Geometría y topología

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com

Mayo de 2022

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}((\varphi_t^X)^*(Y)) = (\varphi_{t_0}^X)^*([X,Y])$$

Revisado en 2022

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Geometría y topología del grado en matemáticas, tomados en Mayo de 2022 por Miguel González. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Geometría y topología

Esta asignatura se centra en el estudio de variedades diferenciables a lo largo de tres bloques: un primer bloque de definiciones y resultados básicos en variedades que culmina en un caso del teorema del *embedding* de Whitney, un segundo bloque de campos vectoriales y el corchete de Lie, y un tercer bloque de introducción a los grupos y álgebras de Lie.

Requisitos previos

1. Conocimientos de análisis.
2. Conocimientos básicos de geometría diferencial.
3. Conocimientos de álgebra (grupos, espacios vectoriales).

Índice

1. Variedades diferenciables

1.1. Definición y ejemplos

En lo que sigue supondremos que M es un espacio topológico Hausdorff y 2AN. Esto quiere decir que, por un lado, cada par de puntos $p_1, p_2 \in M$, $p_1 \neq p_2$, admite dos abiertos disjuntos V_1, V_2, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ con $p_i \in V_i$; y, por otro lado, existe una base numerable del espacio.

Observación 1. Para motivar por qué se requieren estas condiciones, consideremos $\mathbb{R}_d$ el espacio de los reales con la topología discreta, y $\mathbb{R}$ con la topología usual. El espacio $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ parece, como conjunto, de dimensión 2, pero sus abiertos básicos son segmentos verticales que aparentan dimensión 1. Este tipo de cosas pueden evitarse pidiendo que el espacio sea 2AN.

Por otro lado, un ejemplo de espacio "no trivial"que no es Hausdorff es la recta con dos orígenes: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \sqcup \{p_1, p_2\}$, con la base de abiertos de la forma $p_j \sqcup ((-r, r) \setminus \{0\})$ en torno a los *orígenes* p_j, junto a los abiertos $(x - r, x + r)$ con $r < |x|$ y $x \neq 0$ en torno al resto de puntos.

Definición 1. Se dice que M es una **variedad topológica** de dimensión $n \geq 0$ si $\forall p \in M$, $\exists U$ abierto con $p \in U$ y $\exists \varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo.

Definición 2. Los pares (U, φ) de la definición anterior se denominan **cartas**. Dadas dos cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), se define el **cambio de cartas** como $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \mapsto \varphi_1(U_1 \cap U_2)$.

Definición 3. Un **atlas** $\mathcal{C}^0$ en M es una colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ tal que $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.

Definición 4. Un **atlas diferenciable** en M es un atlas $\mathcal{A}$ tal que cada par de cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) verifica que el cambio de cartas $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ es una función $\mathcal{C}^\infty$.

Cuando una variedad topológica tiene un atlas diferenciable, es posible definir funciones diferenciables en la variedad.

Definición 5. Si M es una variedad topológica y $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable, se dice que la función $f : M \mapsto \mathbb{R}$ es **diferenciable** o $\mathcal{C}^\infty$ con respecto a $\mathcal{A}$ si todo punto $p \in M$ admite una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $p \in U$ tal que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \mapsto \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

El conjunto de tales funciones se denota $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{A}}(M)$.

Nótese que aunque la definición solo pida una carta (U, φ) válida por punto, en caso de existir, cualquier otra carta (U', φ') es válida dado que $f \circ \varphi'^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi'^{-1}$ que es composición de dos funciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

A priori, podría definirse una variedad diferenciable como un par $(M, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable. No obstante, es posible que existan varios atlas *compatibles*, es decir, que definen las mismas funciones diferenciables. Por ello, conviene refinar la definición de variedad para evitar esto.

Definición 6. Sea M una variedad topológica. Existe una relación de equivalencia en los atlas diferenciales sobre M, dada por $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \iff \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{A}}(M) = \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{A}'}(M)$.

Definición 7. Una **variedad diferenciable** es un par $(M, [\mathcal{A}])$, donde M es una variedad topológica y $[\mathcal{A}]$ es una clase de equivalencia de atlas diferenciables según la relación de la definición previa.

Cabe observar que si se tiene un atlas $\mathcal{A}$ sobre la variedad topológica M, automáticamente se tiene la variedad diferenciable $(M, [\mathcal{A}])$ y, al ser todos los elementos de $[\mathcal{A}]$ compatibles, da igual qué carta se tome de entre todas las existentes en todos los atlas de $[\mathcal{A}]$ a la hora de trabajar en la variedad. De hecho, algunos autores definen la variedad como el par $(M, \mathcal{A})$ donde $\mathcal{A}$ es un *atlas maximal* que surge de unir todos los atlas equivalentes a uno dado.

Observación 2 (Ejemplos). Cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n mediante la carta identidad. En particular, $GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ es una variedad de dimensión n^2.

La esfera n-dimensional, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, con la topología de subespacio, es una variedad diferenciable n-dimensional gracias a las dos cartas estereográficas $\{(U_N,\varphi_N),(U_S,\varphi_S)\}$, donde $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ y $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\}$, y $\varphi_N(x_0,\dots,x_n) = \frac{1}{1-x_n}(x_0,\dots,x_{n-1})$, $\varphi_S(x_0,\dots,x_n) = \frac{1}{1+x_n}(x_0,\dots,x_{n-1})$ son los homeomorfismos sobre $\mathbb{R}^n$. Puede calcularse que el cambio de cartas es $\varphi_{NS} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ que cumple $y \mapsto \frac{y}{|y|^2}$, y por tanto es un difeomorfismo en su dominio $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

La noción de equivalencia entre variedades es la siguiente:

Definición 8. Dadas M_1 y M_2 variedades diferenciables, se dice que son **difeomorfas** si existe un homeomorfismo $f : M_1 \mapsto M_2$ tal que para todo par de cartas (U_j,φ_j), cada una en M_j, se tiene que $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \mapsto \varphi_2(U_2)$ es $\mathcal{C}^\infty$ y $\varphi_1 \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}$, su inversa, también es $\mathcal{C}^\infty$.

La **topología diferencial** es la rama de las matemáticas que busca dar respuesta al problema de clasificación de todas las estructuras diferenciables (por ejemplo, buscando invariantes). Por ejemplo, en dimensión $n \leq 3$ dos variedades homeomorfas son automáticamente difeomorfas, pero se ha demostrado (Donaldson) que $M = \mathbb{R}^4$ admite una cantidad no numerable de estructuras diferenciables no difeomorfas.

Definición 9. Dadas M_1 y M_2 variedades diferenciables, se dice que $f : M_1 \mapsto M_2$ es una **aplicación diferenciable** si es continua y para todo par de cartas (U_j,φ_j), cada una en M_j, se tiene que $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \mapsto \varphi_2(U_2)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Es importante que sea continua para garantizar que $f^{-1}(U_2)$, y por tanto el dominio $\varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$, sea abierto.

Definición 10. Si M_1, M_2 son variedades diferenciables de dimensiones n y m, se define la **variedad producto**, de dimensión $n+m$, $M_1 \times M_2$ sobre el espacio producto mediante el atlas formado por las cartas $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$, donde (U_j,φ_j) son cartas en M_j, y $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \mapsto \mathbb{R}^{n+m}$ dadas por $(\varphi_1 \times \varphi_2)(p,q) = (\varphi_1(p), \varphi_2(q))$.

Por ejemplo, el toro $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Definición 11. Dada M una variedad de dimensión m, se dice que $N \subset M$ es una **subvariedad de dimensión** n si $\forall p \in N$, se tiene (U,φ) una carta en M con $p \in U$ tal que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n})$.

