvada es la curva y más se aproxima a una recta. Es decir:

Definición 10. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Se define la **curvatura** como $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$.

Observación 5. Una recta, $\gamma(s) = p + sv$ con $v \in \mathbb{S}^2$ y $p \in \mathbb{R}^3$, tiene vector tangente $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s) = v$ y curvatura $\|\mathbf{t}'(s)\| = \|0\| = 0$. El recíproco es cierto: si se cumple que $\kappa(s) = 0$, entonces es porque $\mathbf{t}'(s) = 0 \implies \mathbf{t}(s) = v$ con v unitario por ser vector tangente, y entonces $\gamma(s) = p + sv$.

Observación 6. El círculo de radio R, que se parametriza por longitud de arco mediante $\gamma(t) = (R\cos(\frac{t}{R}), R\sin(\frac{t}{R}), 0)$, verifica que $\kappa(t) = \frac{1}{R}$. Es decir, tiene curvatura constante y menor cuanto mayor sea el radio.

Observemos que como $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$, eso quiere decir que $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$ en todo s, y, derivando, se obtiene que $2\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0 \implies \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$. Es decir, $\mathbf{t}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$. Por tanto:

Definición 11. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular (ni γ' ni γ'' se anulan) parametrizada por longitud de arco. Se define el **vector normal** como $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$.

Con un vector más, podemos construir un sistema de referencia ortonormal en cada punto de la curva:

Definición 12. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Se define el **vector binormal** como $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.

Definición 13. El conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ se denomina **triedro de Frenet** de la curva.

Definición 14. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Se define el **plano osculador** como el que pasa por $\gamma(s)$ y está generado por $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$, el **plano normal** como el que pasa por $\gamma(s)$ y está generado por $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$, y el **plano rectificante** como el que pasa por $\gamma(s)$ y está generado por $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{t}(s)$.

El plano osculador tiene importancia porque, si la curva es plana (habita dentro de un plano), los vectores tangente y normal permanecen en dicho plano, y el osculador no varía. En general, cuanto *más plana* sea la curva, menos varía el plano osculador. Como dicho plano es por definición ortogonal a $\mathbf{b}(s)$, podemos tratar de definir una medida de lo *plana* que es la curva, a través de cuánto varía en dirección.

Para ello, observemos que $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \times n(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s)$ al ser los primeros paralelos. Esto indica que es perpendicular a $\mathbf{t}(s)$, y además como $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$, sigue que $\mathbf{b'} \cdot \mathbf{b} = 0$. En definitiva, $\mathbf{b}'$ es perpendicular tanto a $\mathbf{t}$ como a $\mathbf{b}$, por lo que es paralelo a $\mathbf{n}$. Esto permite dar una idea de cuán plana es la curva, teniendo además en cuenta un cierto signo (cosa que no ocurriría si hubiésemos tomado simplemente $\|\mathbf{b}'\|$).

Definición 15. Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Se define la **torsión** en s como el $\tau(s)$ que verifica $\tau(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}'(s)$. Multiplicando por $\mathbf{n}(s)$, sigue que $\tau(s) = \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)$. Se observa además que $\|\mathbf{b}'(s)\| = |\tau(s)|$.

Proposición 4. *Una curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ tiene torsión nula $\iff$ $\gamma(s) \in \pi\ \forall s$, para cierto plano π.*

Demostración. Si γ está en π, entonces también lo está $\gamma' = \mathbf{t}$ y por tanto $\mathbf{t}'$ así como $\mathbf{n}$, dado que al ser un espacio vectorial, la resta de dos puntos que se calcula para la derivada sigue estando en el plano. Por tanto $\mathbf{b} \perp \pi$ y de tamaño 1 $\forall s$, luego es constante y $\mathbf{b}' = 0$. Recíprocamente, si $\tau \equiv 0$, es porque $\mathbf{b}$ es constante. Si fijamos $s_0 \in (a,b)$, tenemos que si $\psi(s) := (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \mathbf{b}$, entonces $\psi'(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b} = 0$ al ser ortogonales (hemos usado que $\mathbf{b}$ es constante para la derivada). Entonces $\psi(s) = \psi(s_0) = 0$ y por tanto $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \mathbf{b} = 0\ \forall s \in (a,b)$, lo que define el plano ortogonal a $\mathbf{b}$ que pasa por $\gamma(s_0)$. $\square$

Proposición 5 (Fórmulas de Frenet)**.** *En una curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ se tiene en todo punto lo siguiente:*

1. $\boldsymbol{t}' = \kappa \boldsymbol{n}$
2. $\boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{t} - \tau \boldsymbol{b}$
3. $\boldsymbol{b}' = \tau \boldsymbol{n}$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Demostración. Usaremos que si f, g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $f \cdot g = k$ con k constante en todo punto, entonces $f'g = -g'f$ en todo punto (se obtiene derivando la condición). Las proposiciones 1 y 3 son por definición. Para la 2, escribamos $\mathbf{n}' = x\mathbf{t} + y\mathbf{n} + z\mathbf{b}$ con x, y, z funciones sobre $\mathbb{R}$. Podemos hacerlo porque forman base ortonormal. Tomando productos escalares, tenemos que $y = \mathbf{n}\mathbf{n}' = 0$, que $x = \mathbf{t}\mathbf{n}' = -\mathbf{t}'\mathbf{n} = -\kappa$ y que $z = \mathbf{b}\mathbf{n}' = -\mathbf{b}'\mathbf{n} = -\tau$, como se quería. $\square$

Cabe observar que cualquier triedro $\{P, Q, R\}$ sobre la curva (base ortonormal en cada punto, con P, Q, R funciones suaves) verifica esas relaciones para cierta matriz antisimétrica $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, dado que como $P \cdot P = Q \cdot Q = R \cdot R = 1$, también se tiene que $P \cdot P' = Q \cdot Q' = R \cdot R' = 0$, y luego como $A \cdot B = 0$ para $A, B \in \{P, Q, R\}$ distintos, entonces $A \cdot B' = -A' \cdot B$. La ventaja del triedro de Frenet es que solo hay 2 funciones escalares a tener en cuenta, en lugar de 3 como ocurriría para cualquier triedro general.

A continuación queremos obtener ecuaciones para el triedro, la curvatura y la torsión, sin emplear la parametrización por longitud de arco. Dada una curva regular $\gamma(t)$, vamos a denotar $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot\gamma(u)\|\, du$ el parámetro de longitud de arco y $\eta(s) = \gamma(t(s))$ la parametrización por longitud de arco (y por tanto $\gamma(t) = \eta(s(t))$). Obsérvese también que en adelante reservaremos $\gamma'(s)$ para derivar con respecto a s el parámetro longitud de arco, y $\dot\gamma(t)$ para derivar una curva respecto a un parámetro general.

Proposición 6. *Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Se tiene:*

1. $\kappa(t) = \frac{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}$
2. $\tau(t) = -\frac{(\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t))\cdot\dddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|^2}$
3. $\boldsymbol{t}(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}$
4. $\boldsymbol{b}(t) = \frac{\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|}$
5. $\boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{t}(t)$

Demostración. Escribimos $\gamma(t) = \eta(s(t))$ donde η es la parametrizada por longitud de arco. Tenemos que $\dot\gamma(t) = \eta'(s(t))\dot s(t) = \mathbf{t}(t)\,\|\dot\gamma(t)\|$, lo que da lugar a 3. Hemos usado que $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot\gamma(u)\|\,du$ para la derivada. Con la regla del producto una vez más, se tiene que $\ddot\gamma(t) = \eta''(s(t))\dot s(t)^2 + \ddot s\eta'(s(t)) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)\dot s(t)^2 + \ddot s\mathbf{t}$, de donde $(\mathbf{t}\dot s(t))\times\ddot\gamma(t) = \dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t) = \kappa\dot s(t)^3\mathbf{b}(t)$. Tomando norma y despejando se obtiene la expresión 1, y despejando $\mathbf{b}(t)$ sin tomar norma y sustituyendo la expresión 1 para κ, se obtiene la expresión 4. La expresión 5 es por definición. Para la expresión restante, que es la 2, queremos obtener $\dddot\gamma(t) = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{t} + \epsilon\mathbf{n}$. Derivando γ e ignorando todos los términos que acaban en β o ϵ, se llega a que $\alpha = -\tau\kappa\dot s(t)^3$. De aquí sigue que $(\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t))\cdot\dddot\gamma(t) = -\tau\kappa^2\dot s(t)^6$, y despejando se llega a 2. □

1.2. Curvas planas

En curvas planas podemos asignar un signo a la curvatura, que nos indicará si se curva hacia la derecha (signo negativo) o hacia la izquierda (signo positivo) según el sentido de la marcha. Para ello calcularemos el vector normal a $\mathbf{t}$ rotándolo $\frac{\pi}{2}$ en sentido positivo (antihorario), y veremos cómo se relaciona con $\mathbf{t}'$.

Definición 16. Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2\times\{0\}$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Definimos para el vector (a,b), su normal en sentido positivo, $(a,b)^\perp = (-b,a)$. Se define la curvatura con signo, $\hat\kappa$, como el escalar tal que $\mathbf{t}'(s) = \hat\kappa(s)\mathbf{t}^\perp(s)$. Observamos tomando normas a ambos lados que $k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = |\hat\kappa(s)|$.

Como $\|\mathbf{t}(s)\| = \left\|\mathbf{t}^\perp(s)\right\| = 1$, podemos escribir $\mathbf{t}(s) = (\cos(\theta(s)),\sin(\theta(s)))$ para cierta $\theta(s)\in\mathcal{C}^\infty$. La idea es que si $\mathbf{t}(s) = (x(s),y(s))$, definir $\theta = \int_{s_0}^s x'(u)y(u) - y'(u)x(u)du + \theta_{s_0}$, donde θ_{s_0} es tal que $x(s_0) = \cos\theta_{s_0}$ e $y(s_0) = \sin\theta_{s_0}$. Es rutinario comprobar que esta $\theta(s)$ satisface que $(x(s)-\cos\theta(s))^2 + (y(s)-\sin\theta(s))^2 \equiv 0$, garantizando la igualdad. Es decir, el vector tangente se mueve de manera suave por $\mathbf{S}^1$. Con esta observación, se tiene el siguiente resultado que relaciona esa manera de moverse con la curvatura signada:

Proposición 7. *Sea $\gamma : (a,b)\to\mathbb{R}^2\times\{0\}$ una curva regular parametrizada por longitud de arco, y sea $\boldsymbol{t}(s) = (\cos(\theta(s)),\sin(\theta(s)))$. Se tiene que $\theta'(s) = \hat\kappa(s)$.*

Demostración. Tenemos que $\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s)\sin(\theta(s)),\theta'(s)\cos(\theta(s))) = \theta'(s)(-\sin\theta(s),\cos\theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{t}^\perp(s)$. □

De esto se deduce que $\hat\kappa$ indica cómo va variando el vector tangente según se recorre la curva. Es decir, nos indica, partiendo de un inicio y en una dirección, cómo recorrerla. De esto se deduce lo siguiente:

Proposición 8. *Dada una curvatura $\hat\kappa$, un punto inicial (p_0,q_0) y una dirección incial $\boldsymbol{t}_0$, queda unívocamente determinada la curva con dicha curvatura y dicha dirección inicial en ese punto.*

Demostración. Tenemos que $\theta(s) = \int \theta' + C = \int \hat{\kappa} + C$, lo que indica que $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$, de donde $\gamma = (\int \cos(\int \hat{\kappa} + C) + p_0, \int \sin(\int \hat{\kappa} + C) + q_0)$. Las constantes de integración p_0 y q_0 determinan el punto inicial por el que pasa la curva, y la C determina el ángulo inicial de $\mathbf{t}$, como queríamos. $\square$

Se deduce por tanto que dos curvas de igual curvatura $\hat{\kappa}$ son iguales salvo rotación y traslación.

