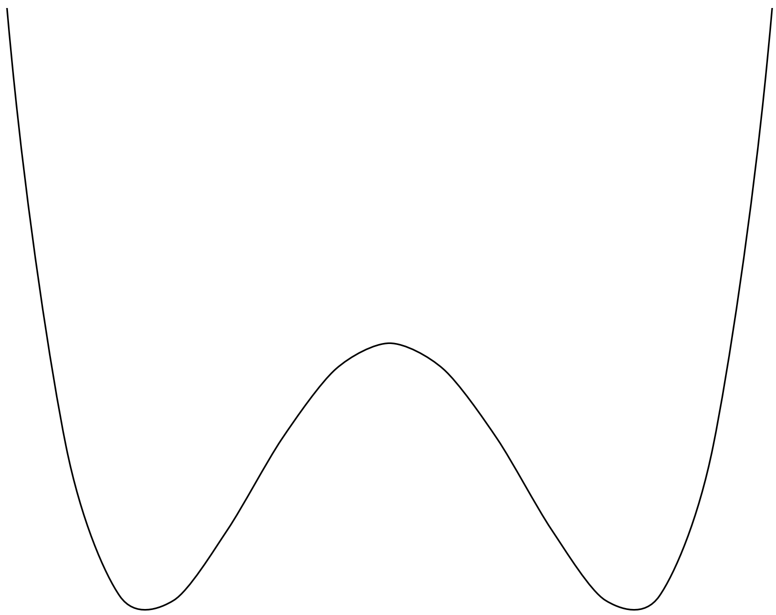
Cálculo I

Miguel González

Enero 2018



Revisado en 2020

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Cálculo I del grado en matemáticas, tomados en Enero 2018 por Miguel González. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Cálculo I

En esta asignatura se presenta la pieza clave del análisis real: el concepto de límite. Con él, se adquiere la capacidad de pensar en el *continuo* de números que conforman los reales. Esta capacidad de razonar con conjuntos de números en los que hay infinidad de elementos entre dos distintos cualesquiera, por cercanos que sean, resulta crucial a lo largo de la formación matemática. Tras ello, se introducen las derivadas y las integrales, potentes herramientas que, pese a existir por motivos iniciales diferentes, acaban estrechamente conectadas con el resultado principal del temario: el *teorema fundamental del cálculo*.

Requisitos previos

1. Nociones elementales de notación matemática.

Índice

1. Los números reales **4**
1.1. Propiedades de las aplicaciones de adición y multiplicación . . . 4
1.2. Propiedades de orden de los reales . . . 4
1.3. Propiedad de completitud, supremo e ínfimo . . . 5
1.4. Propiedades de los naturales . . . 6
1.5. La recta real . . . 7
1.5.1. Notación de intervalos . . . 7
1.6. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ . . . 7
1.7. Valor absoluto . . . 8
1.7.1. Propiedades del valor absoluto . . . 8

2. Sucesiones y límites. **9**
2.1. Límite de una sucesión . . . 9
2.1.1. Ejemplos de límites . . . 9
2.2. Propiedades de límites . . . 9
2.2.1. Aplicaciones del teorema de compresión . . . 10
2.3. Sucesiones monótonas . . . 12
2.4. Subsucesiones . . . 13
2.4.1. Teorema de Bolzano-Weierstrass . . . 13
2.5. Criterio de Cauchy . . . 14
2.6. Sucesión divergente . . . 14
2.7. Sucesiones recurrentes . . . 15

3. Series numéricas **16**
3.1. Propiedades de series . . . 16
3.2. Criterio de Cauchy para series . . . 17
3.3. Convergencia absoluta . . . 17
3.4. Criterios de convergencia para series de términos positivos . . . 17
3.4.1. Teorema de comparación . . . 18
3.4.2. Teorema de comparación en el límite . . . 18
3.4.3. Teorema de condensación . . . 18
3.4.4. Criterio de la raíz . . . 19
3.4.5. Criterio del cociente . . . 20
3.5. Series alternadas . . . 20
3.6. Representación binaria . . . 21

4. Funciones **22**
4.1. Función, dominio, gráfica . . . 22
4.2. Límite de una función . . . 22
4.2.1. Propiedades de los límites . . . 23
4.2.2. Límites de polinomios . . . 23
4.2.3. Resultados acerca de límites . . . 23
4.2.4. Límites laterales . . . 24
4.2.5. Límites en el infinito . . . 25
4.2.6. Límites igual a infinito . . . 25
4.2.7. Límites de funciones trigonométricas . . . 26
4.3. Continuidad . . . 26
4.3.1. Composición de funciones . . . 27

4.3.2. Teorema de Weierstrass . . . 28
4.3.3. Teorema de los valores intermedios . . . 28
4.3.4. Teorema de Bolzano . . . 28
4.3.5. Función inversa y continuidad . . . 29
4.3.6. Cambio de variable . . . 29
4.4. Monotonía de funciones . . . 29
4.5. Continuidad uniforme . . . 31

5. Derivabilidad **32**
5.1. Propiedades de las derivadas . . . 32
5.1.1. Derivada de las funciones seno, coseno y tangente . . . 34
5.1.2. Derivada de la función inversa . . . 34
5.2. Extremos relativos . . . 34
5.3. Teoremas de Rolle y del valor medio . . . 35
5.4. Valor medio generalizado y regla de l'Hôpital . . . 36
5.5. Intervalos de crecimiento . . . 37
5.6. Polinomios de Taylor . . . 37
5.7. Convexidad . . . 39

6. Integral Riemann **41**
6.1. Conceptos básicos . . . 41
6.2. Propiedades . . . 42
6.2.1. Teorema fundamental del cálculo . . . 44
6.2.2. La función logaritmo . . . 45
6.3. Integral indefinida . . . 46
6.3.1. Tabla de integrales indefinidas . . . 47
6.3.2. Regla de integración por partes y composición de funciones . . . 48
6.3.3. Sustitución en integrales indefinidas y cambio de variable en la integral . . . 48
6.4. Integrales impropias . . . 48
6.4.1. Criterio de la integral . . . 49

1. Los números reales

El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$. Se trata de los números que informalmente entendemos como *números con decimales*, y su construcción rigurosa conlleva ideas avanzadas que superan el nivel de esta asignatura. Por el momento, basta con saber que en $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones que se denominan adición ($A(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$, denotado en adelante $x + y$) y multiplicación ($M(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$, denotado en adelante $x \cdot y$ o xy). Es decir:

- $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $M : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1.1. Propiedades de las aplicaciones de adición y multiplicación

Estas aplicaciones cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ (Conmutativa de la adición)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociativa de la adición)
3. $\exists! 0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall a \in \mathbb{R},\ a + 0 = a$ (Elemento neutro de la adición)
4. $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists(-a) \in \mathbb{R}$ t.q. $a + (-a) = 0$ (Inverso aditivo)[1]
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = ba$ (Conmutativa de la multiplicación)
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (ab) \cdot c = a(bc)$ (Asociativa de la multiplicación)
7. $\exists! 1 \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 1 = a$ (Elemento neutro de la multiplicación)
8. $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R},\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ t.q. $a \cdot a^{-1} = 1$ (Inverso multiplicativo)[2]
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac$ (Distributiva de la multiplicación respecto de la adición)

Que dotan a $\mathbb{R}$ de lo que se conoce como *estructura de cuerpo*. Únicamente de estas propiedades se deducen fácilmente (ejercicio) los siguientes resultados conocidos:

Proposición 1. *Si $x, a \in \mathbb{R}$ y $x + a = a$, entonces $x = 0$. Si $x, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $xb = b$, entonces $x = 1$.*

Proposición 2. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a + b = 0$, entonces $b = -a$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, y $ab = 1$, entonces $b = a^{-1}$.*

Proposición 3. *$\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a + x = b$, entonces $\exists! x = b - a$. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$ y $ax = b$, entonces $\exists! x = ba^{-1}$.*

Proposición 4. *$\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$, $-(-a) = a$, $(-1)a = -a$. Además, $(-1)(-1) = 1$.*

1.2. Propiedades de orden de los reales

En $\mathbb{R}$ se tiene una relación de orden (ver más en los apuntes de *Conjuntos y Números*) a la que estamos acostumbrados, y se denota por $<$. Rigurosamente, podemos entender que $a < b$ siempre que $b - a$ pertenezca a un conjunto especial, P; conocido como *reales positivos*. Este, por definición, verifica las siguientes propiedades:

[1] De ahora en adelante, $a + (-b)$ se denotará $a - b$ directamente.
[2] Otra manera de denotar a^{-1} es $1/a$

1. $\exists P \subset \mathbb{R}, P \neq 0$, t.q $\forall a \in \mathbb{R}$, se cumple exactamente una de estas condiciones: o $a \in P$, o $-a \in P$, o $a = 0$. (Tricotomía)
2. $a, b \in P \implies a + b \in P$ (P es cerrado respecto a la adición)
3. $a, b \in P \implies ab \in P$ (P es cerrado respecto a la multiplicación)

La notación empleada para denotar el orden entre dos elementos, entonces, es la siguiente:

- $a > b$ si $a - b \in P$
- $a < b$ si $b - a \in P$
- $a \geq b$ si $a > b$ o $a = b$ (Es decir, si $a - b \in P \cup \{0\}$)
- $a \leq b$ si $a < b$ o $a = b$ (Es decir, si $b - a \in P \cup \{0\}$)

A partir de estas propiedades, y con esta notación, pueden deducirse (ejercicio) los siguientes resultados:

Proposición 5. *Si $a > b$ y $b > c$, $a > c$.*

Proposición 6. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, o bien $a > b$, o $a < b$, o $a = b$.*

Proposición 7. $a \geq b \wedge a \leq b \implies a = b$

Proposición 8. *Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, $a \cdot a > 0$. Por tanto, $1 > 0$*

Proposición 9. *Si $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a > b$ y $c > d$, entonces: $a + e > b + e$, $a + c > b + d$.*

Proposición 10. *Si $a > b$ y $c > 0$, $ac > bc$. Si $a > b$ y $c < 0$, $ac < bc$. Si $a > 0$, $a^{-1} > 0$. Si $a < 0$, $a^{-1} < 0$.*

Proposición 11. *Si $a < b$, $a + a < a + b < b + b$. Por tanto, si $0 < b$, $0 < b < b + b$.*

Teorema 1. *Sea $a \geq 0$. Si $\forall \epsilon > 0$, $\epsilon > a$, entonces $a = 0$.*

Teorema 2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\forall \epsilon > 0$, $a - \epsilon < b$, entonces $a \leq b$.*

Estos dos últimos resultados son muy útiles al demostrar proposiciones más elaboradas en análisis.

1.3. Propiedad de completitud, supremo e ínfimo

La propiedad fundamental que distingue a $\mathbb{R}$ de otros cuerpos como $\mathbb{Q}$ es la conocida como **completitud**, que sigue también de su definición. Aunque por el momento no expliquemos dicha definición, conviene entender esta propiedad, que afecta a los siguientes conceptos:

Definición 1. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Si $A \in \mathbb{R}$ cumple que $\forall e \in E$, $e \leq A$, entonces A es **cota superior** de E. Si existe dicha cota, E está **acotado superiormente**.

Definición 2. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Si $B \in \mathbb{R}$ cumple que $\forall e \in E$, $e \geq B$, entonces B es **cota inferior** de E. Si existe dicha cota, E está **acotado inferiormente**.

Si un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ está acotado superior e inferiormente, se dice que está **acotado**.

Definición 3. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Se dice que $S \in \mathbb{R}$ es **supremo** de E si S es cota superior de E, y además, $\forall \epsilon > 0$, $\exists a_\epsilon \in E$ t.q. $a_\epsilon > S - \epsilon$. Es decir, S es supremo de E si es la mínima de sus cotas superiores (puesto que sin importar la cantidad que restemos a dicho supremo, deja de ser cota superior). El supremo es único, es decir, de haber dos supremos de un conjunto, S_1 y S_2, entonces, $S_1 = S_2$ (ejercicio). Si $S \in E$, se denomina también máximo.

Definición 4. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Se dice que $I \in \mathbb{R}$ es **ínfimo** de E si I es cota inferior de E, y además, $\forall \epsilon > 0$, $\exists a_\epsilon \in E$ t.q. $a_\epsilon < I + \epsilon$. Es decir, I es ínfimo de E si es la máxima de sus cotas inferiores(puesto que sin importar la cantidad que añadamos a dicho ínfimo, deja de ser cota inferior). El ínfimo es único, es decir, de haber dos ínfimos de un conjunto, I_1 e I_2, entonces, $I_1 = I_2$ (ejercicio). Si $I \in E$, se denomina también mínimo.

La **propiedad de completitud**, también llamada **propiedad del supremo**, que cumple el conjunto $\mathbb{R}$, es la siguiente:

Si $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y E está acotado superiormente, entonces existe el supremo de E.

Proposición 12. *Si $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$, y E está acotado inferiormente, entonces existe inf(E).*

Para demostrarlo, basta con considerar el conjunto $F = -E = \{-x : x \in E\}$, y es fácil probar que F está acotado superiormente, luego tiene supremo. De ahí es fácil llegar a que $\inf E = -\sup F$.

1.4. Propiedades de los naturales

Aunque el objeto de estudio sea $\mathbb{R}$, necesitamos conocer resultados fundamentales de $\mathbb{N}$, sobre todo para el estudio de *sucesiones*, que son asociaciones entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$.

Teorema 3. *El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente. Entonces, $\exists \sup \mathbb{N} = \alpha$. Por la definición de supremo, $\alpha \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$, y $\forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha - \epsilon$. Considerando $\epsilon = 1$, entonces $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > \alpha - 1 \longrightarrow n_1 + 1 > \alpha$, pero $n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ al ser el sucesor de un natural, luego se contradice la definición de supremo. ☐

Teorema 4 (Teorema de Arquímedes)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n_x \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_x > x$.

Demostración. Supongamos que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \geq n$. Entonces x sería cota superior de $\mathbb{N}$, contradiciendo el teorema anterior. ☐

Proposición 13. $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n} < \epsilon \ \forall n > n_\epsilon$.

Demostración. Basta con probar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$, ya que todos los valores naturales superiores a n_ϵ harán la fracción menor aún. Consideremos el caso particular del teorema de Arquímedes $x = \frac{1}{\epsilon}$. Entonces $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, de donde se deduce lo que se quería. ☐

Proposición 14. *Sea $x > 0$. Entonces, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq x < m$*

Demostración. Considerando el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$, sabemos que es no vacío por el teorema de Arquímedes. El mínimo de este conjunto, que existe por ser $\mathbb{N}$ un *conjunto bien ordenado*, y que denotaremos m, es el valor buscado, ya que $m - 1$ no estará en el conjunto (o m no sería el mínimo). ☐

Teorema 5 (Principio de inducción)**.** *Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Si se cumple $1 \in I$ y $(k \in I \implies k + 1 \in I)$, entonces $I = \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $I \neq \mathbb{N}$ y sea $a = \min \mathbb{N} \backslash I$, que existe por ser no vacío y tratarse de naturales. Por hipótesis, $a > 1$, luego $a - 1 \in \mathbb{N}$ y al ser a mínimo, se tiene además $a - 1 \in I$, pero entonces según las condiciones del teorema ha de darse que $(a - 1) + 1 = a \in I$, contradiciendo que $a \notin I$. ☐

Teorema 6 (Desigualdad de Bernoulli). *Si* $x > -1$, *entonces* $(x+1)^n \geq 1 + nx \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Usamos el principio de inducción de la manera habitual, es decir, siendo I el conjunto de naturales n para los que se verifica esa desigualdad. Claramente 1 lo hace: $(x+1)^1 = x+1 = x \cdot 1 + 1$. Si suponemos que k lo hace, entonces $(x+1)^{k+1} = (x+1)(x+1)^k \geq (x+1)(1+kx) = 1+(k+1)\cdot x + k \cdot x^2 \geq 1 + (k+1)\cdot x$, completando la inducción. Obsérvese que es crucial que $x > -1$, de otro modo no puede garantizarse que $(x+1)(x+1)^k \geq (x+1)(1+nx)$ (dado que depende del signo de $(x+1)^k$). □

1.5. La recta real

Es una representación visual de los números reales, en la que a cada punto de la recta corresponde un real. Se fijan el 0 y el 1 en la recta (convencionalmente, el segundo a la derecha del primero). Ahora, cualquier entero se puede representar llevando la distancia del 0 al 1 sucesivas veces. También se pueden representar racionales e irracionales, teniendo en cuenta que un número a la derecha de otro es mayor que él.

1.5.1. Notación de intervalos

Con frecuencia se utiliza la noción de *intervalo*. Los intervalos no son más que estos conjuntos, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

1.6. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Una idea fundamental y de gran utilidad es que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, para dos $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, entonces $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que r está entre x e y. ($x \lesseqgtr r \lesseqgtr y$). Dicho de otra manera, entre dos reales cualesquiera hay un racional, de tal modo que los racionales *abundan* entre los reales (si atendemos a este criterio).

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $x < y$. Observemos que tampoco se pierde generalidad al suponer $0 \leq x < y$, dado que si $x < 0 < y$, como $0 \in \mathbb{Q}$, no hay nada que probar; y si $x < y < 0$, basta con probar que la proposición se cumple para $0 < -y < -x$, puesto el r que se obtenga entre $-y$ y $-x$, cambiado de signo, estará entre x e y.

Comenzamos por el caso $0 = x < y$. Por el lema 13, sabemos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < y$ y queda demostrado.

Ahora demostraremos el caso $0 < x < y$. Por el teorema de arquímedes, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{y-x} < n$. Multiplicando por el positivo $y - x$: $ny - nx > 1$. Obsérvese que la distancia entre ny y nx es mayor que 1. Ahora, por el lema 14, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq ny < m$. Vamos a analizar por separado los dos casos:

- Si $m-1 = ny < m$, entonces, por la observación que hemos realizado anteriormente, $nx < m-2 < ny$, luego $x < \frac{m-2}{n} < y$ y queda demostrado.
- Si $m-1 < ny < m$, entonces, por la observación que hemos realizado anteriormente, $nx < m-1 < ny$, luego $x < \frac{m-1}{n} < y$ y queda demostrado.

$\square$

1.7. Valor absoluto

Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define el valor absoluto de x como $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1.7.1. Propiedades del valor absoluto

Las siguientes propiedades del valor absoluto pueden verificarse fácilmente de la definición:

1. $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. Si $a > 0$, $-a \leq x \leq a$, entonces $|x| \leq a$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$. Esta es la desigualdad triangular.

