Ecuaciones Diferenciales

Miguel González
mgonzalez.contacto@gmail.com

Mayo de 2020

$$mx'' = -\mu x' - kx + g$$

Revisado en 2022

Acerca de este documento

Estos apuntes son una versión revisada de los de la asignatura Ecuaciones Diferenciales del grado en matemáticas, tomados en Mayo de 2020 por Miguel González. A los apuntes originales se les ha añadido esta página, una imagen de portada, y breves párrafos explicativos en las zonas menos completas. Asimismo se han revisado las erratas y completado los contenidos faltantes.

Este documento es:

- Una recopilación ordenada y directa de las definiciones y resultados más importantes del tema en cuestión, al nivel de los estudios de grado.
- Una colección de demostraciones completas de dichos resultados (salvo en los casos más básicos).
- Una *guía* para revisar de manera rápida las ideas que se han adquirido previamente, o para consultar enunciados puntuales que puedan no haberse comprendido en su totalidad.

Este documento NO es:

- Un libro de texto de la asignatura.
- Una colección de ejercicios para practicar los conceptos adquiridos.
- Un listado de ejemplos para ilustrar las ideas tratadas. A pesar de ello, en ocasiones se incluyen ejemplos puntuales que puedan ser de especial interés o curiosidad, pero se intentan reducir al mínimo en virtud del primer punto de la lista anterior.

Sobre Ecuaciones Diferenciales

En esta asignatura se estudian las ecuaciones diferenciales ordinarias que involucran una función de una variable y sus derivadas. La mayoría de veces es más sencillo modelar un proceso de la naturaleza en funcion de *como cambia*, lo que se traduce en una ecuación que involucra las derivadas de una función. El objetivo de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias es establecer métodos y resultados que permitan garantizar la existencia de funciones que satisfagan dichas ecuaciones.

Requisitos previos

1. Familiaridad con la notación matemática básica.
2. Conocimientos de cálculo equivalentes a la asignatura de Cálculo I. (Sucesiones, funciones reales de una variable, límites, derivadas, integración).
3. Conocimientos de álgebra lineal.

Índice

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** es una igualdad entre una función, algunas de sus derivadas y las variables de las que depende. Veamos un ejemplo:

Observación 1. Se quiere encontrar todas las soluciones a la ecuación diferencial $y'(x) = x^2y(x)$, que se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$. En primer lugar podemos observar que y es derivable, y por tanto continua, en $\mathbb{R}$: de otro modo no se podría calcular $y'(x)$. Esto indica de inmediato que es de clase $\mathcal{C}^1$, porque y' es producto de x^2 y $y(x)$ que son continuas. Es fácil argumentar por inducción para probar que es de hecho $\mathcal{C}^\infty$. Suponiendo que es $\mathcal{C}^{k-1}$, veamos que $y^{(k)}(x) = (y'(x))^{(k-1)} = (x^2y(x))^{(k-1)}$, que existe y es continua por ser producto de dos funciones de clase $\mathcal{C}^{k-1}$. Por tanto, si ha de resolver la ecuación, debe ser suave.

Mediante observación (vemos que tras derivar se obtiene una expresión que incluye a la propia función), encontramos las soluciones $y(x) = ce^{\frac{x^3}{3}}$, donde c es una constante real. Para probar que son todas, nos valemos de que $\mathbb{R}$ es conexo y por tanto basta con ver que se cumple que $(e^{-\frac{x^3}{3}}y(x))' = 0$ y por tanto es constante. Se tiene en efecto que $(e^{-\frac{x^3}{3}}y(x))' = -x^2e^{\frac{x^3}{3}}y(x) + y'(x)e^{-\frac{x^3}{3}} = e^{-\frac{x^3}{3}}(y'(x) - x^2y(x)) = 0$, y hemos acabado.

Esta técnica sirve para resolver este tipo de ecuaciones en las que la función aparece tras derivar. Basta con encontrar una primitiva como hemos hecho en este caso para x^2.