Proposición 9. *Si $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ es una curva regular (no necesariamente por longitud de arco), se tiene que $\hat{\kappa}(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot (0,0,1)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$.*

Demostración. De los cálculos realizados en la demostración de la proposición 6 tenemos que $\ddot{\gamma}(t) = \eta''(s(t))\dot{s}(t)^2 + \ddot{s}\eta'(s(t)) = \hat{\kappa}(s)\mathbf{t}^{\perp}(s)\dot{s}^2 + \mathbf{t}(s)\ddot{s}$. De aquí sigue que $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \hat{\kappa}(s(t))\dot{s}^3(t) \cdot (0, 0, 1)$, como queríamos. $\square$

Observación 7 (Comparación de ángulo y longitud)*.* Se quiere comparar cómo varía el ángulo de la curva (el de $\mathbf{t}$), frente a variaciones de longitud en el espacio de partida. Si la parametrizamos por longitud de arco, eso es $\frac{\theta(s_2)-\theta(s_1)}{s_2-s_1}$, entre puntos s_1 y s_2. Si $s_2 \to s_1$, esa variación es $\theta'(s_1) = \hat{\kappa}(s_1)$. Por lo tanto, la curvatura signada será mayor cuanto más varíe el ángulo por desplazamiento en la longitud, como es lógico. Esta noción se llevará posteriormente a la definición de curvatura en superficies.

1.3. Forma canónica local

Dada una curva por longitud de arco, $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$, podemos escribir su representación de taylor: $\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{\gamma''(0)s^2}{2} + \gamma'''(0)\frac{s^3}{6} + E(s)$, con $E(s) = o(s^3)$. Sabemos además que $\gamma'(0) = \mathbf{t}(0)$, que $\gamma''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0)$ y que $\gamma'''(0) = \kappa'(0)\mathbf{n}(0) + \kappa(0)\mathbf{n}'(0) = \kappa'(0)\mathbf{n}(0) - \kappa^2(0)\mathbf{t}(0) - \tau(0)\kappa(0)\mathbf{b}(0)$. Esto da lugar a :

Definición 17. La **forma canónica local** de la curva γ parametrizada por longitud de arco es:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + (s - \frac{s^3}{6}\kappa^2(0))\mathbf{t}(0) + (\frac{s^2}{2}\kappa(0) + \frac{s^3}{6}\kappa'(0))\mathbf{n}(0) + (-\kappa(0)\tau(0)\frac{s^3}{6})\mathbf{b}(0) + E(s).$$

La mejor forma de visualizar esta ecuación y las consecuencias que siguen, es transformarla con un movimiento rígido que lleve $\gamma(0)$ al $(0, 0, 0)$ y $\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)$ a la base canónica.

Observación 8*.* La forma canónica local da lugar a la siguiente estimación de primer orden: $\gamma(s) \approx s\mathbf{t}(0)$. Esta aproximación lineal es simplemente moverse en el sentido que indica $\mathbf{t}$, y localmente es la de mayor peso (orden lineal).

Observación 9*.* La forma canónica local da lugar a la siguiente estimación de segundo orden: $\gamma(s) \approx s\mathbf{t}(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)\mathbf{n}(0)$. Esta aproximación cuadrática tiene la componente lineal (moverse en el sentido de $\mathbf{t}$), y la de orden 2, que es desplazarse de manera perpendicular al sentido de movimiento $\equiv$ curvarse en la medida que indique κ.

Observación 10*.* La estimación de orden 3 es la que indica la forma canónica local. En ella la curva se mueve sobre el plano osculador como indican los coeficientes de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, pero se desvía de dicho plano con orden cúbico según indica $(-\kappa(0)\tau(0)\frac{s^3}{6})\mathbf{b}(0)$. Como vemos, si $\tau < 0$, la curva se desvía *por encima del plano osculador*, es decir, en dirección de $\mathbf{b}$, y si $\tau > 0$, lo hace por debajo de dicho plano.

En el caso particular de curvas planas, se tiene lo siguiente:

Definición 18 (Forma canónica en curvas planas)**.** Siguiendo el mismo método que para la forma local, si γ es una curva plana parametrizada por longitud de arco, se tiene:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\mathbf{t}(0) + \frac{s^2}{2}\hat{\kappa}\mathbf{t}^{\perp}(0) + E(s).$$

El sistema de referencia que conviene tomar ahora es $(\gamma(0); \mathbf{t}(0), \mathbf{t}^{\perp}(0))$. Podemos pensar en la curva trasladada y centrada para que $\gamma(0)$ acabe en el origen, $\mathbf{t}(0)$ en $(1, 0)$ y $\mathbf{t}^{\perp}(0)$ en $(0, 1)$. En este sistema, se tiene la estimación $\gamma(s) \equiv (s, 0) + (0, \frac{s^2}{2}\hat{\kappa}(0))$, que motiva la siguiente definición:

Definición 19. Sea γ una curva plana. La parábola dada por $\eta(x) = (x, \frac{x^2}{2}\hat{\kappa}(s))$ en el sistema de referencia $(\gamma(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{t}^{\perp}(s))$ se denomina **parábola osculatriz** de γ en tiempo s.

Como hemos visto antes, es la mejor aproximación cuadrática de la curva.

Definición 20. Dada γ una curva plana, el círculo de centro $\gamma(s) + \frac{\mathbf{t}^{\perp}(s)}{\hat{\kappa}(s)}$ y radio $\frac{1}{\kappa(s)} = \frac{1}{|\hat{\kappa}(s)|}$ se denomina **círculo osculador** de γ en tiempo s.

Definición 21. Dada γ una curva plana, la curva $\eta(s) = \gamma(s) + \frac{\mathbf{t}^{\perp}(s)}{\hat{\kappa}(s)}$ que describen los centros de los círculos osculadores de γ se denomina **evoluta** de γ.

1.4. Teorema Fundamental de Teoría de Curvas

Ya vimos que en curvas planas las únicas *instrucciones* necesarias para elaborar una curva eran un punto inicial, una dirección inicial, y un valor de curvatura $\hat{\kappa}$. Este resultado en realidad es consecuencia de un teorema más profundo que se aplica a todo tipo de curvas, y que involucra a la torsión. Para probarlo, necesitaremos de resultados previos.

Lema 3. *Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$ vectores y $O : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación ortogonal que preserve la orientación (es decir, ortogonal con determinante 1). Entonces $O(v \times w) = Ov \times Ow$.*

Demostración. Como por definición $v \times w \perp v$ y $v \times w \perp w$, tenemos, dado que la aplicación es ortogonal, que $O(v \times w) \perp O(v)$ y $O(v \times w) \perp O(w)$, luego $O(v \times w) || O(v) \times O(w)$. Para ver que son el mismo, como O preserva la orientación, basta con ver que su norma es la misma. En efecto, por ortogonalidad: $\|O(v \times w)\|^2 = \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 = \|Ov\|^2 \|Ow\|^2 - \langle Ov, Ow\rangle^2 = \|Ov \times Ow\|^2$. $\square$

Proposición 10. *Sea $\gamma(s) : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Consideramos el movimiento rígido $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $Mv = p + Ov$ con O ortogonal y que preserva la orientación. Definimos $\tilde{\gamma}(s) := M\gamma(s) = p + O\gamma(s)$. Si denotamos los elementos geométricos de $\tilde{\gamma}$ con el símbolo $\tilde{}$, se tiene:*

1. *$\tilde{\gamma}$ está parametrizada por longitud de arco.*
2. *$\tilde{\boldsymbol{t}}(s) = O\boldsymbol{t}(s)$.*
3. *$\tilde{\boldsymbol{n}}(s) = O\boldsymbol{n}(s)$.*
4. *$\tilde{\boldsymbol{b}}(s) = O\boldsymbol{b}(s)$.*
5. *$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s)$.*
6. *$\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$.*

Demostración. $\tilde{\gamma}'(s) = O\gamma'(s)$, luego $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|O\gamma'(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1$, lo que demuestra 1 y 2. Tenemos entonces que $\tilde{\kappa}(s)\tilde{\mathbf{n}}(s) = \tilde{\mathbf{t}}'(s) = O\mathbf{t}'(s) = O\kappa(s)\mathbf{n}(s) = \kappa(s)O\mathbf{n}(s)$. Tomando normas a ambos lados sigue 5, y por tanto se tiene 3. Para 4, usaremos que $\tilde{\mathbf{b}}(s) = \tilde{\mathbf{t}}(s) \times \tilde{\mathbf{n}}(s) = O\mathbf{t}(s) \times O\mathbf{n}(s) = O(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) = O\mathbf{b}(s)$. Para 6, basta con ver que $\tilde{\tau}(s)\tilde{\mathbf{n}}(s) = \tilde{\mathbf{b}}'(s) = O\mathbf{b}'(s) = \tau(s)O\mathbf{n}(s) = \tau(s)\tilde{n}(s)$, y sigue lo que se quería. $\square$

Con esto, llegamos al teorema fundamental, tanto para unicidad como para existencia:

Teorema 2. *Sean γ, $\tilde{\gamma} : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ dos curvas birregulares parametrizadas por longitud de arco, tales que $\kappa \equiv \tilde{\kappa}$ y $\tau \equiv \tilde{\tau}$. Entonces $\exists p \in \mathbb{R}^3$ y $O \in O(3)$ que preserva la orientación, tales que $\tilde{\gamma} \equiv p + O\gamma$. Es decir, esencialmente (salvo movimiento rígido) se trata de la misma curva.*

Demostración. Supondremos que $a < 0 < b$ sin pérdida de generalidad. Trasladamos y rotamos $\tilde{\gamma}$ de tal manera que $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\tilde{\mathbf{t}}(0) = \mathbf{t}(0)$, $\tilde{\mathbf{n}}(0) = \mathbf{n}(0)$ y $\tilde{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{b}(0)$. Lo que tenemos que probar ahora es que tras este movimiento rígido, ambas curvas coinciden. Consideramos $h(s) = \left\|\tilde{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}(s)\right\|^2 + \|\tilde{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}(s)\|^2 + \left\|\tilde{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}(s)\right\|^2$. Tenemos, usando que torsión y curvatura coinciden, que $h'(s) = 2(\tilde{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}(s))(\tilde{\mathbf{t}}'(s) - \mathbf{t}'(s)) + 2(\tilde{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}(s))(\tilde{\mathbf{n}}'(s) - \mathbf{n}'(s)) + 2(\tilde{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}(s))(\tilde{\mathbf{b}}'(s) - \mathbf{b}'(s)) = 2\kappa(s)(\tilde{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}(s))(\tilde{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}(s)) + 2(\tilde{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}(s))(\tilde{\mathbf{n}}'(s) - \mathbf{n}'(s)) + 2\tau(s)(\tilde{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}(s))(\tilde{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}(s)) = 2(\tilde{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}(s))(\kappa(s)\tilde{\mathbf{t}}(s) + \tau\tilde{\mathbf{b}}(s) - \tilde{\mathbf{n}}'(s) + \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) - \mathbf{n}'(s)) = 0$. Por tanto, como además $h(0) = 0$, sigue que $h \equiv 0$ y en particular $\mathbf{t} \equiv \tilde{\mathbf{t}}$, luego $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(s)$ y como coinciden en 0 son iguales. □

Teorema 3. *Sean $\kappa : (a,b) \to \mathbb{R}^+$, $\tau : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{C}^\infty$. Entonces $\exists\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ curva birregular parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa_\gamma \equiv \kappa$ y $\tau_\gamma \equiv \tau$.*

Demostración. Supondremos como en la demostración anterior que $a < 0 < b$. Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}' \\ \mathbf{Q}' \\ \mathbf{R}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

Para $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, con la condición inicial $\mathbf{P}(0) = (1,0,0)$, $\mathbf{Q}(0) = (0,1,0)$ y $\mathbf{R}(0) = (0,0,1)$. Un teorema de ecuaciones diferenciales asegura que tal sistema lineal homogéneo, con una condición inicial, tiene una solución y es única. Las funciones así obtenidas forman un triedro ortonormal. Definimos ahora γ como la función tal que $\gamma' \equiv \mathbf{P}$ y $\gamma(0) = 0$. Con esto, se tiene en primer lugar que $\|\gamma'(s)\| = \|\mathbf{P}\| = 1$ luego está por longitud de arco. Además $\mathbf{t}_\gamma(s) = \gamma'(s) = \mathbf{P}(s)$. Por lo tanto, $\kappa_\gamma(s)\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{P}'(s) = \kappa(s)\mathbf{Q}(s)$. Tomando normas a ambos lados, y como $\kappa \geq 0$, tenemos que $\kappa \equiv \kappa_\gamma$ y por lo tanto $\mathbf{n}_\gamma \equiv \mathbf{Q}$. Asimismo, $\mathbf{b}_\gamma = \mathbf{t}_\gamma \times \mathbf{n}_\gamma = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{R}$, con lo que finalmente $\tau_\gamma(s)\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{b}'_\gamma(s) = \mathbf{R}'(s) = \tau(s)\mathbf{Q}(s) = \tau(s)\mathbf{n}_\gamma(s)$, con lo que $\tau_\gamma \equiv \tau$. □

1.5. Desigualdad isoperimétrica

Nos planteamos el siguiente problema: fijada una longitud L, consideramos una curva plana cerrada de esa longitud. Nos preguntamos cuál es la mayor área que puede encerrar en su interior.