   Demostración. Ya sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$, entonces, $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$. Aplicando la propiedad anterior, $|a+b| \leq |a|+|b|$.
6. $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

   Demostración. Como $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$, y entonces $|x|-|y| \leq |x-y|$. Pero como $|x-y| = |y-x|$, podemos intercambiar sin problema x e y en esa expresión. Así, $||x|-|y|| \leq |x-y|$.
7. Se define la distancia entre a y b es $|a-b| = |b-a|$.

2. Sucesiones y límites.

Una sucesión es una aplicación de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}$, es decir: $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se suele denotar de diferentes maneras: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, a, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .... Ejemplos de sucesiones son $a_n = k$ (fijado $k \in \mathbb{R}$), que sería una sucesión constante, o bien $a_n = 1/n$. Algunas sucesiones tienen límite.

2.1. Límite de una sucesión

A continuación presentamos el concepto de límite. La idea es establecer un valor al cual la sucesión se *acerca* conforme avanzamos en ella. Este concepto requiere una definición rigurosa que evite ambigüedades:

Definición 5. Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite igual a $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|l - a_n| < \epsilon \ \forall n > n_0$. Se denota $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

Informalmente, se puede entender como: no importa lo pequeña que sea la distancia de l a la que nos queramos acercar (ϵ), siempre va a haber un punto en la sucesión (n_0) a partir del que todos los elementos de la misma están a menos de esa distancia.

2.1.1. Ejemplos de límites

- Límite de la sucesión constante $a_n = C$ $(C \in R)$: $\lim_{n\to\infty} a_n = C$.

Demostración. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = 1$ tal que $|a_n - C| < \epsilon \ \forall n > n_0$. En efecto, $|C - C| = 0 < \epsilon$. □

- Límite de la sucesión $b_n = 1/n$. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Demostración. Tenemos que probar que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tal que $|\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon, \forall n > n_0$. Esto se cumple de acuerdo con la proposición 1.4.13. □

Un resultado importante pero intuitivo es que si una sucesión tiene límite, sus valores han de estar acotados (no pueden aumentar en tamaño indefinidamente), dado que cuando n crece, los valores se aproximan a dicho límite:

Proposición 15. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ t.q. $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$. Entonces $\exists M > 0$ t.q. $|a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, si la sucesión tiene límite, está acotada superiormente por M e inferiormente por $-M$.*

Demostración. Tomemos un $\epsilon > 0$ fijo, por ejemplo ϵ_0, y observemos que, de acuerdo a la definición de límite, $\exists N$ t.q. $|a_n - A| < \epsilon_0 \ \forall n > N$. Entonces, todos estos a_n se encuentran en el intervalo $(A - \epsilon_0, A + \epsilon_0)$. En términos absolutos, esta parte de la sucesión se halla acotada por $\max(|A - \epsilon_0|, |A + \epsilon_0|) = M_0$, es decir, para cualquiera de estos términos, $|a_n| \leq M_0$. Los N términos restantes se tratan de una sucesión finita, luego está acotada[3] de esta manera por M_1. Así pues, $\exists M = \max(M_0, M_1)$.

2.2. Propiedades de límites

Se tienen las siguientes propiedades básicas e intuitivas de límites, cuya demostración no se incluye pero es asequible a partir de la definición:

- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

[3] Vamos a probar este hecho. Consideramos los n primeros términos de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, existe otra sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\forall j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n$, $|a_j| \leq b_j$. Simplemente basta tomar $b_j = |a_j| + 1$. El máximo término de b_n es la cota en cuestión.

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$ si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Otra idea importante es qué ocurre cuando una sucesión consiste en el producto de dos términos, uno de los cuales se hace arbitrariamente pequeño (tiende a 0). Un intento erróneo es afirmar que dicha sucesión ha de hacerse también arbitrariamente pequeña, puesto que el otro término podría contrarrestar fácilmente el decrecimiento del primero, pero basta con que esté acotado (no crezca indefinidamente) para que el conjunto tienda a cero:

Proposición 16. *Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $|b_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ *(es decir,* $\{b_n\}$ *está acotada). Entonces* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Demostración. Sabemos que $\forall \epsilon > 0, \exists N = n(\epsilon)$ t.q. $|a_n| < \epsilon \ \forall n > N$. Vamos a considerar $N_1 = n(\frac{\epsilon}{M})$. Entonces, $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 = n_1(\epsilon) = n(\frac{\epsilon}{M})$ t.q. $|a_n| < \frac{\epsilon}{M} \ \forall n > N_1 \implies |a_n| \cdot M < \epsilon \implies |a_n||b_n| \leq |a_n| \cdot M < \epsilon \implies |a_n \cdot b_n| < \epsilon \ \forall n > N_1$. □

Observación 1. $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - A) = 0$

(Esto es trivial por la definición de limite. Véase que aplicándola a ambos casos se alcanza la misma expresión)

Proposición 17. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$*, y además* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$*. Entonces* $A \geq 0$*. (Y en general, para cualquier valor en lugar de 0)*

Demostración. Supóngase que $A < 0$. Además, por la definición de límite, $\forall \epsilon > 0 \exists N$ t.q. $|a_n - A| < \epsilon$ $\forall n > N$. En particular, si $\epsilon = |A|/2$ (por ejemplo): $\exists N$ t.q. $|a_n - A| < \frac{|A|}{2} \ \forall n > N$. Ahora bien, se ha supuesto A negativo y como sabemos que cualquier a_n es positivo: $a_n - A < \frac{|A|}{2} \iff a_n + |A| < \frac{|A|}{2} \iff a_n < \frac{-|A|}{2}$ alcanzando una contradicción. □

Un resultado muy útil para comprobar el límite de sucesiones es el siguiente:

Teorema 7 (Teorema de compresión)**.** *Supongamos tres sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$*, tales que* $a_n \leq b_n \leq c_n \ \forall n > N$ *para algún* N*, y además* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \exists \lim_{n\to\infty} c_n = A$*. Entonces* $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = A$

Demostración. Vamos a demostrar que se cumple $\forall n \in N$, ya que es lo mismo puesto que equivale a eliminar los primeros n_0 términos de las tres sucesiones, dejando el límite inalterado.

Considerando las siguientes sucesiones $\gamma_n = c_n - a_n$ y $\beta_n = b_n - a_n$, está claro que $0 \leq \beta_n \leq \gamma_n$. Además, es evidente que $\exists \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Basta probar que $\exists \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, ya que entonces $0 = \lim_{n\to\infty} b_n - A \implies A = \lim_{n\to\infty} b_n$. Por la definición de limite, $\forall \epsilon > 0, \exists N = n(\epsilon)$ t.q. $\gamma_n < \epsilon \ \forall n > N$. Ahora bien, esto equivale a que $\exists N = n(\epsilon)$ t.q. $\beta_n \leq \gamma_n < \epsilon \implies \beta_n < \epsilon \ \forall n > N$. □

2.2.1. Aplicaciones del teorema de compresión

En esta subsección comprobaremos algunos límites útiles aplicando el resultado de compresión.

En primer lugar, vamos a comprobar que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ si $0 < q < 1$.

Sabemos que $1/q > 1$, luego $\alpha = (1/q) - 1 > 0$. Como $1/q = \alpha + 1$, $q = \frac{1}{\alpha+1}$. $q^n = \frac{1}{(\alpha+1)^n}$. Debido a la desigualdad de Bernoulli, $0 < q^n \leq \frac{1}{n\alpha+1} < \frac{1}{n\cdot\alpha}$. Está claro que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot\alpha} = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, de modo que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Obsérvese que aquí la idea ha sido acotar superiormente la sucesión por otra que tiende a 0 que ya conocíamos. La única dificultad es encontrar la técnica que nos permite establecer esa cota (en este caso, una desigualdad conocida).

Ahora vamos a comprobar que $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1\ \forall c > 0$.

Está claro que si $c = 1$, $\lim_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Si $c > 1$, entonces[4] $c^{1/n} > 1$. Entonces $c^{1/n} = 1+\beta_n$ donde $\beta_n > 0$. $c = (c^{1/n})^n = (\beta_n+1)^n \geq n\beta_n+1$, de donde $\frac{c-1}{n} \geq \beta_n > 0$, luego, por el teorema de compresión, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, así que dado que $\beta_n = c_n - 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$.

Si $c < 1$, $\frac{1}{c} > 1$ así que por lo visto anteriormente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c}^{\frac{1}{n}} = 1$. Es fácil deducir aplicando las propiedades de los límites que $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$.

Proposición 18. $\lim_{n\to\infty} a_n = A \implies \lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Demostración. Por la definición de límite, $\forall\epsilon > 0 \exists N_0$ t.q. $|a_n - A| < \epsilon\ \forall n > N_0$. Pero entonces, por la propiedad de los valores absolutos, $\exists N_0$ t.q. $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \epsilon\ \forall n > N_0$, es decir, tal que $||a_n| - |A|| < \epsilon\ \forall n > N_0$. Esta es la definición del límite que se buscaba probar. □

Asimismo, si la sucesión tiende a 0 en tamaño, entonces también ha de hacerlo teniendo en cuenta el signo. Esto no ocurre si el tamaño tiende a un valor $a > 0$, puesto que la sucesión adquirirá valores cercanos a a o $-a$, pero no podemos asegurar cuál de los dos. Esta equivalencia se recoge en esta proposición:

Proposición 19. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Demostración. El sentido $\implies$ sigue del resultado anterior. Vamos a probar el sentido $\impliedby$. Sabemos que $\forall\epsilon > 0 \exists N_0$ t.q. $||a_n|| < \epsilon\ \forall n > N_0$. Pero $||a_n|| = |a_n|$, alcanzando la definición del límite que se quería probar. □

Proposición 20. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión real, $a_n \geq 0$ y $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$, entonces $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$. Es decir, $\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$.*

Demostración. Basta probar que $\lim_{n\to\infty} |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = 0$ Puesto que esto es igual a $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}$, pero ese límite vale 0 porque sabemos que $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$ y el resto de la expresión está acotado por 1.

Proposición 21. *Sea $\{a_n\}$ la sucesión de término general $a_n = n^{\frac{1}{n}}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.*

Demostración. Sea δ_n una sucesión tal que $a_n = \delta_n + 1$. Observemos que $\delta_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, pues, de otro modo, $n^{\frac{1}{n}} < 1 \implies n < 1$, lo cual no es cierto. Entonces, $n = (1+\delta_n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {\delta_n}^i$. Puesto que todos los sumandos son positivos, $n > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$. Entonces, $0 \leq \delta_n^2 < \frac{2}{n-1}$, luego $\lim_{n\to\infty} \delta_n^2 = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, de donde $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\delta_n + 1) = 1$. □

Este último límite muestra como el crecimiento de n y el decrecimiento de elevar a $\frac{1}{n}$ se *contrarrestan* para dar lugar a un acercamiento al 1. Otro caso de esto es el crecimiento de elevar a n y el decrecimiento de $(1+\frac{1}{n})$, cuya combinación se acerca a un valor importantísimo en el resto del cálculo que se denomina *número e*.

[4] Vamos a probarlo por reducción al absurdo. Si $c^{1/n} \leq 1$, como $(c^{1/n})^n = c$, al multiplicar n veces un número menor o igual que 1 vamos a tener que $c \leq 1$

Proposición 22. *Sea $\{a_n\}$ la sucesión de término general $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente, de modo que $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$. Este límite se denotará por e.*

Demostración. Aplicando el teorema del binomio, tenemos que $a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}$, y que $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}\frac{1}{(n+1)^i}$. Vamos a comprobar que cualquier término del primer sumatorio es menor o igual que su correspondiente del segundo. Esto es, que $\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i} \le \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}\frac{1}{(n+1)^i} \implies \frac{n!}{(n-i)!}\frac{1}{n^i} \le \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!}\frac{1}{(n+1)^i} \implies \prod_{j=0}^{i-1}\frac{n-j}{n} \le \prod_{j=0}^{i-1}\frac{n+1-j}{n+1}$, y podemos comprobar que esto es cierto viendo que cada término del primer productorio es menor que el correspondiente del segundo: $\frac{n-j}{n} \le \frac{n+1-j}{n+1} \implies n^2 - j - jn + n \le n^2 + n - jn \implies j \ge 0$. Así, se tiene que $a_n \le a_{n+1}$ en general, es decir, la sucesión es creciente.

Ahora comprobaremos que, como $a_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} \le \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} \le 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}} \le 1+1+1 \le 3$, de modo que está acotada[5] por 3. □

El hecho de que una sucesión creciente y acotada superiormente tenga límite se explorará en la siguiente sección.

2.3. Sucesiones monótonas

Definición 6. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le a_{n+1}$. (Estrictamente creciente si la desigualdad es estricta)

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge a_{n+1}$. (Estrictamente decreciente si la desigualdad es estricta)

Se puede determinar si una sucesión es creciente, por ejemplo, comprobando que $a_{n+1} - a_n \ge 0$, o que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$. Esas desigualdades deben ser estrictas si la sucesión es estrictamente creciente, y en sentido contrario si es decreciente.

Las sucesiones monótonas no tienen muchas alternativas: o bien sus valores se agrandan (o empequeñecen) indefinidamente, escapando hasta $\pm\infty$, o bien *se frenan* y no superan cierto valor, al cual tienden:

Proposición 23. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente y acotada superiormente. Entonces, $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = sup(a_n)$, donde a_n es el conjunto de elementos de la sucesión.*

Demostración. Vamos a ver que por la definición de supremo, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $a_N > sup(a_n) - \epsilon$. Como la sucesión es creciente, $a_n \ge a_N$ $\forall n \ge N$. Entonces $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $a_n > sup(a_n) - \epsilon$, $\forall n \ge N$. Esa desigualdad se puede reescribir como $\epsilon > sup(a_n) - a_n$, y como por definición $sup(a_n) \ge a_n$, podemos escribir $\epsilon > |a_n - sup(a_n)|$, llegando a que se cumple la definición del límite que queríamos probar. □

Proposición 24. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Entonces, $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = inf(a_n)$, donde a_n es el conjunto de elementos de la sucesión.*

La demostración es análoga a la anterior.

Lema 1 (Borel)**.** *Sea $[a_n, b_n]$ una sucesión de intervalos cerrados encajados, es decir, que cumplen $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, entonces $\exists! x \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Se puede demostrar considerando las sucesiones de los extremos de esos intervalos, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, y observando que son monótonas y acotadas cada una por el primer elemento de la otra, luego tienen límite. Después se puede ver que dicho límite es el mismo a causa de la condición del lema.

[5] Para este desarrollo es importante notar (se puede probar por inducción) que $n! \ge 2^{n-1}$ $\forall n \ge 2$.

2.4. Subsucesiones

En esta sección se tratan las *subsucesiones*, que son nuevas sucesiones formadas escogiendo ciertos elementos de otras (no todos).

Definición 7. Sea $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ t.q. $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_j \leq n_{j+1} \leq ...$ una sucesión de índices creciente.

Sea una sucesión: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. La sucesión $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ obtenida escogiendo únicamente los índices especificados por n_j es una **subsucesión** de la misma.

Proposición 25. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff \forall\{a_{n_j}\}, \exists \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = A$. *Es decir, el límite de una sucesión existe si y solo si existe dicho límite en cualquier subsucesión suya, y tiene el mismo valor en ambos casos.*

La demostración no es difícil a través de la definición.

Un ejemplo más fuerte es probar el límite para subsucesiones que particionan el espacio de índices. Por ejemplo, si la sucesión de índices pares e impares tienden al mismo valor, entonces la sucesión completa también:

Proposición 26. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión real. Si* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$, *y* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, *entonces* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Demostración. Tenemos que $\forall\epsilon > 0, \exists n_0$ t.q. $|a_{2n}-L| < \epsilon\ \forall n > n_0$ y que $\forall\epsilon > 0, \exists n_1$ t.q. $|a_{2n+1}-L| < \epsilon$ $\forall n > n_1$. Para cualquier ϵ, elegido m como el mayor de $2n_0$ y $2n_1 + 1$, se tiene $|a_n - L| < \epsilon\ \forall n > m$

2.4.1. Teorema de Bolzano-Weierstrass

A continuación se presenta un resultado de grandísima utilidad que sirve para demostrar la existencia de sucesiones convergentes en ciertos casos. Si tenemos una sucesión que está acotada, es decir, que sus valores no escapan de cierto intervalo $[-M, M]$, parece intuitivo afirmar que debe converger a algún valor. No obstante, esto no es cierto: la sucesión puede tomar valores dispersos a lo largo del intervalo sin *ir a parar* eventualmente a ningún punto. Lo que afirma el teorema de Bolzano-Weirstrass es que **algunos** de estos valores, al no tener *espacio* ilimitado para extenderse en la recta real, deben constituir una sucesión convergente.

Teorema 8. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión acotada. Entonces,* $\exists\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *con* $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_j \leq n_{j+1} \leq ...$ *tal que* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_j} = A_0$

Demostración. Tenemos que $\exists M > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$, es decir, $a_n \in [-M, M] = [c_1, d_1]$. Ahora, dividimos el intervalo en dos partes iguales. Una de ellas, que llamaremos $[c_2, d_2]$, cumple que tiene infinitos términos[6] de a_n, y es evidente que $|[c_2, d_2]| = \frac{1}{2}|[c_1, d_1]|$. Escojamos n_1 tal que $a_{n_1} \in [c_1, d_1]$. Esto lo podemos hacer puesto que ahí hay infinitos términos.

Ahora, podemos repetir el proceso con el intervalo nuevo. Al dividirlo en dos partes iguales y tomar la de infinitos términos, que llamaremos $[c_3, d_3]$, tenemos que $|[c_3, d_3]| = \frac{1}{4}|[c_1, d_1]|$, y podemos escoger n_2 tal que $a_{n_2} \in [c_3, d_3]$, y además con $n_2 > n_1$, porque al disponer de infinitos términos con infinitos índices distintos a elegir en $[c_3, d_3]$, alguno ha de ser mayor que n_1.