Por tanto, las subvariedades tienen estructura de variedad mediante la topología de subespacio y las cartas $(U \cap N, \varphi|_{U\cap N})$, dado que $\varphi|_{U\cap N}$ va realmente sobre $\mathbb{R}^n$ al ser las últimas $m-n$ componentes nulas. Con esta estructura, además, se comprueba de inmediato que la aplicación $i : N \mapsto M$ de inclusión es diferenciable.

Proposición 1. *Sean $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable y $N \subset M$ una subvariedad. Consideramos en N la estructura de variedad inducida por M. Entonces, $f|_N : N \mapsto Q$ también es una aplicación diferenciable.*

Demostración. De la identidad $f|_N = f \circ i$, donde $i : N \mapsto M$, sigue que $f|_N$ es composición de aplicaciones diferenciables. □

Definición 12. Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Se define el **rango de** f **en** $p \in M$, $rg_p(f)$, como el rango de la aplicación lineal $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}$, donde (U,φ) y (V,ψ) son cartas respectivas tales que $p \in U$ y $f(p) \in V$.

Está bien definido porque si se toman otras cartas, (U', φ') y (V', ψ'), se tiene que $d(\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}) = d(\psi' \circ \psi^{-1}) \cdot d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \cdot d(\varphi \circ \varphi^{-1})$, donde las diferenciales de los cambios de carta son invertibles, y por tanto ambos rangos coinciden.

Definición 13. Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Se dice que $p \in M$ es un **punto crítico** si $rg_p(f) < \text{mín}(\dim M, \dim Q)$, es decir, si el rango en el punto no es máximo.

Definición 14. Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Se dice que $p \in M$ es un punto **regular** si $rg_p f = \dim Q$. Se dice que $y \in Q$ es un **valor regular** si $f^{-1}(y)$ consta únicamente de puntos regulares.

Definición 15. Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Se dice que f es una **submersión** si es sobreyectiva y todos los puntos de M son regulares.

Proposición 2. *Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Si $y \in Q$ es un valor regular, entonces $f^{-1}(y) \subset M$ es una subvariedad.*

Esto es consecuencia del teorema de la función implícita aplicado localmente en una carta en cada punto de la preimagen.

Observación 3 (Ejemplo). Consideramos la aplicación $f : GL(n, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, donde ambas variedades vienen dadas por la carta identidad como abiertos de $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente, dada por $f(A) = \det A$. El objetivo es ver que 1 es un valor regular y por tanto $SL(n, \mathbb{R}) := f^{-1}(1)$ es una subvariedad de $GL(n, \mathbb{R})$ de dimensión $n^2 - 1$. Para ello, recordemos que $df_A(H) = tr(H \cdot Adj(A)^t)$. Ahora, si A es un punto tal que $f(A) = 1$, es decir, tal que $\det A = 1$, se tiene que $A^{-1} = Adj(A)^t$, y por tanto $df_A(H) = tr(H \cdot A^{-1})$. En particular, $df_A(A) = 1 \neq 0$, luego tiene rango máximo (1), como se quería.

Observación 4 (Ejemplo 2. Fibración de Hopf). En lo que sigue, identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ y no consideraremos en ningún momento estructuras complejas. Consideramos la variedad $\mathbb{C}P^1 = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0,0\}}{\mathbb{C}^*}$ (aquí $\mathbb{C}^*$ actúa de la manera natural multiplicando ambas coordenadas) de las rectas complejas (planos reales) que pasan por el origen en $\mathbb{C}^2$. Tiene una estructura natural de espacio topológico dado que $\mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^4$, así que se tiene la topología cociente. En esta variedad (que es difeomorfa a $\mathbb{S}^2$), se tiene el atlas $\{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$, donde las cartas van sobre $\mathbb{C}$ (por tanto, es de dimensión real 2), $U_j = \{[(z_0, z_1)] : z_j \neq 0\}$, $\varphi_0([(z_0, z_1)]) = z_1/z_0$ y $\varphi_1([(z_0, z_1)]) = z_0/z_1$. El cambio de cartas es $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(w) = 1/w = \bar{w}/|w|^2$ que es $\mathbb{C}^\infty$ como función de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$. También, identificamos los puntos de $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ con pares $(z_0, z_1) \subset \mathbb{C}^2$ con $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$.

La fibración de Hopf es la aplicación diferenciable $f : \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{C}P^1$ dada por $f((z_0, z_1)) = [(z_0, z_1)]$. Para comprobar que efectivamente es diferenciable, tomaremos las cartas (U_0, φ_0) de $\mathbb{C}P^1$ y la proyección estereográfica desde el polo norte, (U, ψ) en $\mathbb{S}^3$. Para el resto de combinaciones de cartas es análogo. Ahora hay que calcular si $\varphi_0 \circ f \circ \psi^{-1}$ es suave. Un posible truco para ahorrar cálculos es hacer uso del hecho de que $\mathbb{S}^3$ esté inmersa en $\mathbb{R}^4$ como subvariedad. Para ello, observamos que $\psi^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ (con imagen contenida en $\mathbb{S}^3$) y, además, $\varphi_0 \circ f$ es la restricción a $\mathbb{S}^3$ de $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_0, y_0, x_1, y_1) = (\frac{x_1 x_0 + y_1 y_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0^2 + y_0^2})$, que no es más que la expresión en complejos $(z_0, z_1) \mapsto z_1/z_0$ traducida a coordenadas reales. En resumen, $\varphi_0 \circ f \circ \psi^{-1} = g \circ \psi^{-1}$, donde ambas funciones son meramente funciones entre espacios del tipo $\mathbb{R}^N$. Es sencillo ahora calcular que estas aplicaciones son $\mathbb{C}^\infty$ en los dominios pertinentes.

Asimismo, multiplicando las jacobianas en los puntos adecuados de ambas funciones, se obtiene la jacobiana completa y puede comprobarse que siempre tiene rango máximo 2, de modo que f es una submersión. Cada una de las subvariedades *fibra*, $f^{-1}([(z_0, z_1)])$, tiene dimensión $3 - 2 = 1$. Además, cada fibra es compacta (porque todos los espacios son Hausdorff, luego la preimagen de compactos es compacta). Estas fibras son copias de $\mathbb{S}^1$, por ello, la fibración suele escribirse como $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^2$.

Definición 16. Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Se dice que f es una **inmersión** si $rg_p(f) = \dim M \ \forall p \in M$.

Definición 17. Sea $f : M \mapsto Q$ una aplicación diferenciable. Se dice que f es un **embedding** si $N = f(M)$ es una subvariedad de Q y, con la estructura inducida, se cumple que $f : M \mapsto N$ es un difeomorfismo.

Un ejemplo trivial de embedding es, dada una subvariedad $N \subset M$, la aplicación de inclusión $i : N \hookrightarrow M$.

La noción de embedding (ser difeomorfo a una subvariedad) es más fuerte que otras nociones razonables de *estar dentro* de una variedad. Por ejemplo, es más fuerte que tener una aplicación inyectiva e inmersión:

Proposición 3. *Sea $f : M \mapsto Q$ un embedding. Entonces, es una inmersión inyectiva.*

Demostración. Evidentemente, f es inyectiva porque $f : M \mapsto f(M)$ es un difeomorfismo. Para ver que es una inmersión, sean $p \in M$, (U, φ) una carta de M con $p \in U$, (V, ψ) una carta de Q con $f(p) \in V$ que verifique la condición necesaria para que $f(M)$ sea subvariedad, y $(V \cap f(M), \tilde{\psi})$ la carta inducida en $f(M)$. Entonces:

$$D = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_p = \begin{pmatrix} d(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1})|_p \\ A \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz $(\dim M - \dim f(M)) \times \dim M$, y $d(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1})|_p$ es invertible de orden $\dim M$ por ser f un difeomorfismo. En particular, $rg(D) = \dim M$, como se quería. □

Para mostrar que el recíproco no es cierto en general, se tiene el ejemplo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dado por $f(t) = (e^{it}, e^{it\sqrt{2}})$. Puede comprobarse que es una inmersión, pero su imagen es densa en el toro, de tal manera que no es una subvariedad (porque, en la definición de subvariedad, se requiere que exista una carta que identifique localmente la subvariedad con $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}$, que no es denso el abierto coordenado).