Para resolverlo, vamos a definir la función:

$$\Phi(L) = \sup\{A : A \text{ es el área encerrada por una curva plana de longitud L}\}$$

Si consideramos una de esas curvas, γ, y le aplicamos una homotecia con un factor $r > 0$, sabemos que su longitud pasa a ser rL y el área encerrada r^2L. Como por definición se tiene que $A \leq \Phi(L)$, esto nos indica (aplicándolo a esta nueva curva) que $r^2A \leq \Phi(rL)$. Si tomamos supremo en A, se sigue que $r^2\Phi(L) \leq \Phi(rL)$. De esta desigualdad, evaluando en $L = 1$ y $L = r$ se obtienen:

$$r^2\Phi(1) \leq \Phi(r)$$

$$\frac{1}{r^2}\Phi(r) \leq \Phi(1)$$

De donde sigue que $\Phi(r) = r^2\Phi(1) = Kr^2$ con $K \in \mathbb{R}$.

Proposición 11. *Se tiene que* $\Phi(L) = \frac{L^2}{4\pi}$*, es decir, que es un máximo que se alcanza cuando* γ *es un círculo.*

Demostración. Vamos a usar el teorema de Green. Consideramos γ una curva cerrada de longitud L, sea Ω la región que delimita y A su área. Sabemos que $\iint_\Omega (Q_x - P_y) dA = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy$. Para $Q = x$ y $P = 0$ se obtiene entonces que $\iint_\Omega dA = \int_{\partial\Omega} xdy$ y para $P = -y$, $Q = 0$ se obtiene que $\iint_\Omega dA = \int_{\partial\Omega} -ydx$. Estas expresiones serán las que usaremos.

Consideramos γ parametrizada por longitud de arco, $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, y por tanto $0 \leq s \leq L$, y sea $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), \tilde{y}(s))$ aquella con la misma componente x pero cuya componente y se mueve por una circunferencia de diámetro $2R$ la *anchura* de la traza de γ (mayor distancia horizontal entre puntos de la curva). Si aplicamos el teorema de green, tenemos por un lado que $A = \int_\gamma xdy = \int_0^L x(s)y'(s)ds = \int_0^L \tilde{x}(s)y'(s)ds$. Por otro lado, $\pi R^2 = \int_{\tilde{\gamma}} -ydx = -\int_0^L \tilde{y}(s)x'(s)ds$.

Combinando ambas, sigue que:

$$A + \pi R^2 = \int_0^L \tilde{x}(s)y'(s) - \tilde{y}(s)x'(s)ds = \int_0^L \langle\tilde{\gamma}(s), \gamma'(s)\rangle \, ds \leq \int_0^L \|\tilde{\gamma}(s)\| \, \|\gamma'(s)\| \, ds = \int_0^L Rds = L \cdot R$$

De aquí se obtiene $A \leq LR - \pi R^2 \leq \frac{L^2}{4\pi}$, como se quería, donde hemos usado que el valor máximo de la parábola $ax - bx^2$ es $\frac{a^2}{4b}$. $\square$

2. Superficies

Definición 22. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. Se dice que S es una **superficie regular** si $\forall p \in S$, $\exists U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $\exists W \subset \mathbb{R}^3$ abierto con $p \in W$, y $\exists \mathbf{X} : U \to \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\mathbf{X}(U) = W \cap S$
2. $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\infty(U)$
3. $\mathbf{X}$ es un homeomorfismo sobre su imagen (inyectiva con inversa continua).
4. $\frac{\partial \mathbf{X}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}(u,v)}{\partial v} \neq 0$ en todo punto, o lo que es lo mismo, $D\mathbf{X}(u,v)$ es de rango máximo.

En ese caso, si $q \in W \cap S$ y $q = \mathbf{X}(u,v)$, entonces el par (u,v) se denomina **coordenadas** con respecto a $\mathbf{X}$ de q. La aplicación $\mathbf{X}$ se denomina **carta local** de S.

Por ejemplo, el plano que pasa por p generado por los vectores independientes a y b, puede ser parametrizado con una única carta $X(u,v) = p + ua + vb$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, y en este caso $W = \mathbb{R}^3$. Es claramente $\mathcal{C}^\infty$ y se tiene que $X_u \times X_v = a \times b \neq 0$ por ser independientes. Es inyectiva porque a, b son independientes. Para ver que la inversa es continua, basta con poner un vector c con $c \perp b$, entonces $u = \frac{(X-p)\cdot c}{a \cdot c}$, y vemos que u como función de X es continua. Análogamente se hace para v con un $d \perp a$.

Otro ejemplo puede ser el cilindro $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$. Lo vamos a parametrizar en coordenadas cilíndricas, de la forma $\mathbf{X}(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$, y para que sea inyectiva y homeomorfismo, seleccionamos $t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in (0, \pi)$, de tal forma que dado un punto (x,y,z), se pueden recuperar las coordenadas de manera continua con $t = z$ y $\theta = \arccos x$. Esta carta no cubre el cilindro completo, pero se pueden utilizar otras 3, correspondientes a $(\pi, 2\pi)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ y $(\frac{3\pi}{2}, \pi + \frac{3\pi}{2})$ para θ. El cilindro también admite una carta global, $\mathbf{X}(u,v) = (\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \log\sqrt{u^2+v^2})$, con $(u,v) \neq 0$, que lo parametriza entero y tiene inversa $u = xe^z$, $v = ye^z$ continua.

La esfera $S = \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ se puede parametrizar a través de gráficos como $\mathbf{X}(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ para $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, cuya inversa es evidente (es proyectar las dos primeras componentes). Son necesarias 6 de estas cartas para recubrir la esfera entera. Otra opción es utilizar las coordenadas esféricas $\mathbf{Y}(\theta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, con $\varphi \in (0, \pi)$ y $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, para permitir la inversa continua $\varphi = \arccos z$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$. Variando el rango de θ se pueden obtener las 4 cartas necesarias para recubrir la esfera de este modo.

Definición 23. Las **curvas coordenadas** de una carta $\mathbf{X} : U \to \mathbb{R}^3$ son los conjuntos $\mathbf{X}(V_{u_0})$ o bien $\mathbf{X}(H_{v_0})$, con $V_{u_0} = \{(u_0, v) \in U\}$, y $H_{v_0} = \{(u, v_0) \in U\}$.

Por ejemplo, en la helicoide, que está dada por la carta global $\mathbf{X}(\theta, u) = (u\cos\theta, u\sin\theta, \theta)$, para $\theta \in \mathbb{R}$ y $u > 0$, tenemos las siguientes curvas coordenadas: fijando $\theta = \theta_0$, son las curvas $\gamma(u) = (u\cos\theta_0, u\sin\theta_0, \theta_0)$, que son rectas horizontales que parten de $(0,0,\theta_0)$ y tienen la dirección de $(\cos\theta_0, \sin\theta_0, 0)$, y fijando $u = u_0$, son las curvas $\gamma(\theta) = (u_0\cos\theta, u_0\sin\theta, \theta)$, que son hélices de radio u_0.

Proposición 12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Entonces $Gr(f, \Omega) = ((x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \Omega)$ es superficie regular.*

Demostración. Tenemos la carta global $\mathbf{X}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ en Ω y con $W = \mathbb{R}^3$. Es $\mathcal{C}^\infty$ por serlo f, es inyectiva por serlo sus dos primeras componentes, tiene inversa continua $(x = u, y = v)$ y además $D\mathbf{X}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$, de rango 2, como se quería. $\square$

Definición 24. Dada $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, se dice que a es **punto crítico** de F si $\nabla F(a) = 0$. En ese caso, $F(a)$ se denomina **valor crítico**. Los puntos $b \in Im(F)$ que no son valores críticos se denominan **valores regulares**.

Proposición 13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Si a es un valor regular de F, entonces $F^{-1}(\{a\}) = \{(x, y, z) \in \Omega : F(x, y, z) = a\}$ es una superficie regular.*

Demostración. Dado $p \in F^{-1}(\{a\})$, sabemos que $\nabla F(p) \neq 0$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $F_z(p) \neq 0$ (si no, cambiar el orden). Entonces, el teorema de la función implícita asegura que $\exists U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}$, con $U \times V$ entorno de p, y $g : U \to V$, con $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $(U \times V) \cap F^{-1}(\{a\}) = Grafica(g, U)$, luego tenemos la carta $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, g(u, v))$ en U, que es un grafo y sabemos que verifica las propiedades. □

A continuación presentamos una noción *relajada* de superficie, que se asemeja más a la definición de curva, y que en ocasiones será necesaria para presentar conjuntos (como superficies de revolución) para los que no hay cartas locales siempre:

Definición 25. La función $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X \in \mathcal{C}^\infty(U)$, con U abierto, y tal que $rg(DX) = 2$, o lo que es lo mismo, el vector normal nunca se anula, se denomina **superficie parametrizada regular** y $\mathbf{X}(U)$ se denomina **traza**.

Siempre podemos encontrar un abierto $V \subset U$ que contenga a un punto fijo (u_0, v_0), tal que $\mathbf{X}(U)$ sea una superficie regular (es decir, parametrizable por cartas locales).

Definición 26. Sea S una superficie regular y $f : S \to \mathbb{R}$. Se dice que $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ si dada una carta local cualquiera $\mathbf{X}$ se tiene que $f \circ \mathbf{X}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en el dominio U de la carta.

Definición 27. Sean S, R unas superficies regulares y $f : S \to R$ continua. Se dice que $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ si dada una carta local de S cualquiera $\mathbf{X} : U \to S$ y otra carta $\mathbf{Y} : H \to R$ de R tal que $f(\mathbf{X}(U)) \subset \mathbf{Y}(H)$, se tiene que $\mathbf{Y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{X}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en el dominio U de la carta.

La idea en ambos casos es considerar las funciones entre las coordenadas y no entre las superficies.

Definición 28. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. El vector $v \in \mathbb{R}^3$ es **tangente a** S **en p** si $\exists \alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, donde $a < 0 < b$, tal que $\alpha(t) \subset S$ $\forall t \in (a, b)$, y además $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$.

Proposición 14. *Dada $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in S$ y $\boldsymbol{X} : U \to S$ una carta local, se tiene que los vectores tangentes son exactamente los de la forma $v = a\boldsymbol{X}_u(u_0, v_0) + b\boldsymbol{X}_v(u_0, v_0)$, con $\boldsymbol{X}(u_0, v_0) = p$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Es decir, forman un plano.*

Demostración. Supongamos que v es un vector tangente por la curva α. Podemos escribir cerca del 0 que $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$. Derivando, sigue que $\dot{\alpha}(t) = \dot{u}(t)\mathbf{X}_u(u(t), v(t)) + \dot{v}(t)\mathbf{X}_v(u(t), v(t))$, y por tanto $v = \dot{u}(0)\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + \dot{v}(0)\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$. Por otro lado, dado un vector de la forma $v = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$, podemos elaborar la curva $\alpha(t) = \mathbf{X}(u_0 + at, v_0 + bt)$, para $t \in (-\delta, \delta)$ con δ adecuado para que $B_\delta^\infty(u_0, v_0) \subset U$. La curva está siempre en S gracias a la carta, y además $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$. □

Definición 29. Se define el **plano tangente** a S por p como el plano $p + \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle$ donde $\mathbf{X}(u_0, v_0) = p$. Asimismo, puede definirse por su vector normal: $((x, y, z) - p) \cdot (\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0)) = 0$.