Repitiendo continuamente estos pasos, vamos obteniendo intervalos $[c_j, d_j]$ tales que $|[c_j, d_j]| = \frac{1}{2^{j-1}}|[c_1, d_1]|$, y j términos $n_1, n_2, ..., n_j$ tales que $n_1 < n_2 < ... < n_j$. La subsucesión que se puede construir con este procedimiento es $\{a_{n_j}\}$, que cumple que $a_{n_j} \in [c_j, d_j]$. Observemos además que $[c_j, d_j] \subseteq [c_{j-1}, d_{j-1}]$, y que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{j-1}}|[c_1, d_1]| = 0$. Entonces, de acuerdo al lema de Borel, $\exists! A_0 \in [c_j, d_j]$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Esto equivale a decir que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_j = \exists \lim\limits_{n\to\infty} d_j = A_0$. Pero como $a_{n_j} \in [c_j, d_j]$, $c_j \leq a_{n_j} \leq d_j$, de modo que por el teorema de compresión, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_j} = A_0$. □

[6]Evidentemente existe tal intervalo, puesto que si ambos tuviesen términos finitos, la sucesión sería finita

2.5. Criterio de Cauchy

Otra idea interesante de explorar es qué ocurre con las sucesiones cuyos términos se acercan arbitrariamente **entre ellos**. Lo que parece intuitivo es que si una sucesión converge a un límite L, sus términos se acercan a dicho valor y por tanto lo hacen también entre ellos. Por otro lado, si los términos de una situación se juntan indefinidamente entre sí, resulta que puede establecerse un valor límite al que tienden. Esta última propiedad se conoce como **completitud**, y $\mathbb{R}$ goza de ella, pero otros espacios no necesariamente. El nombre *completitud* proviene del hecho de que en otros espacios, y para algunas sucesiones *problemáticas*, el supuesto *valor límite* al que parecen pegarse los términos al acercarse unos a otros, no existe dentro de ese espacio. Dicho espacio es, por tanto, incompleto.

Teorema 9. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff \forall\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|a_n - a_m| < \epsilon\ \forall m,n > N$. Una sucesión que cumple esta segunda parte se denomina **sucesión de Cauchy**, luego en $\mathbb{R}$ equivale ser de Cauchy y converger.*

Demostración. Para demostrar el sentido $\implies$, basta ver que si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, entonces $\forall\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|a_n - A| < \epsilon\ \forall n > N$. Veamos que si tomamos $N_1 = N(\epsilon/2)$, tenemos que $\forall\epsilon > 0, \exists N_1 = N(\epsilon/2)$ t.q. $|a_n - A| < \epsilon/2\ \forall n > N_1$, es decir que $|a_n - A - a_m + A| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon$ $\forall m, n > N_1$, llegando a lo que se quería.

Ahora se probará el sentido $\impliedby$. Puesto que tenemos que $\forall\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|a_n - a_m| < \epsilon$ $\forall m,n > N$, podemos tomar un ϵ_0 arbitrario, por ejemplo, $\epsilon_0 = 1$, tal que $|a_n - a_m| < 1\ \forall m,n > N$. Si tomamos m arbitrario, por ejemplo $m = N+1$, la expresión se reduce a $|a_n - a_{N+1}| < 1\ \forall n > N$, o, lo que es lo mismo, $a_{N+1} - 1 \leq a_n \leq a_{N+1} + 1$, de modo que $\forall n > N$ la sucesión está acotada. Para los N términos restantes también existe una cota, puesto que hay un número finito de ellos. Esta cota se puede escribir como $M_0 = \text{máx}(\{|a_n| : n < N\})$. La cota de los otros infinitos términos será M_1, y el máximo de ambos será la cota global.

Ahora que tenemos que $\{a_n\}$ es acotada, podemos aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass, obteniendo que $\exists \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_j \leq n_{j+1} \leq ...$ tal que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_j} = A_0$, es decir, que $\forall\epsilon > 0, \exists N_2 = N_2(\epsilon)$ t.q. $|a_{n_j} - A_0| < \epsilon\ \forall n > N_2$ Queremos probar que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_0$, es decir, que $\forall\epsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\epsilon)$ t.q. $|a_n - A_0| < \epsilon\ \forall n > N_1$. Ahora bien, hagamos $N_1(\epsilon) = N(\epsilon/2)$. Sabemos que $|a_n - A_0| = |a_n - a_{n_{j_0}} + a_{n_{j_0}} - A_0| \leq |a_n - a_{n_{j_0}}| + |a_{n_{j_0}} - A_0|$. Si tomamos j_0 tal que $j_0 > N_2(\epsilon/2)$, y tal que $n_{j_0} > N(\epsilon/2)$, lo que podemos, puesto que hay infinitos j y n_j, siendo ambas sucesiones crecientes, llegamos a que $|a_n - A_0| \leq |a_n - a_{n_{j_0}}| + |a_{n_{j_0}} - A_0| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, como queríamos probar. (La desigualdad en el primer sumando, porque la sucesión es de Cauchy, y la del segundo, por la existencia de límite en la subsucesión) □

2.6. Sucesión divergente

Una sucesion no converge (es divergente) si y solo si no es de Cauchy. Por tanto:

Proposición 27. *Si $\exists\epsilon_0 > 0$ t.q. $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists m,n > N$ tales que $|a_n - a_m| \geq \epsilon_0$, la sucesión $\{a_n\}$ es divergente.*

Esto también se puede expresar como $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $|a_{n_k} - a_{n_j}| \geq \epsilon_0$.

Finalmente trataremos el concepto de *converger a infinito*, que se define simplemente como el hecho de hacerse arbitrariamente grande:

Definición 8. Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ si $\forall\Delta > 0$, $\exists N = N(\delta)$ t.q. $b_n > \Delta\ \forall n > N$.

Definición 9. Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ si $\forall\Delta > 0$, $\exists N = N(\delta)$ t.q. $b_n < -\Delta\ \forall n > N$.

En ambos casos, la sucesión es divergente (puesto que no está acotada).

Proposición 28. *Sea* $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$. *Entonces,* $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

Demostración. Como $\forall\Delta > 0$, $\exists N = N(\delta)$ t.q. $|b_n| > \Delta$ $\forall n > N$, si tomamos $N_1 = N(1/\epsilon)$, entonces $|b_n| > 1/\epsilon$ $\forall n > N$, luego $|1/b_n - 0| < \epsilon$, como se quería probar.

2.7. Sucesiones recurrentes

Son aquellas $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ en las que $C_{n+1} = f(C_1, C_2, ..., C_n)$. Por ejemplo, $C_1 = 1$, $C_n = \sqrt{3C_n}$. Para hallar su límite, lo usual es demostrar que existe de alguna manera (por ejemplo, observando su monotonía y si están acotadas) y luego tener en cuenta las propiedades de los límites y que $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Series numéricas

En esta sección se estudian las *series*, que son el resultado de sumar los infinitos términos que componen una sucesión.

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Podemos considerar entonces la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir, la suma de todos los términos de la sucesión. Para asignar un valor real concreto a esta expresión, se define el concepto de *suma parcial*.

Definición 10. Sea $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$. S_k se denomina **suma parcial** de a_n.

Definición 11. Se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** cuando $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k \in \mathbb{R}$, es decir, cuando la sucesión de sumas parciales es convergente. Entonces, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$.

Si la sucesión $\{S_k\}$ diverge (no tiene límite), entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente** y no tiene un valor asignado.

Por ejemplo, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, con $0 < q < 1$. (O lo que es lo mismo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = 1 - \frac{1}{1-q}$).

Efectivamente, $S_k = q^0 + q^1 + q^2 + ... + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q}$ (Expresión para una suma geométrica de razón q y término inicial 1, que puede obtenerse fácilmente multiplicando la suma por q y despejando). Entonces, podemos obtener $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} (\frac{1}{1-q} - \frac{q^k}{1-q}) = \frac{1}{1-q} - \frac{\lim\limits_{k\to\infty} q^k}{1-q}$, dado que $1 - q$ es constante. Sabemos del apartado 2.2.1 que $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$ con $0 < q < 1$, luego $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Esta serie resulta de gran utilidad. Por ejemplo, ahora podemos saber que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

3.1. Propiedades de series

Como las series son límites, podemos trasladar inmediatamente estas dos propiedades de los límites a las series:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

La demostración sigue directamente de las propiedades de los límites. Al igual que estas, deben interpretarse como: "si convergen las series del segundo miembro de la igualdad (las de a_n y b_n), entonces también converge la del primer miembro y sabemos su valor". No obstante, es posible que la serie del primer miembro converja y se puedan obtener dos series cuya suma sea la primera, sin que converja ninguna de estas. Por ejemplo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n - n$ converge y vale 0, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -n$ no convergen.

3.2. Criterio de Cauchy para series

Sabemos que una serie converge si y solo si $\exists \lim_{n\to\infty} S_k$. De acuerdo a la completitud de $\mathbb{R}$ y el criterio de Cauchy, entonces, una serie converge si y solo si $\forall\epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|S_m - S_n| < \epsilon$, $\forall m, n > N$.

Observemos que si suponemos sin pérdida de generalidad que $n \geq m$ (puesto que en caso contrario basta con renombrar n y m), entonces $S_n - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$. Entonces, el criterio de Cauchy también se puede expresar de esta manera: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\forall\epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \epsilon \ \forall m, n > N$.

Una observación útil es que si los elementos de la sucesión en cuestión no se acercan a 0 cuando $n \to \infty$, la serie no puede converger dado que estaríamos sumando infinitos términos cuyos valores no son pequeños.

Proposición 29. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Tomemos la expresión anterior del criterio de Cauchy con $n = m + 1$. Entonces, si la serie converge, $\forall\epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|a_{m+1} - 0| < \epsilon \ \forall m > N$, llegando a la definición del límite que se quería probar.

Esto resulta de gran utilidad dado que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie no converge. (Contrapositivo). Por otro lado, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **no garantiza la convergencia de la serie**.

3.3. Convergencia absoluta

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Proposición 30. *Si una serie converge absolutamente, dicha serie es convergente.*

Demostración. Tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, es decir, según el criterio de Cauchy, $\forall\epsilon > 0$ $\exists N = N(\epsilon)$ t.q. $|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|| < \epsilon$, $\forall n, m (n > m > N)$. Ahora bien, para esa misma N, como $|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq |\sum_{k=m+1}^{n} |a_k||$ (desigualdad triangular), entonces todo eso también es menor que ϵ, llegando a que se cumple la expresión del criterio de Cauchy para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.4. Criterios de convergencia para series de términos positivos

Observación 2. Si $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{S_k\}$ de sumas parciales es creciente (al sumar siempre términos positivos, la suma crece). Así, si sabemos que $a_n \geq 0$, basta con ver que S_k está acotada superiormente para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja.

Este tipo de series pueden ser estudiadas a través de distintos criterios. Si una serie no tiene términos positivos, se puede probar con su serie absoluta, que sí es de términos positivos, y sabemos que si converge lo hará la serie original.

3.4.1. Teorema de comparación

Teorema 10. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series tales que* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *y que cumplen que* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $a_n \leq b_n$ $\forall n > n_0$. *Entonces, si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente, también lo es* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *(O lo que es lo mismo, si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, también lo hará* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*).*

Demostración. Sean A_k y B_k las sucesiones de sumas parciales de cada una de estas series. Observemos que, para $n_0 \leq k$ fijo, $A_k - A_{n_0} \leq B_k - B_{n_0}$. En efecto, al eliminar los n_0 primeros términos de cada una de las sumas parciales, cada uno de los sumandos de A_k es menor que su correspondiente en B_k por la condición del teorema. Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, según la observación 2, es porque B_k tiene cota superior, que denotaremos B. Entonces, $B_k - B_{n_0} \leq B - B_{n_0}$, de donde $A_k \leq B - B_{n_0} + A_{n_0}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, es decir, A_k está acotada superiormente y por tanto converge. □

En esta demostración está presente una idea fundamental: en todo concepto relacionado con un límite, solo importa el comportamiento del objeto *cerca de ese límite*. Así, en este caso, lo que ocurre en una cantidad finita de elementos del principio no importa para nada, puesto que el límite se toma cuando $k \to \infty$ en las sumas parciales.

3.4.2. Teorema de comparación en el límite

Teorema 11. *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos no negativos tales que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in \mathbb{R}$ *(Intuitivamente:* b_n *no decrece más rápido que* a_n*). Entonces, si* $C \neq 0$*, su convergencia es equivalente, es decir,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge. Si* $C = 0$*, se tiene que* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demostración. (Recordemos que si una serie converge, la resultante de multiplicar el término general por una constante también lo hace, y converge al valor de la primera multiplicado por esa constante.)

Si $C \neq 0$, podemos tomar un $\epsilon > 0$ en función de C, como $\frac{C}{2}$. Entonces, se tiene que $\exists N$ t.q. $|\frac{a_n}{b_n} - C| < \frac{C}{2}$ $\forall n > N$. Es decir, $-\frac{C}{2} < \frac{a_n}{b_n} - C < \frac{C}{2} \implies \frac{C}{2}b_n < a_n < \frac{3C}{2}b_n$. Ahora, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3C}{2}b_n$, y por comparación, lo hará $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Asimismo, si converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, por comparación, lo hará $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{2}b_n$, y por tanto también lo hará $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Basta multiplicar por la constante $2/C$).

Si $C = 0$, basta tomar $\epsilon = 1$, para llegar a que $-1 < \frac{a_n}{b_n} - C < 1 \implies a_n < (1 + C)b_n$. Ahora, si converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, lo hará $(1 + C)\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

3.4.3. Teorema de condensación

El resultado que viene a continuación se trata de una ingeniosa idea de Cauchy, que permite agrupar los términos de la serie por potencias de 2 (grupos de 1, 2, 4, 8,. . .), facilitando determinar su convergencia.

Teorema 12. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que* $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\{a_n\}$ *decreciente. Entonces, equivalen los estados de convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$*. (Es decir, una converge si y solo si la otra lo hace).*

Demostración. Sea S_n la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y R_n la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$.

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ converge. Entonces, al ser de términos positivos, R_n está acotada por un cierto valor M, es decir, $R_n \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que $S_{2^{k+1}-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 ... + a_{2^{k+1}-1} \leq a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + ... + 2^k \cdot a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k} = R_k$, donde simplemente hemos reemplazado términos de la sucesión a_n por otros anteriores en la misma, y al ser decreciente nos aseguramos que obtenemos un resultado mayor. Ahora tenemos, pues, que $S_{2^{k+1}-1} \leq M$, es decir, S_n está acotada (Todo n que tomemos menor que $2^{k+1}-1$ satisface que $S_n \leq M$, y como $S_{2^{k+1}-1} \leq M$ se cumple para todo k, $S_n \leq M$ lo hace para todo n). Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ahora supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Una vez más, al ser de términos positivos, S_n está acotada por un cierto valor M, es decir, $S_n \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que $S_{2^{k+1}-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 ... + a_{2^{k+1}-1} \geq a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + ... + 2^k \cdot a_{2^{k+1}} = a_2 + 2a_4 + 4a_8 + ... + 2^k \cdot a_{2^{k+1}} = \frac{R_{k+1} - a_1}{2}$. Ahora hemos reemplazado cada término por uno posterior en la serie, obteniendo una suma menor. Entonces, se cumple que $\frac{R_{k+1} - a_1}{2} \leq M$, es decir, $R_{k+1} \leq 2M + a_1$, así que también está acotada esta sucesión de sumas parciales, luego $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ converge. □

Con este teorema podemos probar la convergencia de numerosas series. Por ejemplo, podemos demostrar la convergencia de las importantes p-series:

Proposición 31. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$*, con* $p \in \mathbb{R}$*, converge si* $p > 1$*, y diverge si* $p \leq 1$*.*

Demostración. Si $p \leq 0$, la sucesión en cuestión no tiende a 0 así que diverge. Si $p > 0$, se trata de una sucesión decreciente y de términos positivos. Entonces, podemos estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}}^n$. Está claro que si $p > 1$, tenemos que $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, y sabemos que en este caso la serie converge. Si $p = 1$, esta serie se trata de $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, que diverge evidentemente (Por ejemplo, porque $\lim_{n\to\infty} 1 \neq 0$). Si $p < 1$, los obtenemos series de términos mayores que la serie $p = 1$, así que por el teorema de comparación también divergen.

3.4.4. Criterio de la raíz

Teorema 13. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que* $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$*. Si* $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $(a_n)^{1/n} \leq q_0 < 1 \; \forall n \geq N_0$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge. Por el contrario, si* $(a_n)^{1/n} \geq 1$*, la serie diverge (Ya que en ese caso* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*).*

Demostración. Sabemos que a partir de cierto valor, $a_n \leq q_0^n$. Como $q_0 < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_0^n$ converge, y por el teorema de comparación, lo hace a_n. □

Teorema 14 (Criterio de la raíz en el límite). *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que* $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$*. Si* $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = q_0 < 1 \; \forall n \geq N_0$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge. Por el contrario, si* $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} > 1$*, la serie diverge (Ya que en ese caso* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*). Si dicho límite vale* 1*, es posible que converja o que diverja.*

Demostración. Sea q_1 un valor tal que $0 < q_0 < q_1 < 1$ (por ejemplo, $\frac{1+q_0}{2}$). Entonces, como $q_1 - q_0$ es positivo, tenemos que $\exists m$ t.q. $|a_n^{1/n} - q_0| < q_1 - q_0 \; \forall n > m$. Ahora, esto quiere decir que a partir de esa m, se tiene $a_n < q_1^n$. Aplicando el criterio de la raíz, la serie converge. □

3.4.5. Criterio del cociente

Teorema 15. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Si $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q_0 < 1 \; \forall n \geq N_0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por el contrario, si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, la serie diverge (Ya que en ese caso se trata de una sucesión creciente a partir de N_0, y como es de términos no negativos, se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$).*

Demostración. Se tiene que $a_{N_0+1} \leq a_{N_0} \cdot q_0$. Además, $a_{N_0+2} \leq a_{N_0+1} \cdot q_0 \leq a_{N_0} \cdot q_0^2$, y así sucesivamente. Entonces, $a_{N_0+m} \leq a_{N_0} \cdot q_0^m$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} q_0^n$ converge, lo hace $a_{N_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n$, y por el teorema de comparación, también lo hará $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Teorema 16 (Criterio del cociente en el límite)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Si $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q_0 < 1 \; \forall n \geq N_0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por el contrario, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, la serie diverge.*

Demostración. Al igual que en el criterio de la raíz, sea q_1 tal que $0 < q_0 < q_1 < 1$, entonces, $\exists m$ t.q. $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q_0| < q_1 - q_0 \; \forall n > m$, de donde se tiene que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_1 \; \forall n > m$. Basta con aplicar ahora el criterio del cociente. □

Criterio de la integral: Ver sección 6.4.1

3.5. Series alternadas

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es **alternada** si se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ que $b_n \cdot b_{n+1} < 0$, es decir, si su signo va cambiando entre positivo y negativo.

Así, el término general de la serie se puede escribir siempre como $b_n = (-1)^n |b_n|$, o bien $b_n = (-1)^{n+1} |b_n|$, dependiendo de si b_1 es positivo o negativo.