Es posible, sin embargo, obtener condiciones suficientes para que una aplicación inmersión sea un embedding:

Proposición 4. *Sea $f : M \mapsto Q$ una inmersión. Consideramos $f(M)$ con la topología relativa (como subespacio de Q). Si $f : M \mapsto f(M)$ es un homeomorfismo, entonces f es un embedding.*

Demostración. Denotamos $m = \dim M$, $q = \dim Q$. En primer lugar, veremos que $f(M)$ es una subvariedad de Q. Sean $p \in M$, (U, φ) una carta de M con $p \in U$, (V, ψ) una carta en Q con $f(p) \in V$. Asumimos que $\varphi(p) = 0$ y $\psi(f(p)) = 0$ componiendo con una traslación si es necesario. El objetivo es obtener una carta de Q que satisfaga la condición de subvariedad en p. Sea $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_q(x_1, \dots, x_m))$. Como f es una inmersión, la diferencial de g es inyectiva (tiene rango m) y, por tanto, sin perder en generalidad (reordenando las coordenadas, lo cual da una nueva carta compatible) se tiene que el bloque superior de la diferencial, $(\frac{\partial g_i(\varphi(p))}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq m}$, es invertible. Definimos la función correspondiente a este bloque: $u : W \mapsto \mathbb{R}^m$, dada por $u(g_1(x), \dots, g_n(x))$, donde $W = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$ es el dominio de g.

Como u tiene la diferencial invertible en 0, es un difeomorfismo local si se restringe a cierto abierto $W' \subset W$. Esto permite obtener la siguiente función:

$$\tilde{g} = g \circ u^{-1}(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_m, g_{m+1}(u^{-1}(t_1, \dots, t_m)), \dots, g_q(u^{-1}(t_1, \dots, t_m))).$$

Ahora, en un entorno adecuado V' del cero, que precisaremos más adelante, se define la función F siguiente:

$$F(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1} - \tilde{g}_{m+1}(y_1, \dots, y_q), y_q - \tilde{g}_q(y_1, \dots, y_q)),$$

que da lugar a la carta $\tilde{\psi} = F \circ \psi$ definida en $\tilde{V} = \psi^{-1}(V)$. El entorno V' debe tomarse, en primer lugar, para que la F esté bien definida (es decir, contenido en el dominio de $\tilde{g}$ que es $u(\tilde{W})$), y además para que F sea un difeomorfismo, lo cual es posible porque:

$$dF|_0 = \begin{pmatrix} Id_m & -D\tilde{g} \\ 0 & Id_{q-m} \end{pmatrix},$$

que es invertible.

De esta manera, como F es un difeomorfismo y ψ era una carta, $\tilde{\psi}$ también lo es. Además, $F(y_1,\dots,y_q) \in \tilde{\psi}(\tilde{V} \cap f(M)) \iff (y_1,\dots,y_q) \in \psi(V \cap f(M)) \iff (y_1,\dots,y_q) = \tilde{g}(u_1,\dots,u_m) \iff F(y_1,\dots,y_q) = F(\tilde{g}(u_1,\dots,u_m)) = (y_1,\dots,y_m,0,\dots,0)$, luego $\tilde{\psi}(\tilde{V} \cap f(M)) = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{m-q})$, así que $f(M)$ es subvariedad.

Para ver que f es difeomorfismo sobre su imagen con respecto a la estructura inducida, consideramos en $f(M)$ la carta $F \circ \psi$ proyectada sobre las primeras m componentes (esta proyección la denotamos π), y entonces la expresión local de f resulta ser $\pi \circ F \circ g(x_1,\dots,x_n) = (g_1(x),\dots,g_m(x)) = u(x)$, que es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$. □

Proposición 5. *Sea $f : M \mapsto Q$ una inmersión inyectiva. Si, además, M es compacto, entonces f es un embedding.*

Demostración. Por el resultado previo basta con ver que f es un homeomorfismo, es decir, que $f^{-1} : f(M) \to M$ es continua. Esto equivale a ver que f es cerrada (o abierta). Sea $C \subset M$ un cerrado. Como M es compacta, sigue que C es compacto, de modo que $f(C) \subset Q$ es compacto, pero como Q es Hausdorff, sigue que $f(C)$ es cerrado. □

El principal resultado de esta sección es el siguiente:

Teorema 1 (Whitney)**.** *Sea M una variedad diferenciable y $N = 2{\cdot}\dim M$. Entonces, existe un embedding $f : M \mapsto \mathbb{R}^N$.*

Además, no se puede mejorar el valor de N si se quiere un resultado con la misma generalidad, puesto que, por ejemplo, un embedding $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{R}$ no puede existir. Esto es porque como $\mathbb{S}^1$ es compacto, f alcanza su máximo en cierto $p \in \mathbb{S}^1$, de tal manera que, para una carta (U,φ) en torno a p, se tiene que $f \circ \varphi^{-1}$ alcanza un máximo en $\varphi(p)$ y tiene diferencial nula ahí (luego no es inmersión).

Para demostrar una versión más débil del resultado necesitaremos la herramienta siguente:

Proposición 6. *Dado $r > 0$, $\exists \sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ de modo tal que $\sigma_r(x) = 1$ si $|x| \leq r$, $\sigma(x) \in (0,1)$ si $r < |x| < 2r$, y $\sigma_r(x) = 0$ si $|x| \geq r$. Tales funciones se denominan **bump functions**.*

Demostración. Comenzamos con $n = 1$. Se toma $\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{\frac{-1}{x^2}} & x \geq 0 \end{cases}$. Ahora, se define $\Phi_r(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda(t)+\lambda(r-t)}$. La función buscada es $\psi_r(t) = 1 - \phi_r(|t| - r)$. Puede verificarse que es $\mathcal{C}^\infty$ y que cumple las propiedades pedidas. Ahora, para n arbitrario basta con definir $\sigma_r(x) = \psi_r(\|x\|)$ □

Ahora, demostraremos la siguiente versión del Teorema de Whitney:

Proposición 7. *Sea M una variedad diferenciable compacta. Entonces, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que hay un embedding $f : M \to \mathbb{R}^n$.*

Demostración. En cada punto $p \in M$ escogemos una carta (U_p, ϕ_p) con $\phi_p : U_p \to \mathbb{R}^m$ y $p \mapsto 0$. Sea $r_p > 0$ tal que $B(0, 3r_p) \subset \phi_p(U_p)$. Definimos $V_p = \phi_p^{-1}(B(0,r_p))$, lo que da lugar a nuevas cartas $(V_p, \phi_p|_{V_p})$. Asimismo, definimos las siguientes funciones diferenciables: en primer lugar, $f_p : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_p(x) = \begin{cases} \sigma_{r_p}(\phi_p(x)) & x \in U_p \\ 0 & x \notin U_p \end{cases},$$

y en segundo lugar $g_p : M \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$g_p(x) = \begin{cases} \sigma_{r_p}(\phi_p(x))\phi_p(x) & x \in U_p \\ 0 & x \notin U_p \end{cases}.$$

Ambas son $\mathcal{C}^\infty$. Por ejemplo, en U_p la expresión local $f_p \circ \phi_p^{-1}(t) = \sigma_{r_p}(t)$ es $\mathcal{C}^\infty$, y fuera de U_p la expresión local es idénticamente nula.