Proposición 1. *Sea $a : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua con I un intervalo que contiene al punto b. Todas las soluciones de $y'(x) = a(x)y(x)$ con $x \in I$ son:*

$$y(x) = ce^{(\int_b^x a(t)dt)}$$

Con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Demostración. Sea $f(x) = (\int_b^x a(t)dt)$. Sabemos del teorema fundamental del cálculo que $f'(x) = a(x)$ en todo I por ser a continua. Veamos que $y'(x) = cf'(x)e^{f(x)} = a(x)ce^{f(x)} = a(x)y(x)$. Para ver que son todas, comprobamos que $(e^{-f(x)}y(x))' = y'(x)e^{-f(x)} - f'(x)e^{-f(x)}y(x) = e^{-f(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = 0$, luego $e^{-f(x)}y(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ constante y se tiene lo que se quería. □

Definición 1. Una ecuación diferencial es **lineal homogénea** si, dadas dos soluciones y_1, y_2 y escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2$ también es solución. Es decir, el espacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal forma un espacio vectorial.

Por ejemplo, la ecuación vista anteriormente, $y'(x) = a(x)y(x)$, es lineal.

Observación 2. En adelante, se obviará (cuando no haya ambiguedad) la dependencia la variable en la función para simplificar la notación. Así, por ejemplo, la primera ecuación discutida se escribiría $y' = x^2y$. En este caso no es ambiguo porque se está derivando la y luego está claro que la x es la variable de la que depende la y y no al contrario.

En general trabajaremos con problemas del siguiente tipo:

Definición 2. Un **problema de valores iniciales** es una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, con $x \in I$, y una condición $y(x_0) = y_0$ para valores fijos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Tenemos el siguiente resultado acerca de estos problemas:

Proposición 2. *Dado un problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:*

1. *Si f es continua en un entorno de (x_0, y_0), $\exists\delta > 0$, y $\exists y : B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal que $y \in \mathcal{C}^1$, que verifica $y'(x) = f(x, y(x))$ en todo su dominio y que $y(x_0) = y_0$. Es decir, existe una solución local al problema.*

2. *Si además f es de Lipschitz en un entorno de x_0, entonces $\exists\alpha > 0$ tal que si $y_1, y_2 : (x_0-\alpha, x_0+\alpha) \mapsto \mathbb{R}$ satisfacen el problema de valores iniciales, entonces $y_1 = y_2$. Esto indica unicidad local.*

Una consecuencia visual inmediata es que *los gráficos de 2 soluciones a una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con $f \in \mathcal{C}^1$ no pueden cruzarse en un mismo punto.* Si se cruzasen en un punto, entonces resolverían el problema de valores iniciales para ese punto y esa ecuación, y entonces coincidirían en todo un entorno del punto. Por ejemplo para $y' = x^2y$ las soluciones tenían la forma $y = ce^{\frac{x^3}{3}}$, que no se cortan.

Observación 3 (Ejemplo de no unicidad). Vamos a considerar el problema $x' = x^{\frac{2}{3}}$ y $x(0) = 0$. La función $f(t, x) = x^{\frac{2}{3}}$ es continua pero no es diferenciable en el $(0, 0)$, luego el teorema no garantiza la unicidad. En efecto, observamos por un lado que $x(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ la satisface. Además, si tenemos una solución, en los puntos en los que no se anula se ha de verificar que $x^{-\frac{2}{3}}x' = 1$ y por tanto que $(3x^{\frac{1}{3}})' = 1$, luego $3x^{\frac{1}{3}} = t + C$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria y fija. Es decir, donde no se anula, debe darse que $x(t) = (\frac{t+C}{3})^3$.

Esto nos sugiere una posible solución, $x(t) = (\frac{t}{3})^3$, y es inmediato comprobar que satisface el problema también, y solo se anula en el 0, luego es una solución esencialmente distinta a la otra en todo entorno. Como, para resolver el problema, basta con que la gráfica de la función pase por el $(0, 0)$ y tenga una pendiente determinada en cada punto del plano por el que pasa, podemos construir otra solución combinando las que ya tenemos, mediante $x(t) = (\frac{t}{3})^3$ si $t > 0$ y $x(t) = 0$ si $t \leq 0$, por ejemplo. Esto se puede hacer porque la derivada de ambas coincide en 0, lo que da lugar a una función diferenciable al combinarlas.