Teorema 17 (Leibnitz)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie alternada tal que $\{|b_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, y $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (recordemos que esto es equivalente a $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$). Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b_1 > 0$, puesto que en caso contrario basta con multiplicar la serie por -1 y, si esa converge, lo hará la original. Entonces, $b_n = (-1)^{n+1}|b_n|$. Sea S_k la suma parcial de b_n. Veamos que $S_{2m} = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{2m-1} + b_{2m}$. Es fácil observar que $b_{2i-1} + b_{2_i} \geq 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$, puesto que el primer sumando, de mayor valor absoluto que el primero a causa de la condición del teorema, es positivo. Por tanto, $\{S_{2m}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, ya que $S_{2(m+1)} = S_{2m} + b_{2m+1} + b_{2m+2} \geq S_{2m} + 0 = S_{2m}$, ya que los dos últimos sumandos son de la forma comentada anteriormente.

Ahora bien, por la misma razón, $b_{2i} + b_{2_i+1} \leq 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$, luego $S_{2m} = b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5) + ...(b_{2m-2} + b_{2m-1}) + b_{2m} \leq b_1 + 0 + 0 + ... + b_{2m} \leq b_1$ al ser b_{2m} negativo. Es decir, S_{2m} está acotada superiormente. Así, $\exists \lim_{m\to\infty} S_{2m} = L$.

Ahora observemos que $S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1}$. Tomando límites a ambos lados, $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = L + 0$ por la condición del teorema, de modo que $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = L$, así que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. □

3.6. Representación binaria

Observación 3. Cualquier número $x \in [0,1]$ puede representarse como una serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $a_n = 0$ o $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, cualquier real se puede representar con una serie de este estilo, sumando la parte entera correspondiente.

Veamos que si $x = 0$, basta que $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $x = 1$, $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $x = 1/2$, la sucesión es $a_1 = 1$, $a_n = 0$ $\forall n \geq 2$. Ahora, si $0 < x < 1/2$, pondremos $a_1 = 0$, y repetimos el proceso: $x = 1/4$ se representa con $a_2 = 1$, $a_n = 0$ $\forall n \geq 3$, y de esta forma se puede iterar para obtener la sucesión. Por el lema de Borel, el número resultante es único, ya que se obtiene una sucesión de intervalos encajados. En general, si $0 \leq x < 1/2^k$, se pondrá $a_k = 0$, y si $1/2^k \leq x \leq 1$ se pondrá $a_k = 1$.

4. Funciones

En esta sección se presentan las funciones de variable real, que asignan valores reales a entradas reales.

4.1. Función, dominio, gráfica

Una función real es una regla que asigna a cada valor de un conjunto $D_f \subset \mathbb{R}$ un valor real. D_f se conoce como **dominio** de la función, y se escribe $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$. x_0 es un **punto interior** del dominio si $\exists \delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D_f$. Por tanto, si el dominio es un intervalo cerrado, todos los puntos salvo los extremos cerrados son interiores. El concepto de punto interior es necesario, dado que gran parte de los conceptos que se van a presentar requieren que la función esté definida alrededor del punto en cuestión. Cuando no se especifique el dominio, se entenderá que este es el conjunto de los reales para los que tiene sentido la expresión de la función.

Ejemplos de funciones son la función constante: $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$, la función polinómica de grado n: $f(x) = \sum_0^n a_k x^k$ con $a_n \neq 0$.

La **gráfica** de una función es el lugar geométrico (es decir, el conjunto) de los puntos $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $f(x) = ax + b$, la gráfica es una recta en el plano cartesiano.

4.2. Límite de una función

Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, y $x_0 \in D_f$ un punto interior de la función.

Definición 12. Se define el límite de la función en ese punto, $\lim_{x \to x_0} = L$ como el valor que cumple: $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x_0 - x| < \delta$.

Es decir, L es límite en ese punto si para cualquer intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ que tomemos, hay un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$ tal que todas las imágenes de los puntos de ese intervalo están en el primero. La definición es similar a la dada en sucesiones, y quiere decir que *cerca de* x_0 la función esta arbitrariamente cerca de L (entendiendo *arbitrariamente cerca* como que se pueden obtener valores tan próximos como se deseen, aproximándose lo suficiente a x_0).

Cabe notar también que el comportamiento en x_0 es irrelevante para el límite (dado que consideramos los puntos en los que $|x - x_0| > 0$). Es aquí donde se manifiesta la idea de que los límites analizan el comportamiento de la función *alrededor* de un punto.

Así, por ejemplo, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, donde $f(x) = c$, es igual a c, dado que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_0$ tal que $|c - c| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$ dado que $0 < \epsilon$ siempre, así que da igual que δ_0 tomemos.

De la misma manera, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, donde $f(x) = x$, es igual a x_0, dado que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_0 = \epsilon$ tal que $|x - x_0| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta = \epsilon$ dado que se trata de la misma expresión.

Teorema 18. *Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de D_f. Las dos siguientes expresiones son equivalentes:*

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A$
2. $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_f \backslash \{x_0\}$, *se tiene que* $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$

Demostración. Vamos a probar primero que $1 \implies 2$. Supongamos que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$. Entonces, $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - A| < \epsilon$. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq x_0$, y que $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$. Esto quiere decir que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$ tal que si $n > N$, entonces $|a_n - x_0| < \epsilon$. Ahora, sea $\epsilon_1 > 0$, $\delta_1 = \delta(\epsilon_1)$ y $N_1 = N(\delta_1)$. Entonces, si $n > N_1$, se tiene que

$|a_n - x_0| < \delta_1$, y por consiguiente $|f(a_n) - A| < \epsilon_1$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

Ahora se probará que $2 \implies 1$. La prueba será por reducción al absurdo. Supongamos que se tiene 2, pero que no se tiene 1. Es decir, que $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists x$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ pero $|f(x) - A| \geq \epsilon$. Entonces, podemos construir la sucesión $\{x_n\}$ con los valores de x mencionados anteriormente para $\delta = \frac{1}{n}$. De este modo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, de donde $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, y por el teorema de compresión $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Entonces, x_n es una sucesión del tipo descrito en 2, pero sabemos que hay algún ϵ tal que para esos valores, $|f(x_n) - A| \geq \epsilon$, así que no se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, llegando a una contradicción. □

Este teorema permite entender los límites de funciones como límites de sucesiones: toda sucesión que construyamos convergiendo a x_0, a través de f convergerá a L.

4.2.1. Propiedades de los límites

Ahora es muy sencillo probar las propiedades de límites de funciones en un punto haciendo uso del teorema anterior y las propiedades que ya se conocían de las sucesiones.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Demostración. Se va a probar únicamente *2*, siendo las demás demostraciones similares. Supongamos que $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Haciendo uso del teorema anterior, sabemos que $\forall \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq x_0$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = B$. De este modo, para todas estas a_n, haciendo uso de las propiedades ya conocidas para sucesiones, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + g(a_n) = A + B$. Ahora podemos usar el teorema hacia atrás para obtener $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$, que era lo que se buscaba. □

4.2.2. Límites de polinomios

Si consideramos el polinomio de grado n: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, con $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}\forall i$, podemos hallar $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)$ aplicando las propiedades de los límites varias veces. En efecto: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} \lim\limits_{x\to x_0} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (\lim\limits_{x\to x_0} x)^i$, donde hemos usado las propiedades 2, 1 y 3 en ese orden. Ahora, basta con recordar que $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, de modo que se tiene: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x_0^i = P(x_0)$. Es decir, el límite coincide con evaluar el polinomio.

4.2.3. Resultados acerca de límites

Gracias al teorema 18, se pueden aplicar los resultados ya conocidos de sucesiones a límites de funciones.

Proposición 32. *Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D_f$. Entonces, si $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, se tiene $A \geq 0$.*

Demostración. Si $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A$, por el teorema 18, todas las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ tales que $x_n \neq x_0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ cumplen que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Ahora bien, como $f(x_n) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos por la proposición 17 de sucesiones que $A \geq 0$. □

Corolario. *Si $a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in D_f$ para ciertos a, b, entonces se tiene que $a \leq \lim_{x\to x_0} f(x) \leq b$ si existe tal límite.*

Demostración. Basta con considerar $g(x) = f(x) - a \geq 0$ y $h(x) = b - f(x) \geq 0$ y aplicar el resultado anterior convenientemente.

Proposición 33. *Sean $g, h : D \mapsto \mathbb{R}$, y $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M \ \forall x \in D$, para algún M, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con las características descritas en el teorema 18, entonces $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$, y además por la condición del lema, $|h(x_n)| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Haciendo uso de la proposición 16 de sucesiones, tenemos entonces que $\lim_{n\to\infty} g(x_n) \cdot h(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria, esto se cumple para cualquiera de estas características, y por el teorema 18, $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Teorema 19 (Teorema de compresión)**.** *Sean $f, g, h : D \mapsto \mathbb{R}$ tres funciones tales que $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ \forall x \in D$. Entonces, $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = A$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con las características descritas en el teorema 18, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, y $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = A$. Asimismo, tenemos que $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Así, aplicando el teorema de compresión de sucesiones, sabemos que $\exists \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A$. Como $\{x_n\}$ era arbitraria, deducimos que esto ocurre con todas las sucesiones de estas características y por el teorema 18 se tiene que $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

Otros resultados se prueban de exactamente la misma manera. Por ejemplo:

Proposición 34. *Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = c$. Entonces, $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |c|$. Si $c = 0$, la implicación se cumple también en la otra dirección.*

Proposición 35. *Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D_f$ tal que $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = c$. Entonces, $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{c}$.*

4.2.4. Límites laterales

Muchas veces es problemático encontrar el límite de una función puesto que no se comporta del mismo modo *antes* que *después* del punto en cuestión. Por ello, podemos considerar el concepto de *límite lateral*, que solo tiene en cuenta una de estas zonas del dominio. Asimismo, puede ser útil para analizar funciones definidas en intervalos cerrados, de tal manera que para los extremos del intervalo no existen *alrededor* pero sí *en un lado.*

Definición 13. Se dice que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$ (límite a la derecha) si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$, $|f(x) - A| < \epsilon$. Asimismo, se dice que $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$ (límite a la izquierda) si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < x_0 - x < \delta$, $|f(x) - A| < \epsilon$.

La definición es igual que la de límite en un punto, pero solo se consideran los puntos de abscisa mayores (o menores, respectivamente) al punto estudiado.

Es posible reformular el teorema 18 para límites laterales, haciendo que todos los resultados anteriores sirvan también para estos límites:

Teorema 20. *Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$. Las dos siguientes expresiones son equivalentes:*

1. $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$
2. $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > x_0$; $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$

Asimismo, estas lo son:

1. $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$
2. $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < x_0$; $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$

Por ejemplo, la función signo, $sgn(x)$, que asigna a cada real 1, -1 o 0 dependiendo de su signo, tiene en $x_0 = 0$ límite $+1$ por la derecha y -1 por la izquierda.

4.2.5. Límites en el infinito

Para funciones cuyo intervalo de definición se extiende hasta infinito, es posible definir un *límite en infinito* del mismo modo que para sucesiones:

Definición 14. Sea $f : (a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \Delta_\epsilon > a$ tal que $|f(x) - A| < \epsilon$ si $x > \Delta_\epsilon$.

Asimismo, sea $g : (-\infty, b) \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = B$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \Delta_\epsilon < b$ tal que $|f(x) - A| < \epsilon$ si $x < \Delta_\epsilon$.

4.2.6. Límites igual a infinito

Al considerar cualquier tipo de límite, puede ocurrir que no exista convergencia pero la función tenga un comportamiento claro: hacerse arbitrariamente grande en tamaño. Es lo que ocurre, por ejemplo, en funciones como $\frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$. Este caso es claramente distinto a la falta de convergencia porque la función comienze a comportarse de forma *errática* (como ocurre en $\sin(\frac{1}{x})$), así que puede ser útil establecer esta definición:

Definición 15. Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$. Se dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si $\forall \Delta > 0$, $\exists \delta_\Delta > 0$ tal que si $x \in D_f$, $0 < |x - x_0| < \delta_\Delta$, se tiene $f(x) > \Delta$.

Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$. Se dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si $\forall \Delta > 0$, $\exists \delta_\Delta > 0$ tal que si $x \in D_f$, $0 < |x - x_0| < \delta_\Delta$, se tiene $f(x) < -\Delta$.

También es posible definir el límite igual a infinito en términos de sucesiones:

Teorema 21. *Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de D_f. Las dos siguientes expresiones son equivalentes:*

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
2. $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq x_0$; $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \pm\infty$

Esta proposición permite designar el inverso de límite infinito como límite igual a 0:

Proposición 36. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$*, entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Tenemos que $\forall\Delta > 0$, $\exists\delta_\Delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_\Delta$, entonces $|f(x)| > \Delta$. Ahora, sea $\epsilon > 0$ y $\delta_1 = \delta_{\frac{1}{\epsilon}}$. Así, si $0 < |x - x_0| < \delta_1$, se tiene $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon} \iff |\frac{1}{f(x)}| < \epsilon$. □

No es de extrañar: como $f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$, si uno crece arbitrariamente en tamaño el otro ha de decrecer para que su producto se mantenga en 1.

4.2.7. Límites de funciones trigonométricas

Proposición 37. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$

Demostración. Se usará la fórmula trigonométrica de resta de senos: $\sin(a)-\sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$, para $a = x$ y $b = x_0$.

Así, $0 \leq |\sin(x)-\sin(x_0)| \leq |2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})|$. Ahora bien, como $|2\cos(\frac{x+x_0}{2})| \leq 2$ y $\lim\limits_{x\to x_0} \sin(\frac{x-x_0}{2}) = 0$, por el teorema de compresión, sigue que $\lim\limits_{x\to x_0} |\sin(x) - \sin(x_0)| = \lim\limits_{x\to x_0} (\sin(x) - \sin(x_0)) = 0$, de donde se obtiene el resultado deseado. □

Proposición 38. $\lim\limits_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

Esto sigue de relacionar el límite anterior del seno con el coseno a través de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. □

Un resultado muy interesante muestra que $\sin(x)$ y x son similares cuando $x \to 0$, hecho que se observa intuitivamente entendiendo que $\sin(x)$ es el cateto opuesto de un triángulo rectángulo cuyo arco es x.

Proposición 39. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Demostración. Esto se suele denotar $\sin x \sim x$. De la definición de seno y tangente, podemos ver en la circunferencia de radio 1 que si $0 < x < \frac{\pi}{4}$, se tiene que $\sin x \leq x \leq \tan x$ (basta con observar las áreas de los triángulos formados por el ángulo x con el seno o con la tangente, y el área del sector circular delimitado por x, que está entre esos dos triángulos). Entonces, si x está en ese intervalo, $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$, y sigue del teorema de compresión que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Si $\frac{-\pi}{4} < x < 0$, las desigualdades anteriores se tienen en orden inverso puesto que $\sin x$ y $\tan x$ toman valores negativos, pero por compresión igualmente se llega a que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

4.3. Continuidad

Definición 16. Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, y $x_0 \in D_f$. Se dice que la función es **continua** en x_0 si $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Si una función es continua en todos los puntos de un intervalo, se dice que es continua en dicho intervalo. Asimismo, si es continua en todo su dominio, se dice que es continua.

Algunos ejemplos ya vistos de funciones continuas son los polinomios, $\sin(x)$, $\cos(x)$. Una función no es continua si $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ o bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

La noción de continuidad indica un *cambio suave* en la función, de tal manera que cerca de $f(x_0)$ la función toma valores arbitrariamente cercanos a ese: no cambia bruscamente.

Proposición 40. *Sean* $f : D \mapsto \mathbb{R}$*,* $g : D \mapsto \mathbb{R}$*, continuas en* $x_0 \in D$*. Entonces, son continuas en* x_0*:*

1. $c \cdot f(x)\ \forall c \in \mathbb{R}$

2. $f(x) + g(x)$

3. $f(x) \cdot g(x)$

4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ *si* $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$.

Esto sigue directamente de las propiedades de los límites ya vistas. Por ejemplo, en el caso de 2, puesto que tenemos que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, sigue de las propiedades que $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$.

4.3.1. Composición de funciones

Definición 17. Sea $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$, y $I_g = \{g(x) : x \in D_g\}$ su conjunto imagen. Si $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, y $I_g \subseteq D_f$, tiene sentido hablar de $f(g(x))$, lo que se conoce como **función compuesta** de f y g, que en ocasiones se denota $f \circ g(x)$.

Así, por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es $f(x) = x^2 + x - 1$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es $g(x) = \sin(x)$, entonces $f \circ g(x) = \sin^2(x) + \sin(x) - 1$.

Un útil resultado sobre continuidad en funciones compuestas es el que sigue:

Proposición 41. *Sean f, g funciones que se pueden componer para dar lugar a $f \circ g(x)$. Si g es continua en x_0, y f es continua en $g(x_0) = y_0$, entonces $f(g(x))$ es continua en x_0.*

Demostración. Recurriremos al teorema 18 de funciones en términos de sucesiones. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_g$ tal[7] que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Entonces, sabemos que $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0) = y_0$. Por esta última razón, y como f es continua en y_0, aplicando el teorema[8] 18 a $y_n = g(x_n)$ tenemos que $\lim_{n \to \infty} f(g(x_n)) = f(y_0)$. Entonces, $\lim_{n \to \infty} f(g(x_n)) = f(g(x_0))$. Así pues, como x_n era arbitraria, sigue que $\exists \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$. □

A través de esta proposición se puede probar la existencia de numerosos límites y calcularlos sabiendo ciertas funciones continuas elementales. Por ejemplo, sabiendo que $\sqrt{x}$ es continua, sigue el resultado 37 de funciones.

Es fácil imaginarse funciones continuas, y también discontinuas en una cantidad finita de puntos. Incluso, con algo de ingenio, se pueden construir funciones discontinuas en infinitos puntos (como $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$). Lo que no es evidente es que haya funciones *siempre discontinuas*:

Observación 4. La función $f : D_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ es discontinua en cualquier punto de $\mathbb{R}$. Esta función se conoce como *indicatriz de Dirichlet* y a veces se denota por $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ o bien $\chi_{\mathbb{Q}}$.

En efecto, si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto racional, entonces $f(x_0) = 1$ pero podemos construir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tomando cada x_n como un valor irracional de la vecindad $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$. Sabemos que tal valor existe por el teorema de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, del que se deduce la densidad irracional. Ahora, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, pero $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ de modo que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 1$. De manera análoga se prueba si x_0 es irracional, solo que esta vez tomando una sucesión de racionales gracias al teorema de densidad.