Ahora, por compacidad es posible escribir $M = \bigcup_{j=1}^K V_{p_j}$ para ciertos $\{p_j\}_j \subset M$. Definimos la función

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R}^{k+mk} \\ p &\longmapsto (f_{p_1}(p), \ldots, f_{p_k}(p), g_{p_1}(p), \ldots, g_{p_k}(p)). \end{aligned}$$

Basta ver ahora que es inyectiva e inmersión por compacidad de M. El hecho de que sea una inmersión es muy sencillo: dado $p \in M$, escogemos el p_i tal que $p \in V_{p_i}$. En V_{p_i} la función g_{p_i} coincide con ϕ_{p_i}, de modo que tiene rango máximo (m) en p y, por ende, f también. Para ver la inyectividad, dados $x, y \in M$, $x \neq y$, distinguimos dos casos: si hay un p_i tal que $x, y \in \overline{V}_{p_i}$, entonces $g_{p_i}(x) = \phi_{p_i}(x) \neq \phi_{p_i}(y) = g_{p_i}(y)$, luego $f(x) \neq f(y)$. En caso contrario, sea p_i tal que $x \in V_{p_i}$. Por hipótesis, sigue que $y \notin \overline{V}_{p_i}$, de tal modo que $f_{p_i}(x) = 1 > f_{p_i}(y)$, luego $f(x) \neq f(y)$. $\square$

2. Campos diferenciables

A la hora de definir lo que es un *vector tangente* a una variedad, existen dos perspectivas equivalentes. Comenzamos con la primera, que consiste en interpretar cada vector tangente como una clase de equivalencia de curvas que pasan *en la misma dirección*:

Definición 18. Sea M una variedad, $p \in M$ y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una aplicación diferenciable donde $I \subset \mathbb{R}$ es un abierto con $0 \in I$. Se dice que γ *pasa por* p si $\gamma(0) = p$. Se define en las curvas que pasan por p la relación $\gamma \sim \beta$ si existe una carta (U, φ) con $p \in U$ tal que $(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$.

Obsérvese que en la relación de equivalencia puede sustituirse el *existe una carta* por *para toda carta*, dado que si $\gamma \sim \beta$ con la definición dada, en cualquier otra carta (V, ψ) con $p \in V$ se tiene que $(\psi \circ \gamma)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot (\varphi \circ \beta)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0)$.

Definición 19. Se define el **espacio tangente** a M en p, y se denota T_pM, como el conjunto de clases de equivalencia de curvas que pasan por p.

Observación 5. El espacio tangente T_pM admite una estructura de espacio vectorial como sigue: se toma (U, φ) una carta con $p \in U$, y se define la aplicación $d\varphi_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$, donde $n = \dim M$, dada por $d\varphi_p([\gamma]) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$. Esta aplicación está bien definida y es inyectiva por definición de T_pM, y además es sobreyectiva porque, dado $v \in \mathbb{R}^n$, puede considerarse la curva $t \mapsto \varphi(p) + tv$ en un entorno de p y levantarse a M por medio de φ^{-1}, lo que da lugar a una curva γ con $(\varphi \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi(p) + tv) = v$.

Una vez establecida esta biyección, la estructura de espacio vectorial en T_pM viene dada de manera natural por la de $\mathbb{R}^n$. (Es decir, por ejemplo, $v + w := d\varphi_p^{-1}(d\varphi_p(v) + d\varphi_p(w))$).

Puede comprobarse que esta definición no depende de la carta escogida (dado que tomar otra carta equivale a componer con una aplicación lineal la función $d\varphi_p$).

Definición 20. Sea (U, φ) una carta en $p \in M$. Entonces, podemos denotar $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$, donde $x_j : M \to \mathbb{R}$ son coordenadas diferenciables. Denotamos en ese caso $\frac{\partial}{\partial x_j}|_p \in T_pM$ al elemento $d\varphi^{-1}((0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0))$, con el 1 en la posición j-ésima. Así, por ejemplo, si γ es una curva que pasa por p y localmente es $(\varphi \circ \gamma)(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, entonces resulta que $[\gamma] = d\varphi_p^{-1}(d\varphi_p([\gamma])) = d\varphi_p^{-1}(\gamma_1'(0), \ldots, \gamma_n'(0)) = \sum_{j=1}^n \gamma'(0) \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$, por linealidad.

Observación 6. En el contexto de la definición anterior, si se toma otra carta (V, ψ) en $p \in M$, con coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$, entonces resulta que $[\gamma] = \sum_{j=1}^n \tilde{y}'(0) \frac{\partial}{\partial y_j}|_p = d\psi^{-1}|_p(d\psi_p([\gamma])) = d\psi_p^{-1}(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0)) = d\psi_p^{-1}(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot (\tilde{x}_1'(0), \ldots, \tilde{x}_n'(0))^t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \tilde{x}_i'(0) \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$, donde $y(x)$ representa el cambio de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$. De este modo, sigue que:

$$\tilde{y}_j'(0) = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i'(0) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}.$$

En particular, tomando una curva con $\tilde{x}_i'(0) = 1$ y $\tilde{x}_j'(0) = 0$ para $j \neq i$, es decir, tomando $d\varphi_p^{-1}(e_i)$, entonces sigue que $\tilde{y}_j'(0) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}$, y por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y_j}|_p.$$

A continuación vemos el espacio tangente desde el punto de vista de las derivaciones.

Definición 21. Sea $p \in M$. Una **derivación de $\mathcal{C}^\infty(M)$** en p es una función lineal

$$X_p : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

que además verifica $X_p(f_1 \cdot f_2) = f_1(p)X_p(f_2) + f_2(p)X_p(f_1)$ para cualesquiera $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

El espacio de todas las derivaciones en p se denota $\mathrm{Der}_p(M)$ y tiene estructura de espacio vectorial definiendo $(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$ y $(\lambda X_p)(f) = \lambda(X_p(f))$.

Proposición 8. *La aplicación $T : T_pM \to \mathrm{Der}_p(M)$ dada por $T([\gamma])(f) = (f \circ \gamma)'(0)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Observación 7 (El espacio tangente en subvariedades de $\mathbb{R}^{n+1}$). Vamos a ver un ejemplo concreto para una subvariedad de dimensión n en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$, en el que el espacio tangente puede verse como un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideramos $F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ con 0 un valor regular. Estudiaremos la subvariedad $S = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión n. Dado $p \in S$, como $rg_p(F) = n$, puede aplicarse el teorema de la función implícita para obtener abiertos $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ y una función $\mathcal{C}^\infty$ $h : V \to \mathbb{R}$ de modo tal que $S \cap W = gr(h) = \{(h(x), x) : x \in V \subset \mathbb{R}^n\}$. De esta manera, $\phi : S \cap W \to \mathbb{R}^n$ dada por $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ es una carta cuya inversa es $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (h(t_1, \ldots, t_n), t_1, \ldots, t_n)$. Asumimos también, sin perder generalidad (componiendo con una traslación), que $\phi(p) = 0$.