Observación 11 (Plano tangente a un grafo). Sea S el grafo de $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tomamos la carta $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, g(u, v))$. El cálculo que se indica en la definición anterior da lugar al siguiente plano tangente en $p = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{X}(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (-g_u(x_0, y_0), -g_v(x_0, y_0), 1) = 0$$

Observación 12 (Plano tangente a una superficie de nivel). Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ valor regular. Definimos la superficie $S_a = F^{-1}(\{a\})$. Dado $p \in S_a$, sea α con traza en S_a y $\alpha(0) = p = (x_0, y_0, z_0)$. Por definición, $F(\alpha(t)) = a$, luego $\nabla F(p) \cdot \dot{\alpha}(0) = 0$ es el plano de vectores tangentes. Por tanto, el plano tangente es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla F(p) = 0$$

Definición 30. Dadas dos superficies regulares S y R, $p \in S$, y una aplicación $F : S \to R$, se define la **aplicación tangente** $T_pF : T_pS \to T_{F(p)}R$ como aquella que lleva el v tal que hay una curva $\alpha \subset S$, $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$, al vector $(F \dot{\circ} \alpha)(0)$.

Proposición 15. *Dada $F : S \to R$ aplicación entre superficies regulares, $\boldsymbol{X}$ carta de S en el punto p, con $\boldsymbol{X}(u_0, v_0) = p$, y dada $\boldsymbol{Y}$ carta de R en el punto $F(p)$, con $\boldsymbol{Y}(r_0, s_0) = F(p)$, tomamos $\Phi(u, v) = \boldsymbol{Y}^{-1} \circ F \circ \boldsymbol{X}(u, v)$ la expresión en coordenadas de F. Dado un vector $v = a\boldsymbol{X}_u(u_0, v_0) + b\boldsymbol{X}_v(u_0, v_0) \in T_pS$, se verifica que $T_pF(v) = a'\,\boldsymbol{Y}_r(r_0, s_0) + b'\,\boldsymbol{Y}_s(r_0, s_0)$, donde $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = D\Phi(u_0, v_0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.*

Demostración. Consideramos $\alpha(t) = \mathbf{X}(u_0 + ta, v_0 + tb)$, que verifica $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$. Tenemos que $F \circ \alpha(t) = (F \circ \mathbf{X})(u_0 + ta, v_0 + tb) = (\mathbf{Y} \circ \Phi)(u_0 + ta, v_0 + tb)$. Tenemos que $TpF(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(F \circ \alpha)$. Para obtenerla, aplicamos la regla de la cadena:

$$TpF(v) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_r(r_0, s_0) & \mathbf{Y}_s(r_0, s_0) \end{pmatrix} \cdot D\Phi(u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Como se quería. □

En particular, sigue que T_pF es lineal, con matriz (respecto de las bases naturales de cada espacio tangente) $D\Phi(u_0, v_0)$.

3. Primera forma fundamental. Longitudes, ángulos y áreas.

El primer objetivo es medir las longitudes de las curvas posibles entre dos puntos de una superficie dada, estando las curvas sobre la misma. Dada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ con S una superficie regular, supongamos que se tiene una carta $\mathbf{X}$ tal que $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$. Tenemos que la longitud de γ entre dos puntos a y b es:

$$L(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\|\, du = \int_a^b \|\dot{u}(t)\mathbf{X}_u(u(t), v(t)) + \dot{v}(t)\mathbf{X}_v(u(t), v(t))\|\, dt =$$

$$\int_a^b \sqrt{\dot{u}^2(t)\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u(u(t), v(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v(u(t), v(t)) + \dot{v}^2(t)\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v(u(t), v(t))}dt.$$

Esta expresión motiva la definición:

Definición 31. Sea S una superficie regular y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ una carta. Se definen:

$$E(u, v) = \mathbf{X}_u(u, v)\mathbf{X}_u(u, v)$$

$$F(u, v) = \mathbf{X}_u(u, v)\mathbf{X}_v(u, v)$$

$$G(u, v) = \mathbf{X}_v(u, v)\mathbf{X}_v(u, v)$$

Con estas definiciones, tenemos que $L(\gamma, a, b) = \int_a^b \sqrt{\dot{u}^2E + 2\dot{u}\dot{v}F + \dot{v}^2G}dt$. Es por esto que se suele denotar además $ds^2 \equiv Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

Definición 32. Sea S una superficie regular y $p \in S$ un punto en ella. Sea $v \in T_pS$. Se define la **primera forma fundamental** como $I_p(v, w) = v \cdot w$. Es una apliación bilineal, simétrica (meramente es el producto escalar usual restringido) cuyo espacio de partida T_pS varía según el punto escogido.

Dada $\mathbf{X} : U \to S$ carta de S en $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$, si $v = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(x_0, v_0)$ es un elemento de T_pS, y $w = (c, d)$ también en esa base, se tiene que:

$$I_p(v, w) = v \cdot w = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Puesto que $\mathbf{X}_u\mathbf{X}_u = E$, $\mathbf{X}_u\mathbf{X}_v = F$ y $\mathbf{X}_v\mathbf{X}_v = G$. Observemos que, como $I(v, v)$ se trata de la norma de v, la forma cuadrática inducida es definida positiva, y por tanto $E > 0$, $EG - F^2 > 0$, y, como consecuencia ambas, $G > 0$. Es lógico puesto que $E = \|X_u\|^2$, $G = \|X_v\|^2$ y $EG - F^2 = \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|^2$.

Definición 33. Dadas α_1 y α_2 curvas que se cortan en $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$, definimos el **ángulo entre las curvas** como el β tal que:

$$\cos\beta = \frac{\langle \dot{\alpha_1}(0), \dot{\alpha_2}(0)\rangle}{\|\dot{\alpha_1}(0)\|\, \|\dot{\alpha_2}(0)\|}$$

Proposición 16. *Si α_1 y α_2 son curvas sobre la superficie S, de tal modo que $\alpha_1(t) = \boldsymbol{X}(u_1(t), v_1(t))$ y $\alpha_2(t) = \boldsymbol{X}(u_2(t), v_2(t))$, entonces el ángulo β que forman en $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ es aquel tal que:*

$$\cos\beta = \frac{\dot{u_1}\dot{u_2}E + \dot{u_1}\dot{v_2}F + \dot{v_1}\dot{u_2}F + \dot{v_1}\dot{v_2}G}{\sqrt{\dot{u_1}^2E + 2\dot{u_1}\dot{v_1}F + \dot{v_1}^2G}\sqrt{\dot{u_2}^2E + 2\dot{u_2}\dot{v_2}F + \dot{v_2}^2G}}$$

Demostración. Sigue simplemente de la expresión $\alpha_j = \mathbf{X}(u_j(t), v_j(t))$ y la definición anterior. $\square$

Para el cálculo de áreas de superficies, lo que hacemos es aproximar la superficie cerca de cada punto por pequeños rectángulos tangentes, de lados $\Delta u \cdot \mathbf{X}_u$ y $\Delta v \cdot \mathbf{X}_v$. El área de tales rectángulos es $\Delta u \Delta v \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|$, y, tomando límite cuando los lados tienden a cero, se obtiene la definición para el área:

Definición 34. Dada la superficie $\mathbf{X}(U)$ donde $\mathbf{X}$ es una carta y U es abierto, se define su **área** A como

$$A = \iint_U \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\| \, dudv.$$

Proposición 17. *El área A de la superficie $\boldsymbol{X}(U)$ se puede expresar en términos de la forma fundamental como:*

$$A = \iint_U \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Demostración. Se tiene, como se había discutido antes, que $\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|^2 = \|\mathbf{X}_u\|^2 \|\mathbf{X}_v\|^2 - \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle^2 = EG - F^2$. $\square$

Observación 13 (Ejemplo: Cilindro de eje arbitrario). Se considera la curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ por longitud de arco. Se construye un cilindro de radio r cuyo eje es esta curva, tomando los círculos de radio r contenidos en el plano normal a la curva en cada uno de sus puntos, centrados en dichos puntos. Es decir:

$$\mathbf{X}(s, \theta) = \gamma(s) + r \cos\theta \mathbf{n}(s) + r \sin\theta \mathbf{b}(s).$$

Usando las fórmulas de Frenet, es inmediato obtener que $E = (1 - r\kappa(s)\cos\theta)^2 + r^2\tau^2(s)$, $F = -r^2\tau(s)$ y $G = r^2$. Por tanto su área es:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_a^b \sqrt{(1 - r\kappa\cos\theta)^2 r^2 + r^4\tau^2 - r^4\tau^2} dsd\theta = \int_0^{2\pi} (r - r^2\kappa\cos\theta) d\theta dr = 2\pi r(b - a).$$

Se obtiene que el área es siempre la misma, independientemente del eje elegido. Es siempre la longitud del círculo por la longitud del eje (recordemos que estaba parametrizada por longitud de arco).

4. Segunda forma fundamental

4.1. El operador de forma

Se parte de una superficie regular S y $p \in S$. Consideramos T_pS su plano tangente, y el vector **N** unitario a dicho plano. En adelante, cuando se hable de vector normal **N**, se tratará del **unitario**. Estos vectores normales, como es lógico, varían con p. Los tomaremos siempre orientados hacia *el mismo lado*, en un entorno de p. Tenemos que $\mathbf{N}_p = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|}$.

Con ello, nuestro objetivo es estudiar la forma de la superficie, no solo las medidas (áreas, ángulos y longitudes) que ya conocíamos. Es decir, **cómo se curva** la superficie S. Esta manera de curvarse va a depender de cómo varía el vector normal en distintas direcciones de desplazamiento posibles (no hay una única solo, como ocurría en curvas).

Todas esas variaciones se van a codificar en el **operador de forma**, que recibe direcciones de T_pS y devuelve variaciones de **N** en esa dirección. Para ver cómo varía **N** en una dirección, lo restringiremos a la curva (sobre la superficie) que sigue esa dirección.

Definición 35. Sea S superficie regular, $p \in S$, $w \in T_pS$. Se define $\mathcal{F}_p(w)$, el **operador de forma** en p aplicado a la dirección w, como sigue:

- Se toma una curva α cuya traza esté en S, y tal que $\alpha(0) = p$, y $\dot{\alpha}(0) = w$.
- Restringiendo el vector normal a α, tenemos que $\mathcal{F}_p(w) = -\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))|_{t=0}$.

Por tanto, $\mathcal{F}_p : T_pS \to \mathbb{R}^3$, y transforma direcciones sobre la superficie en la variación de **N** a lo largo de esa dirección.

Vamos a comprobar que esta definición no depende del α escogido. Para ello encontraremos una expresión que no dependa del α. Dada una carta **X** en p, de tal forma que $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$. Partimos de $w \in T_pS$ que se escribe como $w = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_u(u_0, v_0)$. Tomamos una $\alpha = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ tal que $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $\dot{u}(0) = a$ y $\dot{v}(0) = b$, para que verifique que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = w$. Tenemos que $\mathbf{N} \circ \alpha(t) = \mathbf{N}(\mathbf{X}(u(t), v(t)))$.

Para acortar la notación, se adoptará lo siguiente: $\mathbf{N}(\mathbf{X}(u, v)) \equiv \mathbf{N}(u, v)$, y entonces $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{N}(\mathbf{X}(u, v)) \equiv \mathbf{N}_u(u, v)$, y análogo para v.

Proseguimos con el cálculo de $\mathcal{F}_p(w) = -\frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=0}$.