[7] No es necesario considerar que $x_n \neq x_0$, puesto que si algunos términos fuesen iguales a x_0, al ser continua la función g, seguimos pudiendo asegurar que $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$ ya que podemos separar ese límite en dos subsucesiones, la de x_n iguales a x_0, que evidentemente cumple ese límite, y la de x_n distintos a x_0, para la cual aplicamos el teorema.

[8] En esta ocasión, al igual que antes, tampoco importa que $g(x_n) = g(x_0)$ en algunos $n \in \mathbb{N}$

4.3.2. Teorema de Weierstrass

Para enunciar este teorema, vamos a tener en cuenta en primer lugar esta propiedad:

Proposición 42. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, la función está acotada, esto es, $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a, b]$.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supondremos que f no es acotada, esto es $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n$ tal que $n < f(x_n)$. (Hemos supuesto sin perder en generalidad que no es acotada superiormente. Si no es así, basta con considerar $-f$). La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ construida de esta forma está acotada, puesto que todos los x_n pertenecen a $[a, b]$. Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass de sucesiones, $\exists\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0 \in [a, b]$. No obstante, $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, porque $\{f(x_n)\}$ no es acotada según se ha visto, así que la función no es continua en ese punto, lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 22 (Weierstrass)**.** *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Entonces, $\exists max(I_f)$ y $\exists min(I_f)$.*

Demostración. Según el lema anterior, I_f está acotado así que tiene supremo. Sea $s = sup(I_f)$. Vamos a ver que s es máximo. (Análogamente se podrá probar que el ínfimo es mínimo). Tenemos que $\forall\epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in [a, b]$ tal que $s \geq f(x_\epsilon) > s - \epsilon$. Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ obtenida tomando los x_ϵ para $\epsilon = \frac{1}{n}$. Entonces, se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$ que $s \geq f(x_n) > s - \frac{1}{n}$. Por compresión, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = s$. Ahora bien, como x_n está acotada porque $x_n \in [a, b]$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $\exists\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0 \in [a, b]$. Como la función es continua, $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x_0)$, pero además, por ser subsucesión de $f(x_n)$, ese límite es igual a s. Así, $s = f(x_0) \in I_f$ $\square$

Este resultado es una potente herramienta en otras demostraciones, puesto que permite asumir valores máximos y mínimos en funciones simplemente sabiendo que son continuas en un intervalo cerrado.

4.3.3. Teorema de los valores intermedios

Teorema 23. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces, $\exists c \in (a, b)$ t.q. $f(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos sin perder en generalidad que $f(a) < f(b)$ (esto es, $f(a)$ es negativo y $f(b)$ es positivo, por la condición del teorema). Si no es así, basta con considerar la función $-f(x)$. Vamos a construir una sucesión de intervalos encajados. Sea $a_0 = a$, $b_0 = b$, y $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si $f(c_0) = 0$, hemos acabado. Si $f(c_0)$ es negativo, haremos $a_1 = f(c_0)$ y $b_1 = b_0$, en caso contrario se hará $a_1 = a_0$ y $b_1 = f(c_0)$. Ahora, $|[a_1, b_1]| = \frac{1}{2}|[a_0, b_0]|$, además de que una vez más $f(a_1) < f(b_1)$ siendo uno negativo y el otro positivo, y $[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$. Continuamos el procedimiento descrito, tomando cada vez la mitad de cada intervalo nuevo, de manera que en el paso k, tendremos intervalos $[a_k, b_k] \subseteq [a_{k-1}, b_{k-1}] \subseteq ... \subseteq [a_0, b_0]$, tales que $|[a_k, b_k]| = \frac{1}{2^k}|[a_0, b_0]|$. En este paso, tomaríamos $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$, y una vez más, si $f(a_k) = 0$ hemos acabado, si $f(a_k)$ es negativo hacemos $a_{k+1} = f(a_k)$, $b_{k+1} = b_k$ y si no al revés.

Finalmente, si el punto c buscado no se halla en ninguna de estas mitades, hemos construido una sucesión de intervalos encajados cuya longitud tiende a 0: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2^k}|[a_0, b_0]| = 0$. Por el lema de Borel, $\exists! c \in [a_k, b_k] \forall k \in \mathbb{N}$. Esto es, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Dado que la función es continua, se tiene necesariamente que $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k)$. Además, por como se construyó la sucesión, $f(a_k) < 0 \forall k \in \mathbb{N}$, de modo que $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \leq 0$. Análogamente, $\lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) \geq 0$. Así, $0 \leq f(c) \leq 0$, luego $f(c) = 0$. $\square$

4.3.4. Teorema de Bolzano

Para este resultado será relevante la siguiente definición:

Definición 18. Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **conexo** si y solo si $\forall a, b \in A$, $a < b$, se tiene que $[a, b] \subset A$.

Teorema 24 (Bolzano)**.** *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Entonces el conjunto imagen I_f es conexo.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in I_f$ con $y_1 < y_2$. Como están en el conjunto imagen, $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) = y_1; f(x_2) = y_2$. Obviamente, $x_1 \neq x_2$ y podemos asumir sin perder en generalidad que $x_1 < x_2$. Vamos a ver que $\forall d \in (y_1, y_2)$, $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$ con $f(x_0) = d$. Para ello, basta con considerar $\phi(x) = f(x) - d$. Efectivamente, $\phi(x_1) = f(x_1) - d < 0$, dado que $f(x_1) = y_1 < d$. Similarmente, $\phi(x_2) > 0$. Además $\phi(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ puesto que lo era $f(x)$. Por el teorema de los valores intermedios, $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$ t.q. $\phi(x_0) = d \iff f(x_0) = d$. De esto se deduce que $[y_1, y_2] \subset f([x_1, x_2]) \subset I_f$. □

4.3.5. Función inversa y continuidad

Definición 19. Sea $f : D_f \mapsto I_f$. Si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$, la función es biyectiva (es inyectiva, y sobre su imagen), y por tanto $\forall y \in I_f \exists! x \in D_f$ t.q. $f(x) = y$. Así, se define la **función inversa** como aquella que asigna a cada y tal x, y se denota por $f^{-1} : I_f \mapsto D_f$. $\forall y \in I_f$, $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Entonces, directamente de la definición: $f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in I_f$; $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in D_f$.

Teorema 25. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua y biyectiva. Entonces $f^{-1} : I_f \mapsto [a, b]$ es continua.*

Demostración. Sea $y_0 \in I_f$, y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I_f$ tal que $y_n \neq y_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Vamos a ver que entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$. Sea $x_n = f^{-1}(y_n)$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Si no se cumple este resultado, es porque $\exists \epsilon_0 > 0$ t.q. $\exists \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_{n_j} - x_0| \geq \epsilon_0 \ \forall j \in \mathbb{N}$; es decir, hay una subsucesión de x_n que no tiene límite x_0. Ahora bien, esta subsucesión está acotada, dado que $x_n \in [a, b] \ \forall n \in \mathbb{N}$, luego, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $\exists \{x_{n_{j_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_{j_k}} = x'$, y obviamente $x' \neq x_0$ por la condición que hemos visto anteriormente. Luego $f(x_{n_{j_k}}) \to f(x')$ por la continuidad de f, pero como es biyectiva, NO se tiene que $f(x_{n_{j_k}}) \to y_0$ (puesto que $x_0 \neq x'$, luego no se tendría $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$) contradiciendo la hipótesis. □

4.3.6. Cambio de variable

Proposición 43. *Sean f, g funciones que se pueden componer para formar $f(g(x))$, y $x_0 \in D_g$. Entonces, si g es continua en x_0 y denotamos $y_0 = g(x_0)$, siempre que exista una δ-vecindad de x_0 tal que $g(x) \neq g(x_0) \ \forall x \in V_\delta \backslash \{x_0\}$, se cumple que:*
$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

4.4. Monotonía de funciones

Definición 20. Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto conexo y $f : D \mapsto \mathbb{R}$ una función. Si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$, se dice que la función es **monótona creciente** en D. Si se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$ se dice que es **monótona decreciente**. Si las desigualdades son estrictas, se emplea la terminología **estrictamente creciente o estrictamente decreciente**.

Proposición 44. *Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ creciente. Entonces, $\forall c \in D$, $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = S_-(c)$. Asimismo, $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = I_+(c)$. (Si la función es decreciente, $\forall c \in D$, $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = I_-(c)$ y $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = S_+(c)$).*

Aquí, $S_-(c) = sup\{f(x) : x < c, x \in D\}$, $S_+(c) = sup\{f(x) : c < x, x \in D\}$, $I_-(c) = inf\{f(x) : x < c, x \in D\}$ y $I_+(c) = inf\{f(x) : c < x, x \in D\}$. Es fácil ver que estos números existen pues cada uno de estos conjuntos está acotado, superior o inferiormente, por $f(c)$, en los casos en los que se ha considerado.

En los casos triviales en los que c es un extremo de D puede no cumplirse esto por estar vacíos los conjuntos anteriores.

Demostración. Vamos a demostrar el primer caso, siendo los demás análogos. Sabemos que $\forall x \in D$, $x < c$, se tiene $f(x) \leq S_-(c)$. Asimismo, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in D$, $x_\epsilon < c$ tal que $f(x_\epsilon) > S_-(c) - \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$ y $\delta_\epsilon = c - x_\epsilon$. Este δ_ϵ es positivo dado que $c > x_\epsilon$. Ahora, si $x < c$, $x \in D$ y $c - x < \delta_\epsilon$, entonces $c - x < c - x_\epsilon \implies x_\epsilon < x$. Como la función es creciente, $f(x_\epsilon) \leq f(x) \implies f(x) > S_-(c) - \epsilon$. Entonces, $\epsilon > S_-(c) - f(x)$. Como $x < c$, entonces $S_-(c) \geq f(x)$, luego podemos decir que $\epsilon > |S_-(c) - f(x)|$. Dado que ϵ era un valor positivo arbitrario, concluimos que $\exists \lim_{x \to c^-} f(x) = S_-(c)$. $\square$

Ahora vamos a observar qué ocurre con la monotonía en funciones inversas. Primero:

Observación 5. Sea $f : D \mapsto I_f$ una función estrictamente creciente. Entonces, es biyectiva.

Está claro que esta función es sobreyectiva al estar definida sobre su imagen. Además debe ser inyectiva, dado que si $x_1 \neq x_2$, digamos $x_1 < x_2$ sin perder en generalidad, tenemos que $f(x_1) < f(x_2)$ de manera que $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Obsérvese que es válido también si es estrictamente decreciente).

Para garantizar que la función inversa también sea monótona, es necesario que I_f sea conexo, como se vio en la definición de función monótona. Por ello:

Proposición 45. *Sea $f : D \mapsto I_f$ estrictamente creciente y continua. Entonces, $f^{-1} : I_f \mapsto D$ es estrictamente creciente.*

Demostración. Al ser f estrictamente creciente, es biyectiva y por tanto existe su inversa. Como además f es continua, su imagen es conexa por el teorema de Bolzano. (Puesto que D ha de ser conexo). Además, por definición de imagen inversa, $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$, si $x \in D$ y $y \in I_f$. Así pues, siendo y_1, $y_2 \in I_f$, $y_1 < y_2$, debe ocurrir que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, puesto que si no, si llamamos $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, tendríamos que $x_1 \geq x_2$, cuando $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

Proposición 46. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces:*
f es continua $\iff I_f = [f(a), f(b)]$.

Demostración. Primero se probará $\implies$. Si f es continua, por el teorema de Bolzano, I_f es conexo. Entonces, como $f(a), f(b) \in I_f$, y $f(a) < f(b)$ dado que es creciente, se tiene que $[f(a), f(b)] \subseteq I_f$. Además, si $y_0 \in I_f$, $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como $a \leq x_0 \leq b$, entonces $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, luego $I_f \subseteq [f(a), f(b)]$.

Ahora se probará $\Longleftarrow$. La prueba será por reducción al absurdo. Supongamos que $I_f = [f(a), f(b)]$ pero f no es continua en el punto x_0, que es un punto interior sin perder en generalidad. Sabemos que como la función es creciente, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = S_-(x_0)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = I_+(x_0)$, donde $S_-(x_0)$ y $I_+(x_0)$ son el supremo de los valores de f por la izquierda de x_0 y el ínfimo por la derecha, respectivamente, que se denotarán por s, i. Si $s = i$, entonces como $s \leq f(x_0) \leq i$, tendríamos que f es continua en x_0 dado que tanto límites laterales como función coincidirían. Entonces $s < i$. Si $y \in (s, i)$, dado que $y > s$, $f(y) \notin f([a, x_0))$, y como $y < i$, $f(y) \notin f((x_0, b])$. De modo que o bien $y = f(x_0)$, o si no $y \notin f([a, b]) = I_f$. Es decir, que $(s, i) \backslash \{f(x_0)\} \nsubseteq I_f$. Pero ese conjunto es subconjunto de $[f(a), f(b)]$, y además es no vacío, luego se contradice que $I_f = [f(a), f(b)]$. $\square$

Esto permite reformular el resultado 48 de esta forma:

Proposición 47. *Sea $f : [a, b] \mapsto I_f$ estrictamente creciente y continua. Entonces, $f^{-1} : [f(a), f(b)] \mapsto [a, b]$ es estrictamente creciente y continua.*

Demostración. La mayor parte se ha visto en la proposición 48. Ahora además podemos añadir que como f^{-1} es creciente, y $I_f = [f^{-1}(f(a)), f^{-1}f(b)]$, entonces es continua. □

4.5. Continuidad uniforme

Un concepto muy importante en el análisis de funciones es el de *continuidad uniforme*. Hemos considerado ya la idea de continuidad en un intervalo observando **de manera aislada** cada punto y viendo allí si la función es continua o no. Una continuidad más fuerte en un intervalo se consigue exigiendo que el concepto que ya conocemos se dé *a la vez* en todos los puntos del intervalo, es decir, que para un $\epsilon > 0$, se pueda determinar un tamaño $\delta > 0$ en el que todos los puntos tengan su entorno a menos de ϵ de distancia.

Aunque parezca que todas las funciones continuas verifiquen esto, podría perfectamente no ser así, puesto que es posible que el δ tenga que ser cada vez más grande (arbitrariamente) dependiendo del punto, impidiendo así tomar uno para todo el intervalo.

Definición 21. Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tal que $\forall x, y \in D$, con $|x - y| < \delta_\epsilon$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Observación 6. Si f es uniformemente continua en D, es continua en D.

Evidentemente, para cualquier $x_0 \in D$, se verifica por la definición anterior que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in D$, con $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, luego la función es continua en cada punto de D.

El siguiente resultado prueba la intuición que se mencionaba anteriormente: las funciones continuas y las uniformemente continuas son las mismas, siempre que estemos en un intervalo cerrado.

Teorema 26. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta, y_\delta \in [a, b]$ tales que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon_0$. Ahora consideremos la sucesión $\delta_n = \frac{1}{n}$. Para cada uno de estos deltas, existen $x, y \in [a, b]$ con las propiedades anteriores. Podemos considerar las sucesiones de estas, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veamos que como los elementos de x_n están acotados en $[a, b]$, $\exists \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0 \in [a, b]$. Ahora bien, como $|x_{n_j} - y_{n_j}| < \frac{1}{n} \implies y_{n_j} - \frac{1}{n} < x_{n_j} < y_{n_j} + \frac{1}{n}$, luego por compresión también se tiene que $\lim\limits_{j\to\infty} y_{n_j} = x_0$. No obstante, no puede ocurrir que $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} f(y_{n_j})$, a causa de que $|f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \geq \epsilon_0$ siempre. Entonces la función no tiene límite en x_0 y no es continua allí, contradiciendo el enunciado. □

5. Derivabilidad

Una vez adquiridos los conceptos básicos acerca de funciones reales, podemos introducir la primera de las dos potentísimas herramientas del análisis real que trataremos: la derivada. En esencia, la derivada permite conocer *cuánto crece* la función *en un punto*. A priori, parece paradójico hablar de *crecimiento en un punto*, dado que el crecimiento es algo que se refiere a cómo cambia una cosa a lo largo del tiempo. No obstante, con el concepto de límite ya discutido, se le puede dar sentido a esta definición.

Definición 22. Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in D_f$ un punto interior (es decir, tal que $\exists \delta > 0$ con $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D_f$). Se dice que f es **derivable** en x_0 si $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$. Si existe, el límite se denota por $f'(x_0)$ o $\frac{d}{dx} f(x_0)$, y se conoce como **derivada de f en x_0**.

La idea es calcular el *crecimiento* de la función en intervalos cada vez más pequeños en torno a x_0, y al tomar el límite, obtenemos ese *crecimiento puntual.*

A causa de esta definición, podemos comprobar que una función debe ser continua en un punto para ser derivable en el mismo:

Observación 7. Si f es derivable en x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.

Que sigue directamente de operar con la definición de derivada y las propiedades de los límites. Así:

Proposición 48. *Si f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.*

Demostración. Como $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}(x - x_0) = 0 \cdot 0 = 0$ (según la observación anterior y la continuidad de los polinomios). Además $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Entonces, restando estas dos funciones, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 - 0 = 0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ □

El recíproco en general no es cierto. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ sabemos que es continua en $\mathbb{R}$, no obstante, no es derivable en $x = 0$, puesto que $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ al ser 1 por la derecha y -1 por la izquierda. Es decir, la derivabilidad aporta una condición *más fuerte* que la continuidad.

Definición 23. La derivada permite obtener la recta tangente a una función f en un punto x_0. Dicha recta es: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Es decir, es una recta que pasa por el punto deseado de la gráfica, y tiene el mismo crecimiento en ese punto.

Podemos establecer las derivadas de las funciones más simples a través de la definición:

Proposición 49. *Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la función constante $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = 0$.*
Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la función identidad $f(x) = x$. Entonces $f'(x) = 1$.

Demostración. Para la función constante, sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} 0 = 0$. Para la función identidad, sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} 1 = 1$. □

5.1. Propiedades de las derivadas

Como las derivadas son, en el fondo, límites, no es de extrañar que aparezcan una serie de propiedades para operar con ellas:

Proposición 50. *Sean $f : D \mapsto \mathbb{R}$ y $g : D \mapsto \mathbb{R}$. Entonces, para los x donde son derivables, se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Sea* $c \in \mathbb{R}$. $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *(Para que sea derivable en* x *debe estar definida, luego* $g(x) \neq 0$*)*

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario en el que esas funciones son derivables. En *1*, se trata de determinar el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} c\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = cf'(x_0)$, haciendo uso de las propiedades de los límites y de que f es derivable en x_0.

En *2*, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Para *3*, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. En el último paso se ha usado la continuidad de g.