Entonces, dada una curva que pasa por p, $\gamma : I \to S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, podemos expresarla localmente como $\gamma(t) = (h(x_1(t), \ldots, x_n(t)), x_1(t), \ldots, x_n(t))$. En este caso, la clase de equivalencia de γ en T_pS puede verse directamente como un vector: $\gamma'(0) = (\sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j}|_0 x_j'(0), x_1'(0), \ldots, x_n'(0))$. Este vector está contenido en el n-hiperplano $\left\langle (\frac{\partial h}{\partial x_j}|_0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \right\rangle_{j=1}^n = \left\langle (1, -\frac{\partial h}{\partial x_1}|_0, \ldots, -\frac{\partial h}{\partial x_n}|_0) \right\rangle^\perp$. Esto puede verse también considerando la aplicación inyectiva $\bar{F} : T_pS \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $[\gamma] \mapsto \gamma'(0)$, que precisamente envía el $\frac{\partial}{\partial x_j}|_p$ en el generador correspondiente del hiperplano visto arriba, de modo que es un isomorfismo sobre ese hiperplano. Una última forma de ver el espacio tangente en este paso, sin usar la parametrización h, es viendo que $F(\gamma) \equiv 0$, de modo que $T_pS \simeq \bar{F}(T_pS) = \ker(dF_p)$.

Definición 22. Sea $f : M \to N$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ entre variedades diferenciables. Sea $p \in M$. Se define la **diferencial de f en** p como la aplicación $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ dada por $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.

Observación 8. La diferencial está bien definida, observando que si (V, ψ) es una carta en $f(p)$ y (U, ϕ) lo es en p, entonces $(\psi \circ f \circ \gamma)'(0) = d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \circ (\phi \circ \gamma)'(0)$.

Asimismo, si $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$, dado $v \in \mathbb{R}^m$ podemos calcular $df_p(v)$ de manera sencilla: consideramos la curva $\gamma(t) = p + tv$, y entonces $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(tv+p) - f(p)}{t}$.

Proposición 9. *Se tiene que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es lineal.*

Demostración. Recordemos que la estructura de espacio vectorial venía dada a través de las cartas, de modo que tomamos (U, ϕ) y (V, ψ) cartas centradas en p y $f(p)$ respectivamente. Ahora consideramos la *expresión local* de la diferencial a través de los isomorfismos $d\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ y $d\psi_{f(p)} : T_{f(p)}N \to \mathbb{R}^n$, es decir, $\varphi := d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ (d\phi_p)^{-1}$. Observemos que, a causa de los isomorfismos, φ es lineal $\iff$ df_p es lineal, así que basta con ver que φ es lineal. Ahora, dado $v \in \mathbb{R}^m$, tenemos que $\varphi(v) = \varphi((d\phi_p)(\varphi^{-1}(\phi(p) + tv))) = d\psi_{f(p)}([f \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv)]) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv))'(0) = d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}(v)$. En otras palabras, $\varphi \equiv d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}$, luego es lineal. □

Proposición 10. *Si $f : M \to N$ y $g : N \to Q$ son aplicaciones diferenciables, se tiene que $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.*

Demostración. Dado $[\gamma] \in T_pM$, tenemos que $d(g \circ f)_p([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma] = dg_{f(p)}([f \circ \gamma]) = dg_{f(p)} \circ df_p([\gamma])$. □

2.1. El fibrado tangente

Definición 23. Sea M una variedad diferenciable. Definimos el **fibrado tangente** como $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$. A continuación lo dotamos de topología y de estructura de espacio vectorial. Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha\}$ un atlas en

M. Como M tiene una base numerable, puede asumirse que el atlas es numerable (todo espacio $2AN$ es de Lindelöf). Sea ahora $\pi : TM \to M$ y envía $[\gamma] \in T_pM$ en $\gamma(0) = p$. Definimos los abiertos $W_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$, y las funciones $\Phi_\alpha : W_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ dadas por $\Phi_\alpha(v) := (\phi_\alpha(\pi(v)), (d\phi_\alpha)_{\pi(v)}(v))$.

La topología en TM es la inducida por los Φ_α, es decir, una base de abiertos de esta topología es las preimágenes por cada Φ_α de abiertos de $\mathbb{R}^{2n}$. Como la cantidad de Φ_α es numerable, esta topología es automáticamente $2AN$ por serlo $\mathbb{R}^{2n}$. Además, $\{(W_\alpha, \Phi_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas topológico: son biyectivas al tener la inversa $(x, q) \mapsto ((d\phi_\alpha)_{\phi_\alpha^{-1}(x)})^{-1}(q)$, y homeomorfismos de manera tautológica por la definición de la topología. Finalmente, es Hausdorff: dos vectores con el mismo punto base pueden separarse al estar en la misma carta, y si tienen distinto punto base en distintas cartas de M, estas pueden tomarse disjuntas al ser M Hausdorff.

Ahora veamos que es una variedad: los cambios de carta son

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, q) = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x), d(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})_x(q)),$$

que son $\mathcal{C}^\infty$: claramente la primera componente lo es, y la segunda, fijado el x, es lineal luego es suave en q, pero resulta que es suave en x también al ser la matriz jacobiana de $\phi \circ \beta^{-1}$ que es una función $\mathcal{C}^\infty$.

Observación 9. La aplicación $\pi : TM \to M$ es submersión.

Esto es porque, dado $v \in TM$ con $\pi(v) = p$, tenemos cartas (U, ϕ) en p y su asociada (W, Φ) en v, de modo que $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}(x, q) = x$, que es $\mathcal{C}^\infty$ y con diferencial sobreyectiva. □

Definición 24. Un **campo diferenciable** es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$, $X : M \to TM$, tal que $\pi \circ X = Id_M$.

Observación 10 (Campos en $\mathbb{R}^n$). Consideramos la variedad $M = \mathbb{R}^n$ con la carta $(\mathbb{R}^n, Id)$. Entonces, de acuerdo a la construcción explicada anteriormente, se tiene que $TM \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es $\pi(x, y) = x$. Entonces, un campo diferenciable es una función $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la forma $x \mapsto (x, v(x))$ con $v \in \mathcal{C}^\infty$. Por tanto, existen gran cantidad de campos diferenciables, tantos como $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciables.

Observación 11 (Campos en variedades de manera extrínseca). Dada M una variedad, tomamos un embedding $f : M \to \mathbb{R}^N$ existente por el teorema de Whitney. Dado un campo $Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $x \mapsto (x, v(x))$. Podemos *proyectarlo* a un campo en M utilizando la proyección ortogonal $P_{f(p)} : \mathbb{R}^N \to T_{f(p)}f(M)$. Esto da lugar al campo $X : M \to TM$ con $X(p) = df_p^{-1}(P_{f(p)}(v(f(p))))$. Es decir, se proyecta el vector en $\mathbb{R}^N$ sobre el espacio tangente y se lleva a M mediante f (la elección es única por ser df_p inyectiva).

Los campos vectoriales también pueden construirse de manera intrínseca, por ejemplo mediante expresiones locales en cada carta que sean compatibles con los cambios de carta. Por ejemplo, dada M una variedad y (U, ϕ) una carta centrada en $p_0 \in M$, puede tomarse $r > 0$ tal que $B(0, 3r) \subset \phi(U)$, y entonces definir $X(p) = \sigma_r(\phi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}|_p$ en U y 0 fuera de U. Esto muestra la gran cantidad de campos que existen en una superficie.

Observación 12. El conjunto de campos diferenciables en M, que se suele denotar $\Gamma(TM)$, tiene estructura de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo mediante la operación $f \cdot X \mapsto fX$, donde $fX(p) = f(p) \cdot X(p)$, aprovechando la estructura de espacio vectorial en cada T_pM. Puede verse que fX vuelve a ser diferenciable atendiendo a su expresión local en cada carta (U, ϕ): se tiene en U que $X = \sum_{i=1}^n X_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$, donde $X_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$ es la función coordenada. Entonces, $fX = \sum_{i=1}^n fX_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$, de modo que las funciones coordenadas de fX en U son fX_j, que son diferenciables en U al ser producto de dos funciones diferenciables.