Por la regla de la cadena:

$$\mathcal{F}_p(w) = -\mathbf{N}_u(u(0), v(0))\dot{u}(0) - \mathbf{N}(u(0), v(0))\dot{v}(0)$$

Por tanto, resulta que:

$$\mathcal{F}_p(a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v) = -a\mathbf{N}_u - b\mathbf{N}_v$$

Que como vemos no depende de α. Todas esas parciales se evalúen en (u_0, v_0).

Para empezar, esto nos indica que con conocer $\mathbf{N}_u$ y $\mathbf{N}_v$, podemos tener la expresión completa del operador. Esto puede hacerse aplicando el operador en $\mathbf{X}_u$ y en $\mathbf{X}_v$, o simplemente derivando.

Observación 14. $\mathcal{F}_p$ es lineal, dado que su expresión es una combinación lineal de dos vectores. La comprobación es inmediata a partir de la expresión previa.

Proposición 18. *Se tiene que $\mathcal{F}_p(w) \in T_pS$. Es decir, $\boldsymbol{N}_u$ y $\boldsymbol{N}_v$ pertenecen al plano tangente.*

Demostración. Se tiene que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$, luego derivando respecto de u, sigue que $\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N} = 0$, y respecto de v sigue que $\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{N} = 0$, luego ambos son ortogonales al vector normal y por lo tanto pertenecen al plano tangente. □

Por tanto:

Observación 15. $\mathcal{F}_p : T_pS \to T_pS$ y es lineal.

Proposición 19. *La aplicación $\mathcal{F}_p : T_pS \to T_pS$ es autoadjunta, es decir, $\langle \mathcal{F}_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, \mathcal{F}_p(w_2)\rangle$.*

Demostración. Basta con comprobarlo para la base $B = \{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ de T_pS. Si $w_1 = w_2$, es evidente por simetría del producto escalar. Si no, pongamos $w_1 = \mathbf{X}_u$, $w_2 = \mathbf{X}_v$ sin perder generalidad (una vez más por simetría de producto escalar). Entonces lo que hay que ver, evaluando, es que $\langle -\mathbf{N}_u, \mathbf{X}_v\rangle = \langle \mathbf{X}_u, -\mathbf{N}_v\rangle$. Por definición se tiene que $\mathbf{N}\mathbf{X}_u = 0$, luego derivando respecto de la v, sigue que $\mathbf{N}_v\mathbf{X}_u + \mathbf{N}\mathbf{X}_{uv} = 0$. Si hacemos lo mismo pero cambiando las u por v, tenemos que $\mathbf{N}_u\mathbf{X}_v + \mathbf{N}\mathbf{X}_{vu} = 0$. Luego se tiene que $\langle -\mathbf{N}_u, \mathbf{X}_v\rangle = \langle \mathbf{X}_u, -\mathbf{N}_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{uv}\rangle$, como se quería. □

A continuación queremos obtener una expresión matricial de $\mathcal{F}_p$ en términos de la base $B = \{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$. Para ello está claro que lo importante es descubrir la expresión de $\mathbf{N}_u$ y $\mathbf{N}_v$.

Escribimos $\mathcal{F}_p(\mathbf{X}_u) = -\mathbf{N}_u = A\mathbf{X}_u + B\mathbf{X}_v$ y $\mathcal{F}_p(\mathbf{X}_v) = -\mathbf{N}_v = C\mathbf{X}_u + D\mathbf{X}_v$. De esta forma, como es lineal, se tendrá:

$$\mathcal{F}_p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donde x, y son las coordenadas del elemento de TpS a considerar. Si denotamos E, F y G como es habitual, a los valores involucrados en la primera forma fundamental, tenemos:

$$\begin{aligned} e &:= \mathcal{F}_p(\mathbf{X}_u)\mathbf{X}_u = AE + BF \\ f &:= \mathcal{F}_p(\mathbf{X}_u)\mathbf{X}_v = AF + BG = \mathcal{F}_p(\mathbf{X}_v)\mathbf{X}_u = CE + DF \\ g &:= \mathcal{F}_p(\mathbf{X}_v)\mathbf{X}_v = CF + DG \end{aligned}$$

Como se observa hemos introducido nueva notación e, f y g. Como $\mathcal{F}_p$ es autoadjunta, es claro que ambas definiciones dadas para f son la misma. Obsérvese que si se toma el vector normal con sentido contrario, cambia el signo de e, f y g, dado que cambia el signo de $\mathcal{F}_p$. Se verifica, como se vio antes, que:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

Recordemos que la primera matriz del lado derecho es la de la primera forma fundamental, y es definida positiva. Sigue, invirtiendo, que la matriz buscada es:

$$\mathcal{F}_p = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Una manera rápida de calcular e, f, g es $e = -\mathbf{N}_u\mathbf{X}_u$, $f = -\mathbf{N}_v\mathbf{X}_u = -\mathbf{N}_u\mathbf{X}_v$ y $g = -\mathbf{N}_v\mathbf{X}_v$. Pero más rápido aún es considerar que como $\mathbf{N}\mathbf{X}_u \equiv 0$, derivando, sigue que $\mathbf{N}\mathbf{X}_{uu} = -\mathbf{N}_u\mathbf{X}_u$. Derivando con respecto a v se obtiene una expresión similar, así como derivando la expresión correspondiente a $\mathbf{X}_v$. En definitiva:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N}\mathbf{X}_{uu} \\ f &= \mathbf{N}\mathbf{X}_{uv} \\ g &= \mathbf{N}\mathbf{X}_{vv} \end{aligned}$$

Definición 36 (Segunda forma fundamental)**.** Se define $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ la **segunda forma fundamental** como el operador $II_p(w, w') = \mathcal{F}_p(w) \cdot w'$.

Es bilineal al ser $\mathcal{F}$ lineal, y además es simétrica por ser $\mathcal{F}$ autoadjunta. Además, su expresión matricial en la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ es:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\mathcal{F}_p(\mathbf{X}_u)\mathbf{X}_u = e$, $\mathcal{F}_p(\mathbf{X}_u)\mathbf{X}_v = \mathcal{F}_p(\mathbf{X}_v)\mathbf{X}_u = f$ y $\mathcal{F}_p(\mathbf{X}_v)\mathbf{X}_v = g$ por definición.

4.2. Curvatura Normal

Recordemos que como $\mathcal{F}_p$ es lineal autoadjunta, entonces, respecto de una base ortonormal cualquiera, su matriz es simétrica. Por tanto, puede diagonalizarse en base de autovectores ortonormal. Cabe observar que la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ no tiene por qué ser ortonormal, luego la matriz que se vio anteriormente **no** tiene por qué ser simétrica.

Es decir:

Observación 16. $\exists k_1 \geq k_2$ y vectores $e_1, e_2 \in T_pS$ ortonormales tales que $\mathcal{F}_p(e_1) = k_1 e_1$, y $\mathcal{F}_p(e_2) = k_2 e_2$. Los k_1, k_2 son los **autovalores** de $\mathcal{F}_p$, y e_1,e_2 son una base ortonormal de **autovectores** de $\mathcal{F}_p$.

Definición 37. Los autovalores k_1, k_2 de $\mathcal{F}_p$ se denominan **curvaturas principales** de S en p.

Si e_1, e_2 son los autovectores de $\mathcal{F}_p$, entonces $\pm e_1$ y $\pm e_2$ se denominan **direcciones principales** de S en p.

Respecto de esa base de autovectores, se tiene $I_p((a, b),(c, d)) = ac + bd$ por ser ortonormal, y además $II_p((a, b),(c, d)) = ack_1 + bdk_2$, puesto que $\mathcal{F}_p(a, b) = (k_1 a, k_2 b)$.

Definición 38. La **curvatura normal** en $p \in S$ en la dirección $w \in T_pS$ **unitaria** ($\|w\| = 1$), se define:

$$k_p(w) = II_p(w, w).$$

Obsérvese que se define para direcciones unitarias solamente, no para vectores arbitrarios de T_pS. Vamos a profundizar en el significado de esta definición.

Lema 4 (Meusnier)**.** *Sea α una curva con traza en S, $\alpha(0) = p \in S$, con velocidad $\dot\alpha(0) \in T_pS$, no necesariamente unitario. Además pasa con aceleración $\ddot\alpha(0) = (\ddot\alpha(0)\boldsymbol{N})\boldsymbol{N} + (\ddot\alpha(0) - (\ddot\alpha(0)\boldsymbol{N})\boldsymbol{N})$, que hemos separado en su componente normal (paralela a $\boldsymbol{N}$) y su componente tangencial (en T_pS).*

Se tiene que $\ddot\alpha(0) \cdot \boldsymbol{N} = II_p(\dot\alpha(0), \dot\alpha(0))$.

*Es decir, la aceleración normal **solo depende** de la velocidad de α al pasar por p, y de la forma de la superficie.*

Demostración. $\dot\alpha(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t)) = 0$ por definición. Derivando:

$$\ddot\alpha(t)\mathbf{N}(\alpha(t)) = -\dot\alpha(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) = \dot\alpha(t)\mathcal{F}_p(\dot\alpha(t))$$

Basta con evaluar en 0. □

Observación 17 (Relación entre curvatura de curva y de superficie). Sea $p \in S$, $w \in T_pS$ unitario y α curva en S con $\alpha(0) = p$ y $\dot\alpha(0) = w$. Entonces $\ddot\alpha(0) \cdot \mathbf{N} = II_p(w, w) = k_p(w)$ por ser w unitario.

Además, si α está por longitud de arco, entonces $\ddot\alpha(0) = \kappa_\alpha(0)\mathbf{n}_\alpha(0)$. Por tanto, multiplicando, $k_p(w) = \kappa_\alpha(0)\mathbf{n}_\alpha(0)\mathbf{N} = \kappa_\alpha(0)\cos\theta$, donde θ es el ángulo en p entre el normal de α y el normal a S, ambos unitarios.

Definición 39 (Secciones normales)**.** Sea $w \in T_pS$ **unitario**, y γ la curva que se obtiene al cortar S con el plano por p determinado por w y $\mathbf{N}$. La curva γ se denomina **sección normal** de S en p en dirección w.

Sea γ la sección normal en la dirección $w \in T_pS$, obtenida al cortar S por el plano determinado por w y N. El vector $\mathbf{n}_\gamma$ yace en el plano determinado por w y $\mathbf{N}$, pues toda la sección normal está en ese plano, inclusive por tanto sus derivadas. De esta manera, como además $\mathbf{n}_\gamma$ es ortogonal a w por definición, que también es ortogonal a $\mathbf{N}$, entonces forma un ángulo de 0 o bien π con $\mathbf{N}$. Como se tiene que $k_p(w) = \kappa_\alpha(p)\cos\theta$, y $\kappa_\alpha \geq 0$, entonces:

Proposición 20. *Para la sección normal γ se tiene:*

$$\theta = 0 \iff \boldsymbol{n}_\gamma = N_p \iff k_p(w) = \kappa_\gamma \iff k_p(w) \geq 0.$$

$$\theta = \pi \iff \boldsymbol{n}_\gamma = -N_p \iff k_p(w) = -\kappa_\gamma \iff k_p(w) \leq 0.$$

Y por tanto las curvaturas de las secciones normales nos proporcionan la curvatura normal de la curva en la dirección deseada.

Si $k_p(w) > 0$, la superficie S se curva **acercándose** hacia $\mathbf{N}$ si nos desplazamos sobre S desde p en dirección w.

Si $k_p(w) < 0$, se curva **alejándose** de $\mathbf{N}$.

Esto aclara que el signo de $\mathbf{N}$ determina el de k. El módulo determina cuán acentuada es esta curvatura.

Observación 18 (Curvatura normal en coordenadas). Si tomamos el sistema $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ de T_pS, y $w \in T_pS$ **unitario**, escribimos $w = (x, y)$ en esa base. Recordemos que su norma entonces es $x^2E+2xyF+y^2G = 1$. La curvaturna normal entonces es $II_p(w, w) = x^2e + 2xyf + y^2g$. Es decir, podemos pensar en k_p como una función de dos coordenadas sobre la elipse $x^2E + 2xyF + y^2G = 1$.