Por último, en *4*, determinaremos primero la derivada de $\frac{1}{g(x)}$. Eso equivale a hallar el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ donde se ha usado la continuidad de g en el último paso. Ahora aplicamos *3* para $f(x)$ y $\frac{1}{g(x)}$, de modo que $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{-g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $\square$

Ahora podemos hallar la derivada de x^2, puesto que $(x^2)' = (x\cdot x)' = x\cdot 1 + 1\cdot x = 2x$. Inductivamente, de esta manera, se puede probar que $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A continuación se probará la regla de la cadena, que permite derivar funciones compuestas. Para ello, primero es útil observar el siguiente resultado:

Lema 2 (Carathéodory)**.** *Sea* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *y* $c \in D$. *Entonces,* f *es derivable en* c *si y solo si* $\exists\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$, *continua en* c *y tal que* $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$, *en cuyo caso además* $\varphi(c) = f'(c)$.

Demostración. Primero se demostrará $\Longrightarrow$. Si $\exists f'(c)$, entonces podemos definir la siguiente función: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, & \text{si } x \neq c \\ f'(c), & \text{si } x = c \end{cases}$, que es continua en c puesto que $\lim_{x\to c} \varphi(c) = f'(c)$ por definición de derivada, y $\varphi(c) = f'(c)$. Además cumple que $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$, puesto que si $x \neq c$, sigue de la definición multiplicando por $x - c$, y si $x = c$, entonces la igualdad queda $0 = 0$ lo cual es cierto.

Ahora se demostrará $\Longleftarrow$. Para ello, supongamos que existe $\varphi(x)$ con las características descritas. Entonces, de existir, $\lim_{x\to c} \varphi(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$, donde hemos dividido la expresión inicial por $x - c \neq 0$ (ya que a la hora de considerar el límite, estudiamos $x \neq c$). No obstante, sabemos que ese límite existe porque $\varphi(x)$ es continua en c, luego $\lim_{x\to c} \varphi(x) = \varphi(c) = f'(c)$, así que es derivable en c. $\square$

Teorema 27 (Regla de la cadena)**.** *Sea* $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, *y* $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$, *con* $I_f \subset D_g$, *donde* I_f *es la imagen de* f. *Si además* f *es derivable en* $x_0 \in D_f$, *y* g *es derivable en* $y_0 = f(x_0) \in D_g$, *entonces* $G(x) = (g \circ f)(x)$ *es derivable en* x_0, *y* $G'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Demostración. Vamos a aplicar el lema de Carathéodory a las funciones f y g. Así, $\exists\varphi(x)$ continua en x_0 tal que $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, y $\exists\psi(y)$ continua en y_0 tal que $g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$, donde además $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ y $g'(y_0) = \psi(y_0)$.

Ahora podemos sustituir $y = f(x)$, dado que $f(x) \in D_g$, y $y_0 = f(x_0)$ para obtener que $g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0))$.

Ahora sustituimos el último factor: $G(x) - G(x_0) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0) = [(\psi \circ f) \cdot \varphi](x) \cdot (x - x_0)$.

Ahora bien, la función $[(\psi \circ f) \cdot \varphi](x)$ es continua en x_0 dado que $\varphi(x)$ y $f(x)$ son continuas en x_0 y $\psi(x)$ es continua en $f(x_0)$. Así, por el lema de Carathéodory, $G(x)$ es derivable en x_0.

Además, $G'(x_0) = [(\psi \circ f) \cdot \varphi](x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \phi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. $\square$

5.1.1. Derivada de las funciones seno, coseno y tangente

Otras funciones que se derivan cómodamente en términos de ellas mismas son las trigonométricas:

Proposición 51. $\forall x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$
3. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Demostración. Para el seno, veamos que si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \cos(\frac{x+x_0}{2}) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \cos(\frac{2x_0}{2}) = 1 \cdot \cos(x_0) = \cos x_0$, donde se ha usado la propiedad del producto de límites, la continuidad de $\cos(x)$ y el cambio de variable en funciones compuestas.

Para el coseno, observemos que $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, luego, aplicando la regla de la cadena, $\cos'(x) = \sin'(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x)$.

Para la tangente basta con aplicar la regla del cociente de derivadas, teniendo en cuenta que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. $\square$

5.1.2. Derivada de la función inversa

Teorema 28. *Sea $f : D_f \mapsto I_f$ una función biyectiva y derivable en $x_0 \in D_f$. Entonces, $f^{-1} : I_f \mapsto D_f$, su inversa, es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y además $f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, siempre que $f'(x_0) \neq 0$.*

Demostración. Del lema de Carathéodory se deduce que $\exists \varphi(x)$ continua en x_0 tal que $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, y además $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. Como $f^{-1}(y) = x$, escribimos $y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$, y como por hipótesis $\varphi(x_0) \neq 0$ y es continua en ese punto, debe haber una vecindad en la cual no sea nula, luego podemos dividir:

$(y - y_0) \cdot \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} = (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$, y como $\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ es continua en y_0, deducimos por el lema de Carathéodory que $\exists f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$. $\square$

5.2. Extremos relativos

A continuación vamos a ver una de las mayores utilidades de la derivada: el cálculo de extremos. Con la derivada, podemos identificar en qué puntos la función es *más grande* o *más pequeña* que todos los valores que los rodean, es decir, hallar *extremos*. La idea es observar que en estos puntos (que pueden imaginarse como *valles* o *picos*), la función pasa de crecer a decrecer o a la inversa, es decir, su derivada cambia de signo.

Definición 24. Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que en $x_0 \in D$ la función alcanza un **máximo relativo** si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$.

Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que en $x_0 \in D$ la función alcanza un **mínimo relativo** si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, se tiene que $f(x) \geq f(x_0)$.

Cuando un punto es máximo o mínimo relativo, se dice que es extremo relativo.

Proposición 52. *Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función derivable, y tal que $c \in (a, b)$ es extremo relativo de la función. Entonces, $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supondremos sin perder en generalidad que c es máximo relativo. Consideremos $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Está claro que $x - c < 0$, dado que el límite es por la izquierda, y como c es máximo, $f(x) - f(c) \leq 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Sabemos que la función es derivable, luego ese límite existe (es $f'(c)$), y podemos afirmar que $f'(c) \geq 0$. Ahora estudiaremos $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Ahora $x - c > 0$, y se sigue teniendo que $f(x) - f(c) \leq 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, así que $f'(c) \leq 0$. Así pues, $f'(c) = 0$. Si c es mínimo relativo, basta con multiplicar por -1 la función. □

Atención. Esta proposición no es un *detector* de extremos relativos: no puede afirmarse que si una función tiene derivada nula en un punto, este sea un extremo (pensemos en x^3 en el punto 0). No obstante, nos permite *descartar* los puntos que no son extremos: todos aquellos en los que f sea derivable con derivada no nula, no pueden serlo.

5.3. Teoremas de Rolle y del valor medio

Los siguientes resultados en relación a la derivada son de enorme valor teórico y muy utilizados en otras demostraciones, y para conocer el comportamiento de una función sabida su derivada.

Teorema 29 (Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Si $f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$, entonces $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$ y hemos terminado. Si no, por el teorema de Weierstrass, sabemos que $\exists \min(I_f) = m$ y $\exists \max(I_f) = M$, y como la función no es constante, $m \neq M$. Esto quiere decir que $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = m$ o $f(c) = M$, puesto que de no existir, m y M tendrían que ser $f(a)$ y $f(b)$, que son iguales. Ahora bien, como c es máximo o mínimo de la función, y esta es derivable, quiere decir que $f'(c) = 0$. □

Teorema 30 (Valor medio)**.** *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, y derivable en (a, b). Entonces, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Demostración. Vamos a restar a f la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, para obtener una función que cumpla $f(a) = f(b) = 0$ y poder aplicar el teorema de Rolle. Es decir, consideremos $g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)]$. Se verifica fácilmente que $g(a) = g(b) = 0$. Además, como $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ es una recta, es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, es decir, $f'(c) - [0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1)] = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

El resultado que sigue es una aplicación de estos conceptos:

Proposición 53. *Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$. Entonces, $\forall x \in (a, b)$ $f(x) = c$ para algún $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces, si consideramos el intervalo $[x_1, x_2]$, podemos aplicar el teorema del valor medio para comprobar que $\exists c \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$, dado que $f(x_2) - f(x_1) \neq 0$, lo que es una contradicción. □

5.4. Valor medio generalizado y regla de l'Hôpital

Esta subsección se centra en demostrar la mágica *regla de l'Hôpital*, que proporciona una herramienta para calcular límites de cocientes de funciones derivables, cuando las cosas se complican.

Teorema 31 (Valor medio generalizado)**.** *Sean $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ funciones continuas, y derivables en (a, b). Si $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, entonces $\exists c \in (a, b)$ t.q. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Demostración. Sea $F(x) = [f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$. Es fácil comprobar que $F(a) = F(b) = 0$. Además, es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por las propiedades de la continuidad y derivabilidad de las funciones suma y producto. Entonces, por el teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$. Además, $F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$. Entonces, $(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \implies (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$, y dividiendo ambos términos por $g'(c) \neq 0$ y por $g(b) - g(a) \neq 0$ (puesto que en caso contrario el teorema de Rolle asegura que en algún punto se tiene $g'(x) = 0$), queda demostrado el teorema. □

Teorema 32 (L'Hôpital)**.** *Sean $f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ derivables. Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$ y $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. También se verifica si $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.*

Demostración. Vamos a extender el dominio de estas funciones para poder aplicar el teorema anterior. Así, sea $a < b_1 < b$, y definimos $\hat{f} : [a, b_1] \mapsto \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in (a, b_1]$, $\hat{f}(a) = 0$, y $\hat{g} : [a, b_1] \mapsto \mathbb{R}$, $\hat{g}(x) = g(x)$ si $x \in (a, b_1]$, $\hat{g}(a) = 0$. De esta forma, las funciones creadas son continuas en $[a, b_1]$ y derivables en $(a, b_1]$. Cabe observar que, salvo en $x = a$, las funciones son idénticas a las originales, de modo que su derivada también lo será. Ahora, aplicando el teorema de valor medio generalizado para esas funciones, en el intervalo $[a, x]$, $x < b_1$ tenemos que $\exists c_x \in (a, x)$ t.q. $\frac{\hat{f}'(c_x)}{\hat{g}'(c_x)} = \frac{\hat{f}(x)-\hat{f}(a)}{\hat{g}(x)-\hat{g}(a)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$. Esto quiere decir que $\lim_{x\to a^+} \frac{\hat{f}'(c_x)}{\hat{g}'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, dado que el comportamiento en $x = a$ no se tiene en cuenta para el límite. Además, como $a < c_x < x$, cuando $x \to a^+$, por compresión, $c_x \to a^+$. Por tanto, renombrando c_x por x: $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. □

Observación. *El teorema se verifica también para el límite por la izquierda de b, siendo la prueba de la misma manera. Así, se verifica también para el límite bilateral, dado que equivale al unilateral si existe.*

Teorema 33 (L'Hôpital II)**.** *Sean $f, g : (a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ derivables. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $\forall x \in (a, \infty)$, $g'(x) \neq 0$ y $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. También se verifica si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.*

Demostración. Esto es consecuencia directa del teorema anterior. Consideremos $F(x) = f(\frac{1}{x})$ y $G(x) = g(\frac{1}{x})$. Está claro que son derivables en su dominio, que es $(0, \frac{1}{a})$, puesto que se trata de la composición de dos funciones derivables en los puntos oportunos. Además, de acuerdo al lema 38, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{G(x)}$. Veamos que, de acuerdo al teorema anterior, como $\lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{x})(\frac{-1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(\frac{-1}{x^2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, que existe por la condición del teorema, entonces $\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ □

Análogamente se tiene el resultado para límite en $-\infty$. El teorema también funciona si los límites de las funciones implicadas son $\pm\infty$.

Teorema 34 (L'Hôpital III)**.** *Sean $f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ derivables. Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$ y $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. También se verifica si $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.*

5.5. Intervalos de crecimiento

Teorema 35. *Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces:*

1. *La función es creciente en (a, b) si y solo si $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \geq 0$.*
2. *La función es decreciente en (a, b) si y solo si $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \leq 0$.*
3. *Si $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$, la función es estrictamente creciente en (a, b).*
4. *Si $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$, la función es estrictamente decreciente (a, b).*

Demostración. Se va a demostrar *1*, siendo los demás análogos. Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ creciente en (a, b). Entonces, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$. Sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces, si $x > x_0$, se tiene que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, dado que el numerador es no negativo y el denominador es positivo. Si $x < x_0$, entonces $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, dado que el numerador es no positivo y el denominador es negativo. Como siempre que $x \neq x_0$ se verifica que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, entonces $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \geq 0$, y x_0 era arbitrario.

Para demostrar la implicación recíproca, supongamos que la función cumple $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \geq 0$. Entonces, si la función no es creciente en (a, b), $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ tales que $f(x_1) > f(x_2)$. Entonces, haciendo uso del teorema del valor medio, $\exists x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$ contradiciendo la hipótesis. □

Un ejemplo de aplicación de todo esto:

Observación 8. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua, y además derivable en (a, b), y tal que $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Entonces, $f(a) = \text{mín}\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $f(b) = \text{máx}\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Demostración. Por el teorema anterior, la función es creciente. Según se vio anteriormente, entonces $\lim_{x \to a^+} f(x) = \text{ínf}\{f(x) : x \in (a, b)\} = f(a)$ por la continuidad de la función. Análogamente se demuestra $f(b)$, y el resultado opuesto para funciones con derivada menor o igual que 0. □

Observación 9. Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ derivable. Entonces, si $f'(x_0) = 0$ para $x_0 \in (a, b)$, y $\exists \delta > 0$ t.q. $f'(x) \geq 0$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, entonces la función alcanza máximo local en x_0. Asimismo, si $f'(x_0) = 0$ para $x_0 \in (a, b)$, y $\exists \delta > 0$ t.q. $f'(x) \leq 0$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$ si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, entonces la función alcanza mínimo local en x_0.

5.6. Polinomios de Taylor

El objetivo de esta sección es establecer los *polinomios de Taylor*. Es mucho más fácil hacer cálculos con polinomios que con otras funciones, de tal manera que se busca, dada una función, encontrar un polinomio que la aproxime de manera lo suficientemente satisfactoria como para poder usarlo en su lugar y conocer el error que se comete al hacerlo. Para ello, utilizaremos las derivadas.

Observemos que la derivada de una función derivable $f : D \mapsto \mathbb{R}$ mantiene su dominio, y es posible que siga siendo derivable en D. Así, se puede calcular la derivada de esta, lo que se suele denotar por $f''(x)$ o $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$. Este proceso podría seguir repitiéndose si la función resultante continúa siendo derivable. Tras n veces se obtiene la *derivada n-ésima*, que se denota $f^{(n)}(x)$ o $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$.

Definición 25. Se dice que $f : D \mapsto \mathbb{R}$ es **derivable n veces** si $\exists f^{(n)}(x)$.

Para aproximar una función f cerca de un punto $x_0 \in D$ de forma polinómica, se puede construir el **polinomio de taylor de grado n de f centrado en** x_0. Este polinomio, $P_{n,x_0}(f, x)$ verifica que $f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}_{n,x_0}(f, x_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq k \leq n$. Es decir, cualquier derivada del polinomio en x_0 es igual a la misma derivada de f en x_0. Por tanto, se trata de una *aproximación local*: solo estamos imponiendo condiciones al polinomio para que se parezca a f en un punto dado x_0.

Definición 26 (Polinomio de Taylor)**.** El **polinomio de taylor de grado** n **de** f **centrado en** x_0 es $P_{n,x_0}(f,x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$.

Para demostrar que se cumple la propiedad mencionada anteriormente, primero veremos que:

Observación 10. $P^{(1)}_{n,x_0}(f,x) = P_{n-1,x_0}(f',x)$

Es fácil verlo derivando cada término del polinomio: $P^{(1)}_{n,x_0}(f,x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i)' = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-1)!}(x-x_0)^{i-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{f'^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = P_{n-1,x_0}(f',x)$

Ahora se demuestra la propiedad:

Proposición 54. $f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}_{n,x_0}(f,x)(x_0)$, $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

Demostración. Es fácil comprobar sustituyendo que para $k=0$ se verifica la propiedad. Si derivamos 1 vez: $P^{(1)}_{n,x_0}(f,x) = P_{n-1,x_0}(f',x)(x_0) = f'(x_0)$ según acabamos de ver. De hecho, para todo k basta con aplicar la observación anterior k veces para llegar al polinomio de Taylor de $f^{(k)}(x)$, que sabemos que en x_0 debe valer $f^{(k)}(x_0)$ por el caso $k=0$. □

El teorema de Taylor permite conocer el error de la aproximación, y resulta que la aproximación es muy buena, y de hecho mejora cuanto más alto sea el grado del polinomio, y el error disminuye cuanto más cerca del x_0 nos situemos (como es lógico):

Teorema 36 (Taylor)**.** *Sea* $R_{n,x_0}(f,x) = f(x) - P_{n,x_0}(f,x)$ *el resto de* f *y el polinomio de Taylor de grado* n*. Si* $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$ *es* $(n+1)$ *veces derivable, entonces:*

$R_{n,x_0}(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$*, con* $x \lesseqgtr c \lesseqgtr x_0$.

Es decir, que no solo $R_{n,x_0} \to 0$ *cuando* $x \to x_0$*, sino que lo hace rápidamente:* $\frac{R_{n,x_0}}{(x-x_0)^n} \to 0$.

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción. En primer lugar, si $n=0$, entonces tenemos que $R_{0,x_0} = f(x) - f(x_0)$. Está claro por el teorema de valor medio que $\exists c$, $x \lesseqgtr c \lesseqgtr x_0$ tal que $f(x)-f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$. Ahora supongamos que $R_{n,x_0}(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. Entonces, veamos que $\frac{R_{n+1,x_0}(f,x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{R_{n+1,x_0}(f,x)-R_{n+1,x_0}(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+2}-(x_0-x_0)^{n+2}} = \frac{R'_{n+1,x_0}(f,c')}{(n+2)(c'-x_0)^{n+1}}$ para algún c' entre x y x_0, por el teorema del valor medio generalizado. Ahora, podemos aplicar la hipótesis: $\frac{R'_{n+1,x_0}(f,c')}{(n+2)(c'-x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n,x_0}(f',c')}{(n+2)(c'-x_0)^{n+1}} = \frac{\frac{f'^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(c'-x_0)^{n+1}}{(n+2)(c'-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!}$. Entonces, finalmente, tenemos que $\frac{R_{n+1,x_0}(f,x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!}$, de donde sigue lo que se quería probar. □

Ahora vamos a ver una utilidad para determinar si un extremo local es máximo o mínimo a través de derivadas sucesivas, utilizando el Teorema de Taylor:

Proposición 55. *Sea* $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$ *una función derivable* $2m$ *veces, con* $m \in \mathbb{N}$*, y con* $f^{(2m)}(x)$ *continua. Sea* $x_0 \in (a,b)$*. Si* $\forall i \in \mathbb{N}$*,* $1 \leq i < 2m$*, se tiene que* $f^{(i)}(x_0) = 0$*, entonces:*

1. *Si* $f^{(2m)}(x_0) > 0$*, la función alcanza mínimo local en* x_0.
2. *Si* $f^{(2m)}(x_0) < 0$*, la función alcanza máximo local en* x_0.