Definición 25. Sea $X \in \Gamma(TM)$. Se dice que la curva diferenciable $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ es una **curva integral** de X si, definiendo $\gamma_t(s) := \gamma(t + s)$, y denotando $\gamma'(t) := [\gamma_t] \in T_{\gamma(t)}M$, se tiene que $X(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para todo $t \in I$.

El problema de obtener una curva integral a un campo se reduce a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en cada carta y la solución podría no ser global, pero sí está garantizada localmente:

Teorema 2. *Sea $X \in \Gamma(TM)$. Fijado un $p_0 \in M$, se tienen un abierto $U \subset M$ con $p_0 \in U$ y $\epsilon > 0$ tal que existe $F : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una función $\mathcal{C}^\infty$ con:*

1. *$F(p, 0) = p$, $\forall p \in U$.*
2. *Cada $\gamma_p(t) := F(p, t)$ es curva integral de X.*

Por tanto, se tiene una curva integral de X alrededor de p_0 para cualquier $p_0 \in U$.

Demostración. Tomamos $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ una carta en $p_0 \in M$ y definimos el campo en la imagen de la carta de la manera natural: $Y : \tilde{\phi}(\tilde{U}) \to \tilde{\phi}(\tilde{U}) \times \mathbb{R}^n$, dada por $Y(x) = (x, v(x))$, donde $v(x) = d\tilde{\phi}_{\tilde{\phi}^{-1}(x)}(X(\tilde{\phi}^{-1}(x)))$. Observamos que Y no es más que X trasladado a la carta, y además que el hecho de que una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ sea integral equivale a que $\gamma'(t) = v(\gamma(t))$ en todo t. Por tanto, planteamos el sistema de ecuaciones diferenciales para cierta función G:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_i(x,t)}{\partial t} = v_i(G(x,t)) \\ G(x, 0) = x \end{cases},$$

y este admite por diferenciabilidad una solución única G en $W \times (-\epsilon, \epsilon)$ en torno al $(\tilde{\phi}(p_0), 0)$, luego $W \subset \tilde{\phi}(\tilde{U})$ tal que $\tilde{\phi}(p_0) \in W$. Ahora basta con volver a la variedad: tomar la carta $(U := \tilde{\phi}^{-1}(W), \phi := \tilde{\phi}|_U)$ y definir $F(p, t) = \tilde{\phi}^{-1}(G(\tilde{\phi}(p), t))$. □

Estas soluciones locales pueden *pegarse* gracias a la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales involucrados. Con esta idea, se consigue este teorema que es global en la variedad (aunque no necesariamente en el tiempo):

Proposición 11. *Sea $X \in \Gamma(TM)$. Entonces, $\exists! \varphi^X : \mathcal{U} \to M$, con $\mathcal{U} \subset M \times \mathbb{R}$ abierto y que contiene a $M \times \{0\}$ (es decir, a toda la variedad en tiempo 0), tal que:*

1. *$\varphi_p^X(t) := \varphi_p^X(t)$ es curva integral para todo $p \in M$ y t tal que $(p, t) \in \mathcal{U}$.*
2. *$\varphi^X(p, 0) = p$, para toda $p \in M$.*

Si M es compacta, además, se tiene que $\mathcal{U} = M \times \mathbb{R}$.

Definición 26. Dado $X \in \Gamma(TM)$, el φ^X de la proposición previa se denomina **flujo** de X.

Observación 13 (Ejemplo en el que el flujo no está definido en todo tiempo). Consideramos $M = \mathbb{R}$ y el campo $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dado por $x \mapsto (x, x^2)$. Es decir, se trata del campo expresado como $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ en la única carta. Si γ es una curva integral que parte de $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces debe cumplir:

1. $\gamma(0) = x_0$.
2. $\gamma'(t) = \gamma^2(t)$.

La solución es $\gamma(t) = 0$ para todo t si $x_0 = 0$, y $\gamma(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0}}$ para $x_0 \neq 0$. Esta solución solo está definida en todo tiempo si $x_0 = 0$, por tanto. Entonces, el abierto $\mathcal{U}$ está contenido estrictamente en $M \times \mathbb{R}$.

Proposición 12. *Dada M una variedad y $X \in \Gamma(TM)$, si $p \in M$ y $t, s \in \mathbb{R}$ son tales que $(p, s), (p, s + t), (\varphi_s^X(p), t) \in \mathcal{U}$ (para que las expresiones a continuación estén definidas), entonces se tiene que $\varphi_t^X(\varphi_s^X(p)) = \varphi_{t+s}^X(p)$.*

Demostración. Fijamos s y p, y denotamos por $\gamma(t) = \varphi_t^X(\varphi_s^X(p))$ y $\beta(t) = \varphi_{t+s}^X(p)$. Ahora basta con ver que ambas son curvas integrales para X que arrancan en el mismo punto, para tener por unicidad que son la misma. El punto incial es $\gamma(0) = \varphi_0^X(\varphi_s^X(p)) = \varphi_s^X(p) = \varphi_{0+s}^X(p) = \beta(0)$, donde hemos usado que φ_0^X es la identidad de M. Por otro lado, $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ por una de las propiedades que definen a φ_t^X, y $\beta'(t) = X(\beta(t)) \cdot \frac{d}{dt}(t+s) = X(\beta(t))$ por la regla de la cadena. $\square$

Definición 27. Un campo $X \in \Gamma(TM)$ es **completo** si $\mathcal{U}$, el mayor dominio de definición del flujo, cumple $\mathcal{U} = M \times \mathbb{R}$.

Proposición 13. *Sea M una variedad, $X \in \Gamma(TM)$ un campo completo y $\mathrm{Diff}(M)$ el grupo de difeomorfismos. Se tiene que la aplicación $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ dada por $t \mapsto \varphi_t^X$ es un homomorfismo de grupos y, además, $\varphi_{st}^X = \varphi_t^{sX}$.*

Demostración. Ya se ha comprobado la compatibilidad con la operación de grupo, lo que además garantiza que φ_t^X es un difeomorfismo, invertido por φ_{-t}^X. Para comprobar la segunda parte, definimos $\gamma : \mathbb{R} \to M$ dada por $\gamma(t) = \varphi_{st}^X(p)$, fijados $s \in \mathbb{R}$ y $p \in M$. Se tiene que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(st)\frac{d}{dz}|_{z=st}\varphi_z^X(p) = s \cdot X(\varphi_{st}^X(p)) = sX(\gamma(t))$. Por tanto, γ es curva integral de sX por p así que, por unicidad, $\gamma = \varphi_t^{sX}(p)$. $\square$

Proposición 14. *Si M es compacta, todo $X \in \Gamma(TM)$ es completo.*

Demostración. Por el teorema de existencia, sabemos que $\forall p \in M$ se tienen $\epsilon_p > 0$ y $U_p \subset M$ abierto en torno a p con φ^X definida en $U_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p)$. Como M es compacta, $M = \bigcup_{i=1}^N U_{p_j}$. Sea $\epsilon_0 = \min_j\{\epsilon_{p_j}\}$. Entonces, el flujo está definido en $M \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Sea $\epsilon_1 = \sup\{\epsilon > 0 : M \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathcal{U}\}$. Vamos a probar que ha de ser $\epsilon_1 = \infty$. En caso contrario, podríamos definir la función $F : M \times (-\frac{3}{2}\epsilon_1, \frac{3}{2}\epsilon_1) \to M$ dada por:

$$F(p,t) = \begin{cases} \varphi_t^X(p) & |t| < \epsilon_1 \\ \varphi_{t-\frac{\epsilon_1}{2}}^X(\varphi_{\frac{\epsilon_1}{2}}^X(p)) & t > \frac{\epsilon_1}{2} \\ \varphi_{t+\frac{\epsilon_1}{2}}^X(\varphi_{\frac{-\epsilon_1}{2}}^X(p)) & t < \frac{-\epsilon_1}{2} \end{cases}.$$