En una base de direcciones principales, $\{e_1, e_2\}$, si $w = (x, y)$, entonces su norma sabemos que es $x^2 + y^2 = 1$, y la curvatura normal es $II_p(w, w) = k_1x^2 + k_2y^2$.

Vamos a continuar profundizando en esta segunda expresión sencilla. Vamos a escribir $w = xe_1 + ye_2$ como en la observación, tal que $x^2 + y^2 = 1$. Es decir, podemos escribir $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, con θ el ángulo entre w y e_1. Se hace patente entonces que la curvatura solo depende de un parámetro realmente: $k_p(w) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$. De aquí se sigue:

- Si $k_1 = k_2$, entonces vemos que $k_p(w) = k_1 = k_2$ en todas las direcciones: en p la superficie se curva de igual manera en todas direcciones y por tanto todas las direcciones son principales.
- Se tiene además que k_1 es la máxima curvatura normal posible (y se alcanza en dirección e_1), y k_2 es la mínima (alcanzándose en e_2). Esto permite encontrar k_1 y k_2 sabida la curvatura normal.

4.3. Curvaturas gaussiana y media. Clasificación de puntos.

Definición 40. Dado el operador de forma $\mathcal{F}_p : T_pS \to T_pS$, se define la **curvatura gaussiana de** S **en** p como:

$$K_p = \det\mathcal{F}_p = k_1k_2.$$

Definición 41. Dado el operador de forma $\mathcal{F}_p : T_pS \to T_pS$, se define la **curvatura media de** S **en** p como:

$$H_p = \frac{1}{2}traza(\mathcal{F}_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Obsérvese que las curvaturas principales son las raíces de la ecuación característica, $x^2 - 2xH_p + K_p$, luego contienen información equivalente. Es decir:

Observación 19. $k_1, k_2 = H_p \pm \sqrt{H_p^2 - K_p}$

Observación 20 (Curvaturas en coordenadas). Tomamos base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$. La matriz de $\mathcal{F}_p$ respecto de esa base, recordemos, es $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$. Esto nos indica que $K_p = det\mathcal{F}_p = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$

Asimismo, si se calculan las coordenadas explícitas de A y D, invirtiendo la matriz de la primera forma, y se suman, se tiene $H_p = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+Eg}{EG-F^2}$.

Definición 42 (Clasificación de puntos de una superficie)**.** El punto p de una superficie S puede ser:

- **Hiperbólico** si $K_p < 0$, es decir si $k_2 < 0 < k_1$.
- **Elíptico** si $K_p > 0$, es decir si $k_1 \geq k_2 > 0$ o bien $k_2 \leq k_1 < 0$.
- **Parabólico** si $K_p = 0$, $H_p \neq 0$, es decir, si $k_1 > k_2 = 0$ o $k_2 < k_1 = 0$.
- **Planar** si $K_p = H_p = 0$.

Cabe observar que la clasificación no depende de la elección de normal, puesto que si cambia la orientación del normal, cambian tanto k_1 como k_2 en signo, luego K_p no varía.

Definición 43. Un punto se dice **umbilical** si $k_1 = k_2$. En un tal punto, $\mathcal{F}_p(w) = kw$. Es fácil ver, desarrollando, que es umbilical si y solo si $H_p^2 = K_p$. Solo puede ser elíptico o planar. Asimismo en un tal punto, $e = kE$, $f = kF$ y $g = kG$, dado que la matriz del operador es kI. (Es una equivalencia).

Proposición 21. *Sea S una superficie regular conexa.*

1. *Si todos los puntos de S son planares, entonces S está contenida en un plano.*
2. *Si todos los puntos de S son umbilicales, S está en una esfera o en un plano.*

Demostración. Si todos son umbilicales, entonces $\forall p \in S$ se tiene $k_p(w) = \lambda_p = k_1 = k_2$ constante para todo $w \in T_pS$, $\|w\| = 1$. Por tanto, $\mathcal{F}_p(w) = \lambda_p w$, con λ_p diferenciable por ser $\mathcal{F}_p$ diferenciable. Comprobaremos que λ_p es una función constante en p. Dado $q = \mathbf{X}(u,v)$, el par $\{X_u, X_v\}$ es una base de T_qS. Sea $w = a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v$ en T_qS. Entonces $\mathcal{F}_q(w) = -aN_u - bN_v = a\lambda_q\mathbf{X}_u + b\lambda_q\mathbf{X}_v$. Por tanto, $\mathbf{N}_u(u,v) = -\lambda(u,v)\mathbf{X}_u(u,v)$ y $\mathbf{N}_v(u,v) = -\lambda(u,v)\mathbf{X}_v(u,v)$.

Derivando, ambas expresiones de forma cruzada (la primera respecto de v, la segunda respecto de u) y restando, sigue que $0 = \lambda_v(u,v)\mathbf{X}_u(u,v) - \lambda_u(u,v)\mathbf{X}_v(u,v)$. Por lo tanto, $\lambda_v(u,v) = \lambda_u(u,v) = 0$, y por tanto λ es constante en todo punto. Es decir, $\lambda(u,v) = \lambda_0$, constante.

Si $\lambda_0 = 0$, lo cual ocurre si todos los puntos son planares, entonces $\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_v = 0$ en todo punto, luego $\mathbf{N}$ es constante, digamos $\mathbf{N}_0$ y entonces $(\mathbf{X}\mathbf{N}_0)_u = \mathbf{X}_u\mathbf{N}_0 + \mathbf{X}(\mathbf{N}_0)_u = 0$, y análogamente $(\mathbf{X}\mathbf{N}_0)_v = 0$ luego $\mathbf{X}\mathbf{N}_0$ es constante. Evaluando en las coordenadas de p un punto cualquiera, sigue que $\mathbf{X}\mathbf{N}_0 = p\mathbf{N}_0$ luego $(\mathbf{X} - p)\mathbf{N}_0 = 0$ y por tanto es un plano. □

Si $\lambda_0 \neq 0$, entonces lo que se tiene es $\mathbf{N}_u = -\lambda_0\mathbf{X}_u$, luego $\mathbf{X}_u + \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{N}_u = 0$, es decir, $(\mathbf{X} + \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{N})_u = 0$. Análogamente para la v. Por lo tanto, $\mathbf{X} + \frac{1}{\lambda_0} = a$ constante, lo que indica que $\mathbf{X} - a = -\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{N}$, y por tanto $\|\mathbf{X} - a\| = |\frac{1}{\lambda_0}|$ y está en una esfera. □

4.4. Curvas en superficies

4.4.1. Triedro de Darboux

Vamos a analizar unas curvas especiales sobre las superficies: las líneas de curvatura, las curvas asintóticas y las geodésicas. Para ello presentaremos un marco común, el *triedro de Darboux*, en el que aparecen estas curvas.

En lo que sigue, $\gamma(s) : I \to S$ es una curva por longitud de arco sobre una superficie regular S. Vista como curva en el espacio, tenemos en cada punto su triedro de Frenet: $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, que recordemos está dado por:

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s),$$
$$\mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)},$$
$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

y es ortonormal, positivamente orientado y verifica las fórmulas de Frenet (ver sección de curvas).

Para el triedro de Darboux, atenderemos ahora a que la traza de γ está en una superficie S.

Definición 44. Se define el **triedro de Darboux** como sigue:

El **vector tangente** es $\mathbf{t}_\gamma = \gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S$, que coincide con el usual dado que por definición ya es tangente a S.

El **vector normal** es $\mathbf{N}_{\gamma(s)}$, el vector normal unitario a S en $\gamma(s)$. En este caso el normal en vez de reflejar cómo cambia el tangente, simplemente es aquel ortogonal a S.

El **vector conormal** es $\mathbf{C}_\gamma(s) = \mathbf{t}_\gamma(s) \times \mathbf{N}_{\gamma(s)}$. Obsérvese que por definición también está en $T_{\gamma(s)}S$.

Para expresar las derivadas de estos vectores en función de este triedro, sabemos de la sección de curvas que, por ser un triedro ortonormal, ha de verificarse:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{C}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

Para ciertos A, B, C. Es decir, la matriz que relaciona ambos elementos es antisimétrica. Recordemos que esto es así porque si $v \cdot v = 1$, entonces $v' \cdot v = 0$, y por otro lado si $v \cdot w = 0$, entonces $v \cdot w' = -v' \cdot w$.

Tenemos del lema de Meusnier que $\gamma''(s) \cdot \mathbf{N}_{\gamma(s)} = II_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = k_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$, al ser $\gamma'(s)$ unitario. Como $\gamma''(s) = \mathbf{t}'(s)$, entonces sigue que:

$$A = \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = k_{\gamma(s)}(\gamma'(s)).$$

Lo denotaremos k_n. Denotaremos también:

$$B = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{C} \equiv k_g,$$
$$-C = -\mathbf{N}' \cdot C \equiv t_g.$$

Se denominan **curvatura normal** (k_n), **curvatura geodésica** (k_g) y **torsión geodésica** (t_g).

- Si $k_n \equiv 0$ en todo punto, entonces γ'' no tiene componente normal, es decir, $\gamma''||\mathbf{C}$, dado que $\gamma'' = \mathbf{t}'$ solo tiene componentes en dirección de $\mathbf{N}$ y $\mathbf{C}$. Tales curvas se denominan **asintóticas**.
- Si $k_g \equiv 0$, entonces $\mathbf{t}'||\mathbf{N}$ por la misma discusión de antes, y por tanto la curva acelera solamente en dirección normal a la superficie. Tales curvas se denominan **geodésicas**. Para un *habitante de la superficie*, son como *rectas*: no aceleran dentro de la superficie, sino ortogonalmente a ella.
- Si $t_g \equiv 0$ en todo punto, entonces $\mathbf{N}' = -k_n\mathbf{t}$, y por tanto $\mathcal{F}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = \mathbf{N}'(\gamma(s))||\gamma'(s)$ y, por tanto, $\gamma'(s)$ es una dirección principal. La curva recorre direcciones principales (se mueve por las direcciones de máxima curvatura). Tales curvas se denominan **líneas de curvatura**.

Si elegimos $\mathbf{N}$ en el otro sentido, entonces también lo hace $\mathbf{C}$, y por tanto, es fácil ver que cambia el signo de k_n y k_g, pero no el de t_g.

Proposición 22. *Se tiene que* $t_g(0) = \mathcal{F}_p(w) \cdot \boldsymbol{C}(0)$ *para una curva* γ *que pase por* p *en tiempo* 0 *con dirección* w*. Por tanto, la torsión geodésica, al igual que la curvatura normal, solo depende de la dirección de paso por el punto.*

Demostración. Observemos como se relaciona con el operador de forma. Dada $w \in T_pS$, y pongamos $\gamma(s)$ por longitud de arco, pasando por p en tiempo 0 y con $\mathbf{t}(0) = w$. Entonces, $\mathcal{F}_p(w) = -\mathbf{N}'(\gamma(0)) = k_n\mathbf{t}(0) + t_g\mathbf{C}(0)$, y se tiene lo que se quería. $\square$

Por otro lado, la curvatura geodésica no depende solo de la superficie y la dirección de paso, sino también de la curva en sí. Como $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ y $\mathbf{t}' = k_n\mathbf{N} + k_g\mathbf{C}$, entonces tenemos la relación siguiente, tomando norma:

$$\kappa^2 = k_n^2 + k_g^2.$$

Como k_n depende solo de superficie y dirección, entonces es obligatorio que k_g no lo haga, dado que sabemos que κ no lo hace. Asimismo, sigue que para una curva que pasa por un punto de una superficie con una dirección dada, la menor κ posible es $|k_n|$, y lo hace en caso de que sea una geodésica.

Obsérvese que, en una curva asintótica, como $k_n = 0$, entonces $\mathbf{t}'||\mathbf{C}$, luego tenemos la siguiente relación entre el triedro de Frenet y el de Darboux: $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = (\mathbf{t}, \pm\mathbf{C}, \mp\mathbf{N})$, y se tiene $\kappa_\gamma = |k_g|$ y $\tau_\gamma = t_g$.