Demostración. Haciendo uso del teorema de Taylor, sabemos que $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2m)}(c_x)}{(2m)!}(x-x_0)^{2m}$, con cada c_x entre x y x_0, puesto que el polinomio de Taylor de grado $2m-1$ solo como término no-nulo la función sin derivar. Ahora, si $f^{(2m)}(x_0) > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$, se verifica $f^{(2m)}(x) > 0$. Esto sigue de la continuidad de la derivada $2m$-ésima, puesto que como $\frac{f^{(2m)}(x_0)}{2} > 0$, se verifica que existe $\delta > 0$ tal que si x está en ese δ-entorno de x_0, $|f^{(2m)}(x) - f^{(2m)}(x_0)| < \frac{f^{(2m)}(x_0)}{2}$, de donde sigue que $f^{(2m)}(x) > \frac{f^{(2m)}(x_0)}{2} > 0$. Por lo tanto, se tiene que, en ese entorno, $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2m)}(c_x)}{(2m)!}(x - x_0)^{2m} > f(x_0)$, al ser $\frac{f^{(2m)}(c_x)}{(2m)!}(x - x_0)^{2m} > 0$ según se ha visto. Así, x_0 es mínimo local. Análogamente se prueba el caso 2. □

5.7. Convexidad

Otro concepto que permite conocer más propiedades acerca de una función es la *convexidad*, es decir, hacia dónde se *curva* una función.

Definición 27. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que f es **convexa** en $[a, b]$ si $\forall x, y \in [a, b]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, se tiene que $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$. Si la desigualdad se tiene a la inversa, se dice que es **cóncava**.

Intuitivamente, es convexa si la recta que une $f(x)$ y $f(y)$ queda por encima de la gráfica en todos los puntos entre x, y, que quedan representados por la elección de α (p. ej, si $\alpha = 0$, se obtiene y y si $\alpha = 1$ se obtiene x). Véase que si f es cóncava, $-f$ es convexa y viceversa, ya que al multiplicar por -1 la desigualdad se invierte.

Teorema 37. *Sea $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ dos veces derivable.*

1. $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b) \iff f$ *es convexa en* (a, b).

2. $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b) \iff f$ *es cóncava en* (a, b).

Demostración. Se va a probar *1*, puesto que luego sigue *2* aplicando *1* a $-f$. Para probar $\implies$, supongamos que $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Sean $x, y \in (a, b)$ y $\alpha \in [0, 1]$. Denotamos $z_\alpha = \alpha x + (1 - \alpha)y$. Por el teorema de Taylor, sigue que:

$$f(x) = f(z_\alpha) + f'(z_\alpha)(x - z_\alpha) + \frac{f''(C_x)}{2}(x - z_\alpha)^2$$

$$f(y) = f(z_\alpha) + f'(z_\alpha)(y - z_\alpha) + \frac{f''(C_y)}{2}(y - z_\alpha)^2$$

Al ser $f''(x) \geq 0$, se tiene:

$$f(x) \geq f(z_\alpha) + f'(z_\alpha)(x - z_\alpha)$$

$$f(y) \geq f(z_\alpha) + f'(z_\alpha)(y - z_\alpha)$$

Es decir:

$$\alpha f(x) \geq \alpha f(z_\alpha) + \alpha f'(z_\alpha)(x - z_\alpha)$$

$$(1 - \alpha)f(y) \geq (1 - \alpha)f(z_\alpha) + (1 - \alpha)f'(z_\alpha)(y - z_\alpha)$$

Sumando:

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \geq f(z_\alpha) + f'(z_\alpha)[\alpha x + (1 - \alpha)y - z_\alpha] = f(z_\alpha) + f'(z_\alpha)[z_\alpha - z_\alpha] = f(z_\alpha)$$

Como se quería probar.

Ahora se va a probar $\Longleftarrow$. Supongamos que f es convexa en (a,b). Sea $x \in (a,b)$. Se puede comprobar fácilmente que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^2} = 0$. (El numerador es la función menos el polinomio de Taylor de la misma centrado en x). Asimismo, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h)-f(x)+f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^2} = 0$. Por lo tanto, la suma tiende a 0: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-f''(x)h^2}{h^2} = 0$, luego $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$. Ahora bien, si tomamos la definición de convexidad con $\alpha = \frac{1}{2}$, y para los valores $x+h$, $x-h$, puesto que $x = \frac{1}{2}(x+h)+\frac{1}{2}(x-h)$, tenemos que $\frac{1}{2}f(x+h)+\frac{1}{2}f(x-h) \geq f(x)$, de modo que $f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geq 0$. Hemos deducido entonces que:

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

De donde sigue que $f''(x) \geq 0$. □

6. Integral Riemann

Esta sección se centra en la segunda herramienta del análisis real: la *integral*. Consiste en, dada una función f que cumple unas mínimas condiciones (tales f se denominaran **integrables**), asociar **un valor** a dicha función, llamado *integral*. Ese valor puede interpretarse como un *promedio* o *suma ponderada continua* de la función. Otra interpretación habitual y muy visual es el *área bajo la gráfica* de la función, aunque esta última utiliza el concepto de gráfica, que no es fundamental a la hora de definir, calcular o entender la integral.

6.1. Conceptos básicos

Con el fin de definir esta integral, dado que no sabemos hacer *sumas ponderadas* ni *promedios* de funciones, sino de una cantidad finita de números, vamos a asociar una serie de valores a la función. En concreto, dividiremos su dominio de definición en *trozos*, y cogeremos un valor de la función en cada trozo. Calcularemos esa *suma ponderada* (a cada valor le daremos un peso proporcional a la longitud del trozo que representa), y finalmente bastará con utilizar el concepto de límite para hacer que estas sumas ponderadas converjan al valor deseado.

Definición 28 (Partición)**.** Una partición $\mathcal{P}$ de un intervalo $[a, b]$ es una colección de puntos ordenados, $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$, que dividen $[a, b]$ en intervalos $\Delta x_j = [x_j, x_{j+1}]$ con $0 \leq j \leq n-1$.

Los valores que vamos a asociar a cada trozo de la partición van a ser el mayor y el menor que tome la función. De esta manera, podemos obtener una *suma ponderada por exceso* y otra *por defecto*, y sabremos que la aproximación que estamos realizando es correcta si ambas convergen a lo mismo cuando refinamos la partición.

Vamos a considerar siempre funciones $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tales que $\exists K \geq 0$ con $|f(x)| \leq K \ \forall x \in [a, b]$, es decir **acotadas**. Dada una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, denotaremos $M_j = \sup\limits_{x \in \Delta x_j} f(x)$ y $m_j = \inf\limits_{x \in \Delta x_j} f(x)$.

Definición 29 (Sumas de Riemann)**.** Se definen la suma superior de Riemann: $\overline{S}(f, \mathcal{P}) \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k |\Delta x_k|$ y la suma inferior de Riemann: $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k |\Delta x_k|$, con n el número de puntos de la partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$.

Es fácil ver que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$.

Definición 30. Se dice que una partición $\mathcal{P}_1$ es más fina que otra, $\mathcal{P}_2$, y se denota $\mathcal{P}_1 \propto \mathcal{P}_2$, si $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$, es decir, todos los puntos de la segunda están en la primera.

Proposición 56. *Si $\mathcal{P}_1 \propto \mathcal{P}_2$, entonces, $\overline{S}(f, \mathcal{P}_1) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_2)$. Asimismo, $\underline{S}(f, \mathcal{P}_1) \geq \underline{S}(f, \mathcal{P}_2)$*

Demostración. Vamos a probar primero que esto se tiene en el caso más básico: $\mathcal{P}_2 = \{a, b\}$ es un intervalo y $\mathcal{P}_1 = \{a, c, b\}$ es el mismo pero con un punto más. Veamos que $\overline{S}(f, \mathcal{P}_2) = M(b-a)$, con M el supremo de $f(x)$ en $[a, b]$. Además, $\overline{S}(f, \mathcal{P}_1) = M_1(c-a) + M_2(b-c) \leq M(c-a) + M(b-c) = M(b-a)$, como se quería probar, donde M_1, M_2 son los supremos en $[a, c]$ y $[c, b]$, que deben ser menores o iguales al supremo global. Si $\mathcal{P}_1$ añade más de un punto, basta con hacer lo mismo, puesto que $\sum_{k=0}^{n-1} M_k |\Delta x_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta x_k| = M |[a, b]|$. Finalmente, si $\mathcal{P}_2$ consta de más de 2 puntos, basta con aplicar el resultado por separado a cada sub-intervalo definido por 2 puntos consecutivos de la partición. Análogamente se prueba para la suma inferior. $\square$

Observación 11. Si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son particiones cualesquiera, se tiene que $\underline{S}(f, \mathcal{P}_1) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_2)$.

En efecto, como $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es más fina que ambas, se verifica que $\underline{S}(f, \mathcal{P}_1) \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_2)$.

Ahora vamos a ver que cualquiera de las sumas de Riemann está acotada por la misma cota:

Proposición 57. *Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$. Entonces $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq K(b-a)$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P}) \geq -K(b-a)$, donde K es la cota de la función.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{P}_0 = \{a, b\}$. Sabemos que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_0) = (b-a) \sup\limits_{x \in [a,b]} (f(x)) \leq K(b-a)$. Análogamente se prueba el caso de la suma superior.

Definición 31. Sea Ω el conjunto de las particiones de $[a, b]$. Entonces, $\exists \sup\limits_{\mathcal{P} \in \Omega} \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \underline{S}_f$, y también $\exists \inf\limits_{\mathcal{P} \in \Omega} \overline{S}(f, \mathcal{P}) = \overline{S}_f$

Ambos existen por la propiedad de completitud, dado que hemos visto que las sumas superiores e inferiores están acotadas.

Observación 12. $\underline{S}_f \leq \overline{S}_f$

Definición 32 (Función integrable)**.** Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que f es integrable si $\overline{S}_f = \underline{S}_f = S_f$, y se denota por $\int_a^b f(x)dx = S_f$.

Como hemos dicho, diremos que ese valor buscado, la integral, existe, únicamente si ambas aproximaciones convergen a lo mismo. Como es un poco engorroso trabajar con supremos e ínfimos sobre *todas las particiones posibles*, vamos a ver un criterio mucho más cómodo para la integrabilidad de las funciones:

Teorema 38. *Sea $\omega(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=0}^{n-1} (M_j - m_j)|\Delta x_j| = \overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P})$. Entonces, f es integrable si y solo si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mathcal{P}_\epsilon$ tal que $\omega(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$.*

Demostración. Primero se demostrará $\implies$. Sea $\epsilon > 0$. Si f es integrable, y como S_f es supremo de las sumas inferiores e ínfimo de las cotas inferiores, $\exists \mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \Omega$ tales que $\overline{S}(f, \mathcal{P}') < S_f + \epsilon/2$ y $\underline{S}(f, \mathcal{P}'') > S_f + \epsilon/2$. Multiplicando la última desigualdad por -1 y sumando, tenemos que $\overline{S}(f, \mathcal{P}') - \underline{S}(f, \mathcal{P}'') < \epsilon$. Ahora bien, sea $\mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$, que es más fina. Entonces, $\omega(f, \mathcal{P}_\epsilon) = \overline{S}(f, \mathcal{P}_\epsilon) - \underline{S}(\mathcal{P}_\epsilon) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}') - \underline{S}(\mathcal{P}'') < \epsilon$, como se quería probar.

Ahora se demostrará $\impliedby$. Tenemos que $\forall \epsilon > 0$, $\overline{S}(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \underline{S}(f, \mathcal{P}_\epsilon) + \epsilon$. De hecho, como $\overline{S}_f$ es ínfimo y $\underline{S}_f$ es supremo, tenemos que $\overline{S}_f \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \underline{S}(f, \mathcal{P}_\epsilon) + \epsilon \leq \underline{S}_f + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, sigue que $\overline{S}_f \leq \underline{S}_f$. Asimismo, (véase observación 10) que $\underline{S}_f \leq \overline{S}_f$. Por lo tanto, $\overline{S}_f = \underline{S}_f$, así que f es integrable. $\square$

6.2. Propiedades

Observación 13. Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

Esto se comprueba puesto que las sumas de Riemann siempre valen $c(b-a)$, dado que tanto M_j como m_j valen c, sin importar la partición ni el Δx_j.

Proposición 58. *Sea f integrable. Entonces $\forall c \in \mathbb{R}$, se tiene que $g(x) = cf(x)$ es integrable, y $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)$.*

Demostración. Si $c = 0$, esto es trivial, puesto que $\int_a^b cf(x)dx = \int_a^b 0 = 0(b-a) = 0 = 0\int_a^b f(x)$. Si $c > 0$, cabe observar que $\sup\limits_{x \in \Delta x_j} cf(x) = c \sup\limits_{x \in \Delta x_j} f(x)$, e igual para el ínfimo. De esta manera, como todas las sumas de riemann guardan esta relación (las sumas superiores son c veces las de f e igual con las inferiores), tenemos que $c\overline{S}_f = \overline{S}_{cf}$ y $c\underline{S}_f = \underline{S}_{cf}$. Como $\overline{S}_f = \underline{S}_f \implies c\overline{S}_f = c\underline{S}_f$, entonces $\overline{S}_{cf} = \underline{S}_{cf} = t$ luego es integrable, y sabemos que $t = c\underline{S}_f$, es decir, $t = c\int_a^b f(x)dx$.

Si $c < 0$, ahora el supremo se invierte con el ínfimo: $\sup\limits_{x\in\Delta x_j} cf(x) = c \inf\limits_{x\in\Delta x_j} f(x)$ y viceversa. Esto hace que $c\overline{S}_f = \underline{S}_{cf}$ y $c\underline{S}_f = \overline{S}_{cf}$, pero igualmente: $\overline{S}_f = \underline{S}_f \implies c\overline{S}_f = c\underline{S}_f \implies \underline{S}_{cf} = \overline{S}_{cf} = t$ y entonces es integrable. Además $t = c\underline{S}_f$, es decir, $t = c\int_a^b f(x)dx$. □

Proposición 59. *Sean f y g integrables. Entonces, es integrable $f \pm g$ y además $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.*

Demostración. Sabemos que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\mathcal{P}'_\epsilon$ y $\mathcal{P}''_\epsilon$ tales que $\omega(f,\mathcal{P}'_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\omega(g,\mathcal{P}''_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, sea $\mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}'_\epsilon \cup \mathcal{P}''_\epsilon$, más fina, entonces se verifica que $\omega(f,\mathcal{P}_\epsilon) + \omega(g,\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$ (sumando). Ahora bien, puesto que $\sup\limits_{x\in\Delta x_i} f(x) + \sup\limits_{x\in\Delta x_i} g(x) \geq \sup\limits_{x\in\Delta x_i} (f(x) + g(x))$ y al contrario para el ínfimo, entonces se tiene que $\omega(f+g,\mathcal{P}_\epsilon) \leq \omega(f,\mathcal{P}_\epsilon) + \omega(g,\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$, de modo que $f + g$ es integrable.

Para ver que la suma de las integrales es la integral de la suma, veamos que como $\overline{S}_{f+g}$ es ínfimo, entonces $\exists\mathcal{P}'''_\epsilon$ tal que $\overline{S}_{f+g} > \overline{S}(f+g,\mathcal{P}'''_\epsilon) - \frac{\epsilon}{2}$. Además, por la observación que hemos realizado anteriormente, se tiene que en cualquier partición, $\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f+g,\mathcal{P})$. Consideremos ahora los supremos de Riemann de f y g. Sabemos que $\exists\mathcal{P}'_\epsilon$ y $\mathcal{P}''_\epsilon$ tales que $\underline{S}_f - \frac{\epsilon}{4} < \underline{S}(f,\mathcal{P}')$ y $\underline{S}_g - \frac{\epsilon}{4} < \underline{S}(g,\mathcal{P}'')$. Uniendo todas las desigualdades, $\exists\mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}'_\epsilon \cup \mathcal{P}''_\epsilon \cup \mathcal{P}'''_\epsilon$ tal que $\overline{S}_{f+g} > \overline{S}(f+g,\mathcal{P}_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} \geq \underline{S}(f+g,\mathcal{P}_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} \geq \underline{S}(f,\mathcal{P}_\epsilon) + \underline{S}(g,\mathcal{P}_\epsilon) - \frac{\epsilon}{2} > \underline{S}_f - \frac{\epsilon}{4} + \underline{S}_g - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2} = \underline{S}_f + \underline{S}_g - \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, y cada uno de estos supremos/ínfimos de Riemann se corresponden a una integral, sigue que $\int_a^b f(x) + g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. Si repetimos el procedimiento con el ínfimo de Riemann de $f+g$, y los supremos de f y g, llegamos a la desigualdad contraria, de donde sigue que $\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ □

Proposición 60. *Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrable y sea $c \in (a,b)$. Se tiene que f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, y además: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. sabemos que $\exists\mathcal{P}_\epsilon$ tal que $\omega(f,\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$. Ahora, sea $\mathcal{P}'_\epsilon = \mathcal{P}_\epsilon \cup \{c\}$. Al ser más fina, se verifica que $\omega(f,\mathcal{P}'_\epsilon) < \epsilon$. Si ahora solo consideramos los términos de los sumatorios que tienen intervalos en $[a,c]$, como se trata de sumas de términos positivos, sigue que, al tener menos términos, $\omega_{[a,c]}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) < \omega(f,\mathcal{P}'_\epsilon) < \epsilon$, luego es integrable en [a,c]. Igualmente se prueba para [c,b].