Esta función está bien definida al valer lo mismo en las zonas de solapamiento (por la proposición que permite sumar los tiempos al componer). Además, es fácil comprobar que $F(p,0) = p$ y que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}F(t,p) = X(F(t_0,p))$: si $|t_0| < \epsilon_1$ es inmediato al coincidir con φ_t^X y, por ejemplo, si $t_0 > \frac{\epsilon}{2}$, se tiene que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\varphi_{t-\frac{\epsilon_1}{2}}^X(\varphi_{\frac{\epsilon_1}{2}}^X(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(t - \frac{\epsilon_1}{2})\frac{d}{dz}|_{z=t_0-\frac{\epsilon_1}{2}}\varphi_z^X(\varphi_{\frac{\epsilon_1}{2}}^X(p)) = X(\varphi_{t_0-\frac{\epsilon_1}{2}}^X(\varphi_{\frac{\epsilon_1}{2}}^X(p))) = X(F(t_0,p))$. Entonces, $F(t,p)$ es el flujo, definido en un entorno más grande del máximo dado por ϵ_1, una contradicción. $\square$

2.2. Corchete de Lie.

Para definir el corchete de Lie de manera general (evitando hacerlo localmente) es necesario introducir el concepto de derivación en una variedad.

Definición 28. Sea M una variedad $\mathcal{C}^\infty$. Una **derivación** de $\mathcal{C}^\infty(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ que verifica $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

El espacio de derivaciones, $\mathrm{Der}(M)$, es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo, siendo fD la derivación definida como $(fD)(g) := fD(g)$. Es inmediato comprobar que en efecto se trata de una derivación.

Definición 29. Dado un campo diferenciable $X \in \Gamma(TM)$, es posible asociarle una derivación D_X, siendo $D_X(f)$ la función definida como $D_X(f)(p) = df_p(X_p)$. Esto define un isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulos, $\underline{D} : \Gamma(TM) \to \mathrm{Der}(M)$.

Para comprobar que $D_X(f)$ es una derivación podemos observarla en coordenadas locales:

Observación 14. Dada una carta (U,ϕ) en M en torno a $p\in M$, podemos escribir en U la expresión local $X=\sum_{j=1}^n X_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ con cada $X_j:U\to\mathbb{R}$ diferenciable. Además podemos considerar $\tilde f=f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\mathbb{R}$ la expresión local de la función. En este caso, $D_X(f)(p)=df_p(X_p)=df_p(\sum_{j=1}^n X_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}|_p)=\sum_{j=1}^n X_j(p)df_p(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p)=\sum_{j=1}^n X_j(p)df_p((d\phi_p)^{-1}(e_j))=\sum_{j=1}^n X_j(p)d\tilde f_{\phi(p)}(e_j))=\sum_{j=1}^n X_j(p)\frac{\partial\tilde f}{\partial x_j}(\phi(p)))$.

De esta expresión local sigue directamente que se trata de una derivación, pues las propiedades de linealidad y regla del producto se cumplen para las derivadas parciales usuales.

Definición 30. El **corchete de Lie** de $X,Y\in\Gamma(TM)$ se define como $[X,Y]=\underline{D}^{-1}(D_X\circ D_Y-D_Y\circ D_X)$.

En coordenadas, usando las propiedades de la derivación D_X, sigue que

$D_X\circ D_Y(f)(p)=D_X(\sum_{j=1}^n Y_j(p)\frac{\partial\tilde f}{\partial x_j}(\phi(p))))=\sum_{j=1}^n(D_X(Y_j)(p)\frac{\partial\tilde f}{\partial x_j}(\phi(p))+Y_j(p)D_X(\frac{\partial\tilde f}{\partial x_j}(\phi(p))))=\sum_{i,j=1}^n(X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(Y_j)\frac{\partial\tilde f}{\partial x_j}(\phi(p))+Y_j(p)X_i(p)\frac{\partial\tilde f}{\partial x_i\partial x_j}(\phi(p)))$. Por tanto, localmente, puede observarse que $D_X\circ D_Y$ no es una derivación. Sin embargo, al restar $D_Y\circ D_X$, se obtiene: $(D_X\circ D_Y-D_Y\circ D_X)(f)(p)=\sum_{i,j=1}^n(X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}Y_j(p)-Y_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}X_j(p))\frac{\partial\tilde f}{\partial x_j}(\phi(p))$, que es una derivación para el campo cuya expresión local en la coordenada j es $\sum_{i=1}^n(X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}Y_j(p)-Y_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}X_j(p))$.

Definición 31. Sea M una variedad y $f:M\to M$ un difeomorfismo. Sea $X\in\Gamma(TM)$. Se define el **pullback** de X como el campo $f^*(X)$ dado por $f^*(X)=df^{-1}_{f(p)}(X(f(p)))$.

Proposición 15. *Sea $X\in\Gamma(TM)$ y $f:M\to M$ un difeomorfismo. Entonces $\varphi_t^{f^*X}=f^{-1}\circ\varphi_t^X\circ f$.*

Demostración. Por un lado, $f^{-1}\circ\varphi_0^X\circ f=f^{-1}\circ f=Id_M$. Por otro lado, si $\gamma(t)=f^{-1}\circ\varphi_t^X\circ f$, entonces podemos calcular $\gamma'(t)=df^{-1}_{\varphi^X(f(p))}(X(\varphi_t^X\circ f(p)))=df^{-1}_{f\circ\gamma(t)}(X(f\circ\gamma(t)))=f^*(X(\gamma(t)))$. ☐

El siguiente resultado se da sin demostración:

Proposición 16. *Sean $X,Y\in\Gamma(TM)$ completos. Entonces:*

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}((\varphi_t^X)^*(Y))=(\varphi_{t_0}^X)^*([X,Y]),$$

donde la derivada debe entenderse punto a punto, es decir, fijado $p\in M$, se calcula el valor de $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}((\varphi_t^X)^*(Y))$ en p mediante la derivada de la función en t dada por $(\varphi_t^X)^*(Y)(p)\in T_pM\simeq\mathbb{R}^n$.

Como corolario, el corchete de Lie está dado por $\frac{d}{dt}|_{t=0}((\varphi_t^X)^*(Y))$.

Proposición 17. *Se tiene que $(\varphi_t^X)^*(X)=X$.*

Demostración. Por la proposición previa, $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}((\varphi_t^X)^*(X))=0$, de modo que $(\varphi_t^X)^*(X)$ es siempre el mismo campo (independientemente de t), así que coincide con X, que es su valor en $t=0$. ☐

Teorema 3. *Si $X,Y\in\Gamma(TM)$ son campos completos, entonces se tiene que $\forall r,s\in\mathbb{R}$, $\varphi_t^X\circ\varphi_s^Y=\varphi_s^Y\circ\varphi_t^X\iff[X,Y]=0$.*

Demostración. $[X,Y]=0$ equivale a que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}((\varphi_t^X)^*(Y))=0$ en todo t_0, lo que equivale a que $(\varphi_t^X)^*(Y)=(\varphi_0^X)^*(Y)=Y$. Finalmente, basta comprobar que en este caso $\varphi_s^Y=\varphi_s^{(\varphi_t^X)^*(Y)}=(\varphi_t^X)^{-1}\circ\varphi_s^Y\circ(\varphi_t^X)$. ☐

3. Grupos de Lie

Definición 32. Un **grupo topológico localmente euclídeo** es una variedad topológica G con estructura de grupo continua, es decir, la operación $m : G \times G \to G$ es una función continua con elemento neutro $e \in G$ e inversos $I : G \to G$, donde I también es continua.