Del mismo modo, en una geodésica, como $k_g = 0$, entonces $\mathbf{t}'||\mathbf{N}$ y por tanto $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = (\mathbf{t}, \pm\mathbf{N}, \pm\mathbf{C})$ y entonces $\kappa_\gamma = |k_n|$ y $\tau_\gamma = t_g$.

4.4.2. Direcciones principales

Observación 21 (Cálculo de direcciones principales en coordenadas locales). Damos un punto $p \in S$ y una carta en un entorno, $\mathbf{X}$. Consideramos como siempre la base habitual de T_pS, $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$. Para hallar las direcciones principales, planetamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Recordemos que la matriz de $\mathcal{F}_p$ que ahí aparece es $M_I^{-1}M_{II}$, siendo M_I la matriz de la primera forma fundamental y M_{II} la de la segunda, todas en la base ya mencionada. Despejando:

$$(M_I^{-1}(M_{II} - \lambda M_I)) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, lo que hace falta es que $\det(M_{II} - \lambda M_I) = 0$. Las soluciones (autovalores) son por tanto los λ tales que $0 = (e - \lambda E)(g - \lambda G) - (f - \lambda F)^2$, y los autovectores se obtienen una vez ya se tienen los autovalores λ (curvaturas principales), como es usual.

4.4.3. Direcciones asintóticas

Definición 45. Dado $p \in S$, decimos que $w \in T_pS$, con $\|w\| = 1$, es una **dirección asintótica** si $k_p(w) = 0$.

A continuación discutimos cuántas direcciones asintóticas hay, si es que las hay:

Observación 22. Conviene utilizar la base de direcciones principales. Escribimos $w = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, con θ el ángulo entre e_1 y w. Entonces w es asintótica si θ verifica:

$$k_p(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = 0$$

- Si p es un punto elíptico ($K_p > 0$), entonces $k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \gtrless 0$, al tener k_1 mismo signo que k_2, luego no hay direcciones asintóticas.
- Si p es parabólico, si $k_1 = 0, k_2 < 0$, entonces hay dos direcciones asintóticas: $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Si $k_1 > 0$, $k_2 = 0$, entonces son las de $\theta = \frac{\pi}{2}$, o $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
- Si p es planar, todas son asintóticas.
- Si p es hiperbólico, podemos escribir la ecuación original como $-\frac{k_1}{k_2} = \tan^2\theta$. Como $-\frac{k_1}{k_2} > 0$, entonces hay 2 posibles tangentes, cada una con 2 posibles ángulos: 4 soluciones.

Observación 23 (Direcciones asintóticas en coordenadas locales). Sea $\mathbf{X}(u, v)$ una carta en $p \in S$ y consideramos como es habitual la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ de T_pS. Tomamos $w \in T_pS$ con $\|w\| = 1$, es decir:

$$w = x\mathbf{X}_u + y\mathbf{X}_v$$
$$x^2E + 2xyF + y^2G = 1$$

Entonces w es asintótica en p si $x^2e + 2xyf + y^2g = 0$, es decir, si la segunda forma fundamental se anula. Basta con obtener una dirección que verifique esta ecuación, y luego normalizar el vector resultante.

4.4.4. Curvas asintóticas

Una curva γ en S es asintótica si para todo $t \in I$, se tiene $\ddot{\gamma}(t) \cdot \mathbf{N}_{\gamma(t)} = 0$, es decir, si:

$$\mathcal{F}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

O bien $\dot{\gamma}$ siempre es múltiplo de una dirección asintótica. Buscamos las condiciones para que la curva $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ sea asintótica. Escribimos $\dot{\gamma} = \dot{u}\mathbf{X}_u + \dot{v}\mathbf{X}_v$. Entonces:

$$\mathcal{F}_\gamma(\dot{\gamma}) = \mathcal{F}_\gamma(\mathbf{X}_u)\dot{u} + \mathcal{F}\gamma(\mathbf{X}_v)\dot{v}$$

Multiplicando por $\dot{\gamma}$, la condición de asintoticidad es:

$$e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0$$

En todo t por el que pase la curva.

4.4.5. Líneas de curvatura

Una curva γ en S es **línea de curvatura** si para todo $t \in I$, se tiene que $\dot{\gamma}(t)$ es paralelo a una dirección principal en $\gamma(t)$. Es decir, $\dot{\gamma}(t)$ es **autovector** no nulo de $\mathcal{F}_{\gamma(t)}$.

Por ejemplo, en el plano, como $\mathcal{F} = 0$ en todo punto, todas las líneas son de curvatura. En la esfera también, dado que $\mathcal{F} = \lambda \cdot I$ en todo punto.

Dada la carta $\mathbf{X}$, buscamos condiciones para que $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ sea línea de curvatura. Queremos escribir en coordenadas la condición, que puede formularse como $\mathcal{F}_\gamma(\dot{\gamma}) \times \dot{\gamma} = 0$.

Tenemos entonces que $\dot{\gamma} = \mathbf{X}_u\dot{u} + \mathbf{X}_v\dot{v}$, y $\mathcal{F}_\gamma(\dot{\gamma}) = (\dot{u}A + \dot{v}C)\mathbf{X}_u + (\dot{u}B + \dot{v}D)\mathbf{X}_v$. Entonces:

$$\mathcal{F}_\gamma(\dot{\gamma}) \times \dot{\gamma} = (\dot{v}(\dot{u}A + \dot{v}C) - \dot{u}(\dot{u}B + \dot{v}D))(\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v).$$

Es decir, hace falta que ese coeficiente sea nulo, o lo que es lo mismo:

$$-\dot{u}^2 B + \dot{v}^2 C + \dot{u}\dot{v}(A - D) = 0$$

Si obtenemos A, B, C, D en términos de e, E, f, F, g, G como sabemos, se sustituye en la ecuación y se obtiene:

$$(eF - fE)\dot{u}^2 + (fG - gF)\dot{v}^2 + (eG - gE)\dot{u}\dot{v} = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

5. Geometría intrínseca

Hasta ahora, para estudiar una superficie regular S, hemos dado coordenadas locales en un entorno de un punto a través de una carta $\mathbf{X}$, que daban lugar a las funciones E, F, G, permitiendo medir longitudes, ángulos y áreas. Las cantidades que dependan únicamente de esas funciones se denominan **intrínsecas**: un *habitante de la superficie* podría medir longitudes, ángulos y áreas en la misma.

Por otro lado, las funciones e, f, g permitían estudiar cómo se curva S como objeto inscrito en un espacio ambiente, $\mathbb{R}^3$, utilizando para ello el vector normal, que se sale de la superficie. En principio, un *habitante de la superficie* no podría obtenerlas, dado que se requiere *salir de ella*. No obstante, vamos a ver que ciertos aspectos que a priori no parecen intrínsecos, lo son. Es decir, solo con medidas dentro de la superficie, se pueden conocer.

Definición 46. Sea S superficie regular y $V \subset S$ abierto en S. Una función $f : V \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en $p \in V$ si, dada una carta $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, con $p \in \mathbf{X}(U) \subset V$, se tiene que la función:

$$f \circ \mathbf{X} : U \to \mathbb{R}$$

es diferenciable.

Como los cambios de carta son difeomorfismos, basta con pedirlo para una carta $\mathbf{X}$, y se tendrá automáticamente para todas las demás.

Definición 47. Sean S y $\overline{S}$ dos superficies regulares. Una aplicación continua $f : S \to \overline{S}$ es **diferenciable** si para cada $p \in S$ se tienen cartas $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $\overline{\mathbf{X}} : \overline{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{S}$, con $p \in \mathbf{X}(U)$, $f(p) \in \overline{\mathbf{X}}(U)$, y además $f(\mathbf{X}(U)) \subset \overline{\mathbf{X}}(\overline{U})$, de tal modo que:

$$h = \overline{\mathbf{X}}^{-1} \circ f \circ \mathbf{X} : U \to \overline{U}$$

es diferenciable.

Observación 24 (Ejemplo: La aplicación de Gauss). Sea S una superficie regular. La aplicación de Gauss, $\mathcal{G}$, asocia a cada punto $p \in S$, su vector normal N_p unitario. Es decir, va sobre la esfera unidad $\mathbb{S}^2$.

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|}$$

Dada una carta local $\mathbf{X} : U \to S$, y estando las derivadas parciales evaluadas en (u, v), las coordenadas de p.

Por ejemplo, si S es un plano, $\mathcal{G}$ es constante y vale el polo norte de la esfera. Si S es la propia esfera unidad, y tomamos el normal hacia fuera, entonces $\mathcal{G}$ es la identidad. Si S es el cilindro unidad, entonces $\mathcal{G}$ toma valores en el ecuador. Para una superficie S de revolución alrededor de OZ, la imagen es la esfera unidad menos, a lo sumo, dos casquetes polares. (Dado que tenemos todas las rotaciones de cada vector normal, es decir, cada paralelo está completo)

Definición 48. Dadas S y $\overline{S}$ dos superficies regulares, una aplicación $f : S \to \overline{S}$ se denomina **difeomorfismo** si es biyectiva y tanto f como $f^{-1} : \overline{S} \to S$ son diferenciables. Asimismo, f es un **difeomorfismo local** si para cada $p \in S$, hay un abierto $V \subset S$ que contiene a p tal que $f(V)$ es abierto en $\overline{S}$ y $f|_V$ es difeomorfismo.

Observación 25 (Ejemplo). Sea S el plano YZ, y $\overline{S}$ el cilindro unidad con eje OZ. Consideramos $f : S \to \overline{S}$ dada por: $f(0, y, z) = (\cos y, \sin y, z)$. Claramente no es inyectiva (aunque sí sobreyectiva): el plano se *enrolla* infinitas veces en el cilindro. No obstante, cogiendo el abierto $(a, 2\pi + a) \times \mathbb{R}$, la aplicación es biyectiva y con inversa diferenciable. Por tanto es difeomorfismo local.

Definición 49. Una aplicación diferenciable $f : S \to \overline{S}$ induce en cada punto $p \in S$ la que se conoce como **aplicación tangente** $T_p f : T_p S \to T_{f(p)}\overline{S}$ que lleva de manera natural vectores tangentes de una superficie en otra:

$$T_p f(w) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$$

Siendo $\alpha(t)$ una curva con traza en S, $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = w$.

Es fácil comprobar que la definición es correcta, es decir, que independientemente de la curva α elegida, se obtiene el mismo vector tangente, así como que es lineal.

Proposición 23. *Tomadas cartas $\boldsymbol{X}$ y $\overline{\mathbf{X}}$, la matriz de $T_p f$ en las bases inducidas por esas cartas es:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Siendo $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ la expresión en coordenadas de f con esas cartas.

Demostración. $T_p f(\mathbf{X}_u) = (f \circ \mathbf{X})_u = (\overline{\mathbf{X}} \circ h)_u = \overline{\mathbf{X}}_x \frac{\partial x}{\partial u} + \overline{\mathbf{X}}_y \frac{\partial y}{\partial u}$. Análogo para $\mathbf{X}_v$. □

Observación 26. Dado el difeomorfismo $f : S \to \overline{S}$, tomamos una carta $\mathbf{X}$ en S, y consideramos la carta $\overline{X} = f(\overline{X})$ de $\overline{S}$. Es carta por ser f difeomorfismo. En este caso $h(u, v) = (u, v)$, es decir, se usan las mismas coordenadas para localizar los puntos de S y de $\overline{S}$: p y $f(p)$ comparten coordenadas. Usando la proposición anterior, tenemos que $T_p f$ tiene como matriz la identidad (es decir, un vector con coordenadas en $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ tendrá las mismas coordenadas en $\overline{\mathbf{X}}_u, \overline{\mathbf{X}}_v$).

Observación 27. La aplicación tangente de la aplicación de Gauss es el operador de forma.

5.1. Isometrías

Definición 50. Un difeomorfismo $f : S \to \bar{S}$ es una **isometría local** si conserva la longitud de los vectores tangentes. Es decir, si $\forall p \in S, w \in T_p S$, se tiene que:

$$\|T_p f(w)\| = \|w\|$$

Como el producto escalar puede escribirse en términos de normas (*identidad de polarización*), entonces también preservan productos escalares en $T_p S$.