Ahora, veamos que si $\epsilon > 0$, $\int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) < \underline{S}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) + \epsilon = \underline{S}_{[a,c]}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) + \underline{S}_{[c,b]}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) + \epsilon = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \epsilon$. Además, $\int_a^b f(x)dx \geq \underline{S}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) > \overline{S}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) - \epsilon = \overline{S}_{[a,c]}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) + \overline{S}_{[c,b]}(f,\mathcal{P}'_\epsilon) - \epsilon = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \epsilon$. Al ser ϵ arbitrario, se verifica entonces la igualdad. □

Proposición 61. *Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrable, con $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces $\int_a^b \geq 0$.*

Así, si $f,g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ son integrables y $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Demostración. Si la función f es mayor o igual que cero, también lo son sus supremos e ínfimos en cada intervalo de cualquier partición, por lo que $\overline{S}_f$ también es mayor o igual que cero. Para la segunda parte basta con considerar $h(x) = g(x) - f(x)$, y aplicar la primera parte junto con el lema 66 para separar las integrales. □

Por mera conveniencia, vamos a definir formalmente una integral en la que escribimos los extremos del intervalo en el orden opuesto. No existe tal cosa como el intervalo $[b,a]$, $a < b$, pero si existiese, podríamos imaginar la función habitual *invertida*, de tal manera que su integral también se invertiría.

Definición 33. Si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es integrable, entonces se denota $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. Así, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Observación 14. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrable, tal que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Entonces, se tiene que $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Esto sigue del lema 68 y de la integral de la función constante.

Las funciones continuas cambian de forma tan buena que pueden ser integradas sin problemas:

Teorema 39. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, es integrable.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Del teorema 26 sigue que f es uniformemente continua, de manera que $\exists \delta_\epsilon$ tal que $|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ $\forall x_1, x_2$ t.q. $|x_1-x_2| < \delta$. Sea $\mathcal{P}_\epsilon$ una partición tal que $\max\limits_j |\Delta x_j| < \delta_\epsilon$. Entonces, se tiene que $\forall j$, $1 \leq j \leq n-1$, como $|x_j - x_{j+1}| \leq \delta_\epsilon$, debe tenerse que $|M_j - m_j| = M_j - m_j < \frac{\epsilon}{b-a}$. Esto quiere decir que $\omega(f, \mathcal{P}_\epsilon) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (M_j - m_j)|\Delta x_j| < \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a}|\Delta x_j| = \frac{\epsilon}{b-a} \sum\limits_{j=0}^{n-1} |\Delta x_j| = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$, de modo que la función es integrable. □

Un interesante resultado es que esa *suma ponderada* o *promedio* que nos da la integral, cuando la calculamos en una función continua, es alcanzado por la propia función en alguno de los puntos (si uno está familiarizado con el teorema de valores intermedios, a estas alturas no debería sorprender este resultado):

Proposición 62. *Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua, entonces $\exists \gamma \in (a, b)$ tal que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\gamma)$.*

Demostración. Como es continua, $\exists \max f(x) = M$ y $\exists \min f(x) = m$. Aplicando el lema 69, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, esto es $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$. Considerando $\hat{f}(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$, se comprueba que en el punto x_1 en el que se alcanza M, se tiene que $\hat{f}(x_1) \geq 0$, y en el punto x_2 en el que se alcanza m, se tiene que $\hat{f}(x_2) \leq 0$ luego por el teorema de valores intermedios, se verifica que $\exists \gamma \in (x_1, x_2)$ que verifica el enunciado. □

Una cosa que no hemos discutido hasta el momento es si hay funciones no integrables.

Observación 15. La función de Dirichlet, $D : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ con $D(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $D(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, no es integrable.

Esto es así puesto que $\overline{S} = 1$ y $\underline{S} = 0$ en cualquier partición, ya que por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ siempre habrá un racional y un irracional en todo intervalo de la partición.

6.2.1. Teorema fundamental del cálculo

Lo que ahora vamos a discutir no lleva el nombre de *teorema fundamental* en vano. Dos cosas aparentemente sin relación, que son la derivada y la integral, se conectan gracias a este teorema, que aparece en dos versiones equivalentes. La primera que veremos permite calcular mágicamente la integral de una función f, sin hacer nada relacionado con particiones, mientras que conozcamos otra función cuya derivada sea f.

Teorema 40 (Fundamental del cálculo)**.** *Sean $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrable y $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ derivable en (a, b), tal que $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Entonces, se tiene que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Demostración. Como paso previo, observemos que si $\mathcal{P}$ es partición de $[a, b]$ y tenemos la colección de puntos $\gamma_j \in \Delta x_j$ $(0 \leq j \leq n-1)$, entonces se verifica que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(\gamma_j)|\Delta x_j| \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$, dado que las imágenes de esos puntos están siempre entre el ínfimo y el supremo de cada intervalo. Por ello, como f es integrable, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mathcal{P}_\epsilon$ tal que $\omega(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$, y por tanto, $|\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n-1} f(\gamma_j)|\Delta x_j|| < \epsilon$. Esto es así puesto que la integral está entre $\overline{S}$ y $\underline{S}$, que se hallan a distancia (ω) menor que ϵ, y según hemos visto antes, la suma también está entre ambas sumas de Riemann, luego la distancia entre la integral y la suma ha de ser aún menor.

Ahora, para la demostración, sea $\epsilon > 0$, y sea $\mathcal{P}_\epsilon = \{x_0 = a, x_1, x_2, ...x_{n-1}, x_n = b\}$ la partición en la que $\omega(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$. Veamos que $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - ... + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$, donde se ha sumado y restado $F(x_j)$, con $1 \leq j \leq n-1$. Ahora, por el teorema del valor medio, tenemos una serie de valores $\gamma_j \in \Delta x_j$ tales que:

$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-...+F(x_2)-F(x_1)+F(x_1)-F(x_0) = F'(\gamma_{n-1})(x_n-x_{n-1})+F'(\gamma_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})+...+F'(\gamma_1)(x_2-x_1)+F'(\gamma_0)(x_1-x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} F'(\gamma_j)|\Delta x_j| = \sum_{j=0}^{n-1} f(\gamma_j)|\Delta x_j|$.

Entonces, por la observación anterior, sigue que $|\int_a^b f(x)dx - [F(b) - F(a)]| < \epsilon$. Como ϵ es un valor arbitrario, sigue que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. □

La segunda forma de este teorema nos indica que toda función f continua tiene una *primitiva*, es decir, otra función cuya derivada es exactamente f. Esta función se obtiene mediante una integral.

Teorema 41 (Fundamental del cálculo, forma 2)**.** *Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrable, y continua en $c \in (a,b)$. Sea $G : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, la cual podemos definir porque esa integral existe para cualquier $x \in [a,b]$ según el lema 67. Entonces, G es continua en $[a,b]$ y derivable en c, y además $G'(c) = f(c)$.*

Como corolario, si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua, entonces $\exists G(x)$ tal que $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Demostración. Vamos a ver que $G(x)$ es continua en cualquier punto de $[a,b]$. Sean $u, w \in [a,b]$, con $w \geq u$ sin perder en generalidad. Tenemos que $G(u) - G(w) = \int_a^u f(t)dt - \int_a^w f(t)dt = \int_w^u f(t)dt$. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t)| \leq M \ \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces, $-M(w-u) \leq \int_w^u f(t)dt \leq M(w-u) \implies |\int_w^u f(t)dt| \leq M(w-u)$ de modo que $|G(w) - G(u)| \leq M|w-u| \ \forall u, w \in [a,b]$, de donde sigue que la función es Lipstchiz-continua de modo que es continua.

Ahora queda ver que es derivable en c. Vamos a hallar $\lim\limits_{h\to 0} \frac{G(c+h)-G(c)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\int_c^{c+h} f(t)dt}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(c_h)$ donde $c < c_h < c+h$, y ahora por compresión sigue que $\lim\limits_{h\to 0} c_h = c$, y por la continuidad de f en c, se tiene que $\lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = f(c)$. □

6.2.2. La función logaritmo

Como aplicación de toda esta teoría, vamos a dar la definición rigurosa del **logaritmo**.

Se va a definir como una función que, entre otras propiedades, sea la primitiva de $\frac{1}{x}$, puesto que no es posible emplear la regla habitual: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ dado que se estaría dividiendo por 0. Se define la función: $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Esta función, definida en $(0, +\infty)$ por el teorema fundamental del cálculo, verifica que $F'(x) = \frac{1}{x}$. Es evidente que la función debe estar definida en ese intervalo puesto que si no la integral se realizaría en un intervalo que contiene al 0, donde la función no está acotada. Otras propiedades de esta función son:

1. $\ln(1) = 0$, puesto que $\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$.
2. $\ln(x) > 0$ si $x > 1$, y $\ln(x) < 0$ si $x < 1$.
3. Como $\frac{1}{x} > 0$ en $(0, +\infty)$, la función es estrictamente creciente.
4. $\ln(zx) = \ln(x) + \ln(z)$. En efecto, si fijamos $z \in (0, \infty)$, se verifica que $\frac{d}{dx}\ln(xz) = \frac{z}{xz} = \frac{1}{x}$, y $\frac{d}{dx}(\ln(x) + \ln(z)) = \frac{1}{x}$. Como las dos son primitivas de la misma función, debe ser que $\ln(zx) = \ln(x) + \ln(z) + C$, y evaluando en $x = 1$ se verifica que $C = 0$.
5. $\ln(\frac{z}{x}) = \ln(z) - \ln(x)$.
6. $\ln(x^r) = r\ln(x)$, si $r \in \mathbb{Q}$.

7. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$. Por ejemplo, para probar la primera, si $x_n = 2^n$, tenemos que $\lim_{n \to \infty} \ln(x_n) = \lim_{n \to \infty} n \ln 2 = +\infty$, de modo que no está acotada y al ser estrictamente creciente sigue el límite.

8. Por el teorema de Bolzano sigue que $Im_{\ln} = \mathbb{R}$, dado que $\forall M \geq 0$, en vista de lo anterior, $\exists L \in \mathbb{R}$ con $L > M$ y $L \in Im_{\ln}$, $-L \in Im_{\ln}$, de manera que al ser un conjunto conexo, $[-M, M] \subseteq [-M, M] \subset Im_{\ln}$.

9. Su función inversa, $h(x) : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$, cumple que $\exists h'(x) = \frac{1}{\ln'(h(x))} = h(x)$, de modo que es ella misma. Se denota esta función por $h(x) = e^x$, ya que cumple que $h(0) = 1$ y que $h(1) = e$, dado que $\ln(e) = \lim_{n \to \infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Cumple que $(e^x)^r = e^{xr}$, $e^x e^y = e^{x+y}$ y $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Con esto, se pueden definir **las funciones exponenciales** reales como $a^x = e^{x \ln a}$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y entenderse en términos de únicamente esto. De las propiedades anteriores y con esa definición es fácil deducir estas propiedades de la exponencial:

1. $D_{a^x} = \mathbb{R}$, $Im_{a^x} = (0, +\infty)$.
2. Es continua y derivable por ser composición de funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$ (e^x y $x \ln(a)$). De la regla de la cadena: $\frac{d}{dx} a^x = \ln a \cdot a^x$.
3. De acuerdo con la derivada, si $a > 1$ la función crece estrictamente. Si $a < 1$ decrece estrictamente.
4. $a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1$.
5. $a^{x+z} = a^x a^z$, $a^{x-z} = \frac{a^x}{a^z}$, $(a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$.
6. Al ser estrictamente monótona es biyectiva sobre su imagen, de modo que tiene inversa, que se denota $\log_a(x)$.

De la nada, hemos establecido qué significa el *logaritmo* y la *exponencial*. El lector quizá conozca otras definiciones de la exponencial, como por ejemplo $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Otra manera de llegar a todo esto es comenzar por esas definiciones y obtener todo lo discutido como proposiciones. Con la manera aquí presentada, se comienza definiendo el logaritmo, y expresiones como la comentada ($e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$) se obtienen como proposiciones.

6.3. Integral indefinida

En virtud del teorema fundamental del cálculo, tiene sentido explorar el concepto de *antiderivada* o *primitiva*, es decir, una función cuya derivada es otra dada (en ocasiones se refiere a esta función como *integral indefinida*, pero no tiene nada que ver conceptualmente con una integral). Si entendemos estas funciones, podremos facilitarnos el cálculo de integrales gracias al teorema fundamental.

Definición 34. Sea $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ una función. Se dice que $F : D_f \mapsto \mathbb{R}$ es una **función primitiva** de f si F es derivable y además $F'(x) = f(x)\ \forall x \in D_f$.

Observemos que toda función $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ continua tiene al menos esta primitiva: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, de acuerdo al teorema fundamental del cálculo.

Definición 35. Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ una función con primitiva $F : D \mapsto \mathbb{R}$. Se conoce como **integral indefinida** de f, y se denota por $\int f(x)dx$, al conjunto de todas las funciones $g : D \mapsto \mathbb{R}$ tales que $g(x) = F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera.

Cabe observar que $\int f(x)dx$ puede no contener todas las primitivas de f. Por ejemplo, $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ sería una posible integral indefinida, dado que $\ln|x|$ es primitiva de $\frac{1}{x}$, pero también lo es $\ln|x| + sign(x)$ que no está en ese conjunto. El lector más avanzado podrá intentar demostrar que si el dominio de definición de f es un intervalo (digamos (a, b)), entonces la definición 35 sí que incluye a todas las primitivas (véase la proposición 53 acerca de derivadas).

Proposición 63. *La integral indefinida satisface estas propiedades:*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.*
2. *$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.*

Esto sigue de las propiedades de las derivadas. (Por ejemplo, si $F(x)$ es primitiva de f, entonces sabemos que $\frac{d}{dx}(\alpha F(x)) = \alpha \frac{d}{dx}(F(x)) = \alpha f(x)$)

6.3.1. Tabla de integrales indefinidas

A continuación se indican integrales indefinidas básicas, que se pueden comprobar todas ellas derivándolas para obtener el integrando.

1. $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$
2.
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
3. $(a \neq 0)$
$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$
4. $(a \neq 0)$
$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$
5. $(a \neq 0)$
$$\int \frac{1}{\cos^2(ax)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax) + C$$
6. $(a > 0)$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C$$
7. $(a \neq 0)$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$
8. $(a \neq 0)$
$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$
9. $(a \neq 0, b > 0)$
$$\int b^{ax}dx = \frac{b^{ax}}{a\ln b} + C$$
10.
$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

6.3.2. Regla de integración por partes y composición de funciones

Son algunas herramientas útiles para el cálculo de primitivas:

Proposición 64.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Esto sigue de que $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, tomando integrales y despejando.

Proposición 65.

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$$

Esto sigue de que $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

6.3.3. Sustitución en integrales indefinidas y cambio de variable en la integral

Observemos primero que, por la regla de la cadena, si tenemos: $\int f(g(x))g'(x)dx$, el resultado se obtiene con una primitiva de f, que denotaremos F, evaluada en $g(x)$. Es decir, $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$. Esta primitiva puede obtenerse a partir de una de las funciones de $\int f(y)dy$. Por lo tanto:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

(donde $y = g(x)$)

Este resultado es aplicable a integrales Riemann:

Teorema 42. *Sean $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ y $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones tales que $I_g \subseteq D_f$, f es continua en $[g(a), g(b)]$ y $g \in C^1[a, b]$.*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Demostración. Sea F una primitiva de f. Entonces, una primitiva de $f(g(x))g'(x)$ es $F(g(x))$, a causa de la regla de la cadena. Por el teorema fundamental del cálculo, sigue que $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$. □

Aunque este resultado se haya demostrado recurriendo al teorema fundamental, puede hacerse de forma elemental sin acudir a él, y de hecho cobrará importancia en el estudio de funciones multivariable o sobre dominios arbitrarios.

6.4. Integrales impropias

Para definir en cierto sentido una integral cuando la función no es Riemann integrable (por ejemplo, si no está acotada o si se considera una semirrecta en vez de un intervalo), se definen las integrales impropias:

Definición 36. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función no acotada, pero integrable Riemann en $[c, b]$ $\forall c > a$. Entonces, si $\exists \lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx = L$, se dice que existe la integral impropia $\int_a^b f(x)dx = L$.

Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función no acotada, pero integrable Riemann en $[a, c]$ $\forall c < b$. Entonces, si $\exists \lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx = L$, se dice que existe la integral impropia $\int_a^b f(x)dx = L$.

Y también:

Definición 37. Sea $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en $[a, c]$, $\forall c > a$. Entonces, si $\exists \lim\limits_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx = L$, se dice que existe la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx = L$.

Análogamente se define para $-\infty$. Si alguna de estas integrales impropias vale $\pm\infty$, se dice que la integral diverge. Si $L \in \mathbb{R}$, converge.

Proposición 66. *Sean f, g dos funciones tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x > a$. Entonces, si $\exists \int_a^{+\infty} g(x)dx$, también $\exists \int_a^{+\infty} f(x)dx$.*

Demostración. Como ambas son positivas, las funciones $\varphi(c) = \int_a^c f(x)dx$ y $\psi(c) = \int_a^c g(x)dx$, definidas en $[a, +\infty)$, son crecientes. Además, se tiene que $\varphi(c) \leq \psi(c)$ $\forall c \in [a, +\infty)$. Como $\exists \lim\limits_{c \to +\infty} \psi(c)$, debe ser acotada, luego $\varphi(c)$ es acotada, y además es creciente, luego $\exists \lim\limits_{c \to +\infty} \varphi(c)$. □

6.4.1. Criterio de la integral

La convergencia de las integrales impropias está relacionada con la de las series:

Teorema 43 (Criterio de la integral)**.** *Sea $f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función con $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1, +\infty)$ y decreciente.*

Entonces, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

Demostración. Para $\Longleftarrow$, supongamos que converge la integral. Además, como la función decrece, observemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se tiene que $f(n) \leq \int_{n-1}^{n}$, al ser $f(n)$ mínimo en $[n-1, n]$, luego $\sum\limits_{n=2}^{m} f(n) \leq \int_1^m f(x)dx$. Asimismo, como f es de términos positivos, sigue que $\int_1^m f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx$. Si S_m es la suma parcial hasta m de $f(n)$, entonces, $S_m \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$, según se ha visto anteriormente, es decir, S_m está acotada. Además, al ser f de términos positivos, S_m es creciente, por tanto existe su límite y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

Para $\Longrightarrow$, supongamos que converge la serie. Sea $\phi(t) = \int_1^t f(x)dx$. Veamos que al ser f de términos positivos, es una función creciente, luego si está acotada $\phi(n)$, estará acotada $\phi(x)$ $\forall x \in [1, +\infty)$, dado que siempre hay un natural mayor que cualquier real. Así, basta ver que está acotada la sucesión $\phi(n)$. Veamos que $\phi(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) \leq M$ para algún $M \in \mathbb{R}$, común a cualquier $n \in \mathbb{N}$, dado que todas las sumas parciales están acotadas al converger la serie. Así, está acotada $\phi(n)$ y es creciente, luego existe su límite y converge la integral. □