Cabe observar que al resolver una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, estamos afirmando que la derivada es función del punto del plano por donde pasa la gráfica de la función solución y. De este modo, si dos funciones resuelven la ecuación y se cortan en un punto, deben hacerlo con la misma derivada en ese punto. *Todas las soluciones pasan con la misma pendiente por los puntos en que coinciden.*

Esto permite hacerse una idea del aspecto de las soluciones mediante los **campos de pendientes**. Para ciertos puntos del plano se esboza un segmento con la pendiente que indique la función f. La solución, si pasa por esos puntos, lo hará tangente al segmento correspondiente, de manera que el campo de pendientes da una idea de como *fluye* la solución. Para decidir qué puntos considerar, puede ser útil elaborar una malla en el plano, pero suele ser más conveniente el uso de **isoclinas**, que son las curvas de nivel de f, es decir, los puntos del plano cuya pendiente asociada es la misma.

Por ejemplo, para la ecuación $y' = x^2y^2$, cada isoclina es $C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 = a\}$. Si $a < 0$ es vacía y si $a = 0$, son los ejes cartesianos. Por otro lado, si $a > 0$, son las curvas dadas por las funciones $y = \frac{\sqrt{a}}{x}$ e $y = \frac{-\sqrt{a}}{x}$, es decir, son dos hipérbolas. Representando de manera esquemática algunos valores, como $0, \frac{1}{2}, 1$ y 2, se obtiene visualmente una idea de la solución.

Definición 3. Una **ecuación de variables separables** es aquella de la forma $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$.

Se denomina así porque es posible aislar la variable independiente x para resolverlas.

Observación 4 (Método general para resolver ecuaciones de variables separables). Consideramos la ecuación $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$. Recordemos que es notación para $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}$. Si tenemos H una primitiva de h y G una primitiva de g, obtenemos de la ecuación original que $y'(x)h(y(x)) = g(x)$, es decir, podemos escribir por la regla de la cadena que $(H(y(x)))' = g(x)$ y por tanto $H(y(x)) = G(x)$, de donde se puede obtener la solución o información de la misma. Una **notación** habitual que facilita los cálculos es la siguiente: escribimos $y' \equiv \frac{dy}{dx}$, de tal modo que $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$. Esto da lugar a la escritura $g(x)dx = h(y)dy$ y a continuación $\int g(x)dx = \int h(y)dy$, que como vemos es la misma ecuación que obteníamos de la manera rigurosa. Esta notación ayuda a agilizar la resolución de estas ecuaciones.

Por ejemplo, podemos resolver la ecuación planteada anteriormente: $y' = x^2y^2$. En los valores en los que $y \neq 0$, la ecuación es $y' = \frac{x^2}{\frac{1}{y^2}}$. Con el método descrito anteriormente, tenemos en esos casos que $\int y^{-2}dy = \int x^2dx$, de donde $-y^{-1} = \frac{x^3}{3} - C$ y por tanto $y = \frac{1}{C-\frac{x^3}{3}}$, y se comprueba que es solución (en cada uno de los intervalos donde está definida). Este método no ha encontrado todas las soluciones, por ejemplo $y = 0$ es válida y no se obtiene de esta manera (hemos asumido que y no se anula).

Observación 5 (Ejemplo: Usando la unicidad para deducir propiedades). Consideramos el problema $y' = x^2 + y^2$ e $y(0) = 0$. Vamos a probar que la y solución es impar. Para ello debemos ver que $-y(x) = y(-x)$, y una manera de hacerlo es viendo que $u(x) = -y(-x)$ también resuelve el problema. Como sabemos, la unicidad nos garantiza que dos soluciones no pueden cortarse por tanto u e y deberán ser la misma. En efecto, $u(0) = -y(0) = 0$, y además $u'(0) = y'(-x) = (-x)^2 + y^2(-x) = x^2 + u^2$ y hemos acabado.