Definición 33. Un **grupo de Lie** es un grupo topológico localmente euclídeo G con una estructura $\mathcal{C}^\infty$ compatible tal que m, I son $\mathcal{C}^\infty$.

Observación 15. Por ejemplo, $G = \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es un grupo de Lie con las operaciones de producto e inversión compleja. Como $\mathbb{S}^1 \subset G$ es un subgrupo que además es subvariedad, la restricción de m e I a $\mathbb{S}^1$ dota a esta variedad con estructura de (sub) grupo de Lie, denotado también por $U(1)$. Lo mismo sucede considerando el álgebra de cuaterniones $\mathbb{H}$, con $G = \mathbb{H}^* \simeq \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ y restringiéndose a $\mathbb{S}^3$. Este grupo se denota también $SU(2)$. La única otra esfera que admite estructura de grupo de Lie es la trivial $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.

Definición 34. Una variedad diferenciable n-dimensional M es **paralelizable** si $TM \simeq M \times \mathbb{R}^n$ como fibrados vectoriales, es decir, si existe un difeomorfismo $f : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ que preserva las fibras y es lineal en ellas.

Proposición 18. *M es paralelizable $\iff$ TM admite una base de secciones global, es decir, existen $n = \dim M$ campos vectoriales $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \Gamma(TM)$ que forman una base en todas las fibras.*

Demostración. Para $\implies$, las secciones son $f^{-1}(e_j)$, donde $e_j = (\delta_{ij})_i$ representa la sección constante de $M \times \mathbb{R}^n$. Para $\impliedby$, basta con definir $f : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ mediante $v \mapsto (\pi(v), v_1, \dots, v_n)$, donde π es la proyección sobre la fibra y cada v_j es la j-ésima coordenada de v en la base de secciones. □

Teorema 4. *Sea G un grupo de Lie. Entonces G es paralelizable.*

Demostración. La aplicación $TG \simeq G \times \mathbb{R}^n$ se consigue identificando $\mathbb{R}^n$ con T_eG y enviando $v \in TG$ al $(\pi(v), dL_{\pi(v)^{-1}}|_{\pi(v)}(v))$, donde $L_g : G \to G$ es la multiplicación a izquierda por g. □

Definición 35. Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ junto con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada **corchete**, que cumple:

1. $[a, b] = -[b, a]$.
2. $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$.

Observación 16. Dos ejemplos relevantes son $\Gamma(TM)$ con el corchete de Lie, o $(\mathrm{End}(V), [\cdot, \cdot])$, con $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Definición 36. Una **representación de algebra de Lie** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial V junto con un homomorfismo de grupos de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, es decir, una aplicación lineal compatible con el corchete.

Definición 37. Si G es un grupo de lie, $L_g : G \to G$ es la multiplicación a izquierda por g y $X \in \Gamma(TG)$ un campo, se dice que X es **invariante por la izquierda** si $X(gh) = dL_g|_h(X(h))$ para todos $g, h \in G$. El subconjunto de campos invariantes se denota ${}^G\Gamma(TG)$ y, por la linealidad de dL_g, es un subespacio vectorial.

Proposición 19. *Se tiene que $T_eG \simeq {}^G\Gamma(TG)$ como espacios vectoriales.*

Demostración. El isomorfismo está dado por enviar $X \in {}^G\Gamma(TG)$ al $X(e)$, y su inversa por asignar al vector $v \in T_e(G)$ el campo $X(g) := dL_g|_e(v)$. Es rutinario comprobar que está bien definido (es decir, que da un campo invariante a izquierda) y que las aplicaciones dadas son lineales y mutuamente inversas. □

Ahora veremos que el corchete de Lie restringe a ${}^G\Gamma(TG)$, lo que dota a T_eG de una estructura de álgebra de Lie canónica.

Definición 38. Sea $f : M_1 \to M_2$ una aplicación suave y $X_j \in \Gamma(TM_j)$. Se dice que X_1 **está f-relacionado** con X_2, y se denota $X_1 \sim_f X_2$, si $\forall p \in M_1$, se tiene que $df|_{p_1}(X_1(p_1)) = X_2(f(p_1))$.

Observación 17. Se tiene por definición para un grupo de Lie G que $X \in {}^G\Gamma(TG) \iff X \sim_{L_g} X$ $\forall g \in G$, donde L_g el difeomorfismo de multiplicación a izquierda.

Proposición 20. *Con la notación de la definición, se tiene que si $X_1 \sim_f X_2$ y $Y_1 \sim_f Y_2$, entonces $[X_1, Y_1] \sim_f [X_2, Y_2]$. Como corolario, en un grupo de Lie G, el corchete de Lie de dos campos G-invariantes a izquierda sigue siendo G-invariante a izquierda.*

Demostración. Conviene ver los campos desde el punto de vista de las derivaciones para esta demostración. Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$. Entonces $X_2(g) \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$, y por tanto $X_2(g) \circ f \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$. Sabiendo que $X_1 \sim_f X_2$, dado $p_1 \in M_1$ calculamos ahora $X_2(g) \circ f(p_1) = X_2(g)(f(p_1)) = dg|_{f(p_1)}(X_2(f(p_1))) = dg|_{f(p_1)}(df|_{p_1}(X_1(p_1))) = d(g \circ f)|_{p_1}(X_1(p_1)) = X_1(g \circ f)$. En otras palabras, si $X_1 \sim_f X_2$, se tiene que $X_2(g) \circ f = X_1(g \circ f)$.

Utilizando esto, veremos ahora que $[X_1, Y_1] \sim_f [X_2, Y_2]$. Para ello, sea $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$ y $p_1 \in M_1$. Queremos comprobar que $df|_{p_1}([X_1, Y_1](p_1)) = [X_2, Y_2](f(p_1))$. Para ello, veremos que son la misma derivación en $f(p_1)$ (es decir, que son el mismo elemento de $\mathrm{Der}_{f(p_1)}(M_2)$). Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$. Entonces $df|_{p_1}([X_1, Y_1](p_1))(g) = dg|_{f(p_1)}(df|_{p_1}([X_1, Y_1](p_1))) = d(g \circ f)_{p_1}([X_1, Y_1](p_1)) = [X_1, Y_1](g \circ f)(p_1) = (X_1(Y_1(g \circ f)) - Y_1(X_1(g \circ f)))(p_1)$. Ahora, usando la propiedad de la composición observada previamente, sigue que $df|_{p_1}([X_1, Y_1](p_1))(g) = (X_1(Y_1(g \circ f)) - Y_1(X_1(g \circ f)))(p_1) = (X_2(Y_2(g)) \circ f - Y_2(X_2(g)) \circ f)(p_1) = X_2(Y_2(g)) - Y_2(X_2(g))(f(p_1)) = [X_2, Y_2](f(p_1))(g)$, como se quería. $\square$

Proposición 21. *Si G es un grupo de Lie, T_eG tiene estructura canónica de álgebra de Lie.*

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones previas: ${}^G\Gamma(TG)$ es un álgebra de Lie con el corchete de Lie, y el isomorfismo ${}^G\Gamma(TG) \simeq T_eG$ dota a T_eG de estructura de álgebra de Lie de la manera obvia. $\square$