Proposición 24. *Una isometría $f : S \to \bar{S}$ preserva longitudes de curvas. Es decir, la longitud de γ en S es la misma que la de $f \circ \gamma$ en $\bar{S}$.*

Demostración. Sea $\gamma : (a, b) \to S$. Tenemos que $L(f \circ \gamma) = \int_a^b \left\| f \dot{\circ} \gamma(t) \right\| dt = \int_a^b \left\| T_{\gamma(t)} f(\dot{\gamma}(t)) \right\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = L(\gamma)$. □

Observación 28. Supongamos $F(v) = Rv + a$, con R matriz ortogonal, como función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Sabemos que este tipo de movimientos rígidos son isometrías de $\mathbb{R}^3$ (no dentro de una superficie). Si además se da que $F|_S : S \to \mathbb{R}^3$ es biyectiva con S como imagen, entonces es una isometría local, al conservar todas las medidas (no solo las de S).

Así, por ejemplo, en la esfera unidad, todas las rotaciones de $\mathbb{R}^3$ o simetrías de planos por el origen, son isometrías. En general, si S es una superficie de revolución en torno al eje Z, todas las rotaciones en torno a dicho eje son isometrías locales en S.

Proposición 25. *Si $f : S \to \bar{S}$ es un difeomorfismo local, se tiene que además es isometría local si y solo si para toda carta de S, $\boldsymbol{X} : U \to S$, construida la carta $\bar{\boldsymbol{X}} = f \circ \boldsymbol{X} : U \to \bar{S}$, se verifica que:*

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v)$$
$$F(u, v) = \bar{F}(u, v)$$
$$G(u, v) = \bar{G}(u, v)$$

Demostración. Para $\implies$, dado $p \in S$ con coordenadas (u, v), tomamos la base de T_pS dada por $\mathbf{X}$, y en $f(p) \in \bar{S}$, que tiene las mismas coordenadas, tomamos la base de $T_{f(p)}S$ dada por $\bar{\mathbf{X}}$. Entonces, $\bar{E} = \bar{\mathbf{X}}_u\bar{\mathbf{X}}_u = T_pf(\mathbf{X}_u) \cdot T_pf(\mathbf{X}_u) = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u = E$, donde hemos usado que las isometrías preservan producto escalar. Análogo para F, G.

Para $\impliedby$, las condiciones del enunciado aseguran que $T_pf(w)T_pf(z) = w \cdot z$ en todo $p \in S$, para w,z siendo $\mathbf{X}_u$ o $\mathbf{X}_v$. Pero entonces, como T_pS es bilineal, la igualdad ha de satisfacerse para cualesquiera vectores w, z al ser $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ una base. $\square$

Observación 29. Si $\mathbf{X} : U \to S$, $\bar{\mathbf{X}} : U \to \bar{S}$, y se verifica que tienen misma E, F, G, entonces podemos fabricar automáticamente la isometría $f = \bar{\mathbf{X}} \circ \mathbf{X}^{-1} : \mathbf{X}(U) \to \bar{S}$.

5.2. Geodésicas

Recordemos que una curva $\gamma(t) \subset S$ es una **geodésica** si $k_g = 0$, es decir, si $\ddot{\gamma}(t)||\mathbf{N}_{\gamma(t)}$ en todo punto $t \in I$. Esta última es la definición de geodésica, pero veremos que ambas equivalen.

Esta definición depende de cómo se recorre la traza (aceleración), no solo de la traza. Por tanto a priori no podemos parametrizarla por longitud de arco, puesto que puede perderse la propiedad de $\ddot{\gamma}$.

Proposición 26. *Si $\gamma(t)$ es una geodésica de S, entonces su rapidez $\|\dot{\gamma}(t)\|$ es constante.*

Demostración. Por definición, $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}S$, y además $\ddot{\gamma}(t)||\mathbf{N}_{\gamma(t)}$ al ser geodésica, luego $\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}(t)\| = 2\dot{\gamma}(t)\ddot{\gamma}(t) = 0$. $\square$

Con esto, ya podemos siempre asumir que las geodésicas se recorren por longitud de arco, dado que podemos definir $\eta(t) = \gamma(\frac{t}{\|\dot{\gamma}\|})$, dado que entonces η está en longitud de arco y además su aceleración es paralela a la de γ, al ser $\|\dot{\gamma}\|$ constante. (Es fácil verlo derivando).

Para ver que ser geodésica equivale a $k_g = 0$, como está por longitud de arco, $\gamma'' = k_n\mathbf{N} + k_g\mathbf{C}$. Si es geodésica, entonces $k_g = \gamma'' \cdot \mathbf{C} = 0$. Asimismo, si $k_g = 0$, entonces $\gamma''||\mathbf{N}$.

Observación 30 (Geodésicas en coordenadas locales). Dada $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$, queremos para que sea geodésica que $\ddot{\gamma}||\mathbf{N}$, es decir, $\ddot{\gamma}||\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$. Esto equivale a que $\ddot{\gamma} \cdot \mathbf{X}_u = 0$ y que $\ddot{\gamma} \cdot \mathbf{X}_v = 0$ a lo largo de la curva.

Como $\dot{\gamma} = \dot{u}\mathbf{X}_u + \dot{v}\mathbf{X}_v$, tenemos que:

$$\ddot{\gamma} = \ddot{u}\mathbf{X}_u + \ddot{v}\mathbf{X}_v + \dot{u}^2\mathbf{X}_{uu} + \dot{v}^2\mathbf{X}_v v + 2\dot{u}\dot{v}\mathbf{X}_{uv}$$

Como $\mathbf{X}_u\mathbf{X}_u = E$, entonces $\mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_u = \frac{E_u}{2}$, y $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_u = \frac{E_v}{2}$.

Como $\mathbf{X}_v\mathbf{X}_v = G$, entonces $\mathbf{X}_{vv}\mathbf{X}_v = \frac{G_v}{2}$, y $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v = \frac{G_u}{2}$.

Como $\mathbf{X}_u\mathbf{X}_v = F$, entonces $\mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_u = F_u$, y $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_{vv}\mathbf{X}_u = F_v$. Utilizando las expresiones previas para eliminar los términos cruzados, sigue que: $\mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_v = F_u - \frac{E_v}{2}$, así como que $\mathbf{X}_{vv} \cdot \mathbf{X}_u = F_v - \frac{G_u}{2}$

Por lo tanto, se tiene que $\ddot{\gamma}\mathbf{X}_u = \ddot{u}E + \ddot{v}F + \dot{u}^2(\frac{E_u}{2}) + \dot{v}^2(F_v - \frac{G_u}{2}) + 2\dot{u}\dot{v}\frac{E_v}{2}$. Además $\ddot{\gamma}\mathbf{X}_v = \ddot{u}F + \ddot{v}G + \dot{u}^2(F_u - \frac{E_v}{2}) + \dot{v}^2(\frac{G_v}{2}) + 2\dot{u}\dot{v}\frac{G_u}{2}$

Esas 2 expresiones han de anularse para obtener la geodésica:

$$\begin{cases} \ddot{u}E + \ddot{v}F + \dot{u}^2(\frac{E_u}{2}) + \dot{v}^2(F_v - \frac{G_u}{2}) + 2\dot{u}\dot{v}\frac{E_v}{2} = 0 \\ \ddot{u}F + \ddot{v}G + \dot{u}^2(F_u - \frac{E_v}{2}) + \dot{v}^2(\frac{G_v}{2}) + 2\dot{u}\dot{v}\frac{G_u}{2} = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones diferenciales admiten una solución única local dado un punto y una dirección iniciales. Es decir, en cada punto y dirección pasa una geodésica local, única.

Obsérvese que en la ecuación de las geodésicas solo intervienen las funciones de la primera forma fundamental, a diferencia de las líneas de curvatura y curvas asintóticas.

Proposición 27. *Las isometrías $f : S \to \bar{S}$ llevan geodésicas de S en geodésicas de $\bar{S}$.*

Demostración. Damos γ geodésica de S y p un punto. Tomamos la carta $\mathbf{X} : U \to S$ con $p \in \mathbf{X}(U)$. Ponemos $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$, con u, v satisfaciendo las ecuaciones de las geodésicas. Tomamos la carta $\bar{\mathbf{X}} = f \circ \mathbf{X}$, que al ser f isometría mantiene la primera forma fundamental. La imagen $\bar{\gamma} = f(\gamma) = f(\mathbf{X}(u, v)) = \bar{\mathbf{X}}(u, v)$ debe por tanto satisfacer las mismas ecuaciones de la geodésica. □

5.3. Curvatura gaussiana en coordenadas

Supongamos una carta para la que $F = 0$.
Como $\mathbf{X}_u\mathbf{X}_u = E$, entonces $\mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_u = \frac{E_u}{2}$, y $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_u = \frac{E_v}{2}$.
Como $\mathbf{X}_v\mathbf{X}_v = G$, entonces $\mathbf{X}_{vv}\mathbf{X}_v = \frac{G_v}{2}$, y $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v = \frac{G_u}{2}$.
Como $\mathbf{X}_u\mathbf{X}_v = 0$, entonces $\mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_u = 0$, y $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_{vv}\mathbf{X}_u = 0$. Utilizando las expresiones previas para eliminar los términos cruzados, sigue que: $\mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_v = -\frac{E_v}{2}$, así como que $\mathbf{X}_{vv} \cdot \mathbf{X}_u = -\frac{G_u}{2}$

Con ello vamos a calcular $\mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_{vv} - \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv}$. Como $\mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_v = -\frac{1}{2}E_v$. Entonces $-\frac{1}{2}E_{vv} = \mathbf{X}_{uuv}\mathbf{X}_v + \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_{vv}$. Asimismo como $\mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_v = \frac{1}{2}G_u$, entonces $\frac{1}{2}G_{uu} = \mathbf{X}_{uuv}\mathbf{X}_v + \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv}$. Restando ambas se obtiene la cantidad planteada.

Otra forma de calcular ese valor es tomar la base $\{\frac{\mathbf{X}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}}, \mathbf{N}\}$ ortonormal (al ser $F = 0$.) Si en esa base se tiene $\mathbf{X}_{uu} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\mathbf{X}_{vv} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\mathbf{X}_{uv} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

Se puede obtener cada coeficiente multiplicando el vector correspondiente por el de la base cuyo coeficiente se quiere obtener, y usando las relaciones de los productos escalares ya conocidas. Una vez hecho eso, se multiplica para obtener:

$$\mathbf{X}_{uu} - \mathbf{X}_{vv} - \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv} = -\frac{1}{4}(\frac{E_uG_u + E_v^2}{2} + \frac{E_vG_v + G_u^2}{2}) + (eg - f^2).$$

Igualando esta expresión con la previa y despejando, se obtiene una fórmula para $(eg - f^2)$ que solo depende de las cantidades intrínsecas E, F, G. Es decir, la **curvatura gaussiana (en este caso) es intrínseca**.

Gauss demostró asimismo que si $F \neq 0$ también se puede expresar la curvatura gaussiana de manera intrínseca. Cabe observar que e, f y g no son intrínsecos, ni tampoco la curvatura media. Por ejemplo, tanto el plano como el cilindro tienen la misma primera forma fundamental, pero esas cantidades difieren. Lo que es intrínseco es la curvatura gaussiana.

5.4. Teorema Egregio

Teorema 4 (Egregio de Gauss)**.** *Si una superficie curvada se desarrolla sobre otra superficie cualquiera, la medida de la curvatura en cada punto permanece inalterada.*

Así es como Gauss lo enunció. En terminología moderna:

Teorema 5. *Sea $f : S \to \bar{S}$ una isometría local entre dos superficies regulares. Entonces, en todo punto $p \in S$ se tiene que $K_p = \bar{K}_{f(p)}$.*

Demostración. Tras la isometría, si consideramos las cartas $\mathbf{X}$ y $f \circ \mathbf{X}$, no cambian E, F ni G, por tanto, tampoco lo hace la curvatura gaussiana, según la discusión de la sección previa. $\square$