Supongamos ahora que tenemos una familia de curvas $0 = F(x, y, C)$, por ejemplo la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = C$. En primer lugar podemos obtener la ecuación diferencial que verifican, derivando: $2x - 2yy' = 0$, luego $y' = \frac{x}{y}$. Esta ecuación impone en cada punto (x, y) la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Si recordamos que para que dos rectas sean ortogonales, debe darse que sus pendientes m y m' verifiquen $mm' = -1$, podemos obtener la familia de trayectorias ortogonales con una nueva ecuación diferencial que imponga en cada punto la derivada que se corresponde a $\frac{-1}{y'}$. En el ejemplo anterior, esta familia de curvas serían las y que verifiquen $y' = \frac{-y}{x}$, es decir, las de la forma $y = \frac{C}{x}$ con $C \in \mathbb{R}$. Es decir:

Definición 4 (Curvas ortogonales)**.** Dada una familia de curvas caracterizada por la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, las **trayectorias ortogonales** a esas curvas son las y dadas por la ecuación $y' = \frac{-1}{f(x,y)}$. Cualquier curva de esta familia ortogonal atraviesa todas las curvas de la familia original de manera perpendicular.

Proposición 3 (Curvas ortogonales en polares)**.** *Si tenemos una familia de curvas en coordenadas polares, caracterizada por la ecuación $r' = h(\theta, r(\theta))$, entonces las ortogonales están caracterizadas por $r' = -\frac{r^2}{h(\theta,r(\theta))}$.*

Demostración. Suponemos un cambio de coordenadas regular entre $y(x)$ y $r(\theta)$. Sabemos que en polares $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta)$ y $y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$. Si en coordenadas ortogonales las curvas están dadas por $y' = f(x, y)$, entonces $f(x, y) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$. Despejando sigue que $r' = r\frac{f\sin\theta+\cos\theta}{f\cos\theta-\sin\theta} = h(\theta, r)$. Pero la familia ortogonal viene dada por $y' = \frac{-1}{f(x,y)}$, de tal modo que se llega a: $r' = r\frac{-\frac{1}{f}\sin\theta+\cos\theta}{-\frac{1}{f}\cos\theta-\sin\theta} = \frac{-r^2}{h(\theta,r)}$. □

Definición 5. Una **ecuación autónoma** tiene la forma $y' = f(y)$. Es decir, es una ecuación en la que no aparece la variable independiente. Las raíces de f se denominan **puntos críticos o de equilibrio** de la ecuación.

Proposición 4. *Sea $y' = f(y)$ una ecuación autónoma con $f \in \mathcal{C}^1$.*

1. *Si a es un punto crítico, entonces $y(x) = a$ con $x \in \mathbb{R}$ es una solución, dado que $y' = 0 = f(a)$.*
2. *Si la solución y verifica que $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \in (a_1, a_2)$ siendo a_1, a_2 críticos, entonces $a_1 < y < a_2$.*
3. *Si la solución y verifica que $y(x_0) = y_0$ tal que $f(y_0) > 0$, entonces y es estrictamente creciente. Si $f(y_0) < 0$, es estrictamente decreciente.*
4. *Si se verifican los dos últimos puntos, entonces y debe tener asíntotas horizontales en ∞ y $-\infty$.*

5. *Si y es solución, tiene puntos de inflexión donde se anule $y''(x) = f'(y(x))y'(x) = f'(y)f(y)$, es decir, en los valores de y donde f se anule (que solo se dan en las soluciones indicadas en 1), o bien en los extremos de f.*

Demostración. Para 2, tenemos que no puede darse que $y \geq a_2$ porque entonces como es continua, habría un $x \in \mathbb{R}$ con $y(x) = a_2$ y por el teorema de unicidad debería darse $y(x) = a_2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dado que 1 nos indica que esa es una solución. No obstante $y_0 < a_2$. Análogo con a_1. Para 2, si $f(y) \leq 0$ en algún punto, entonces $\exists y_1 = y(x_1)$ tal que $f(y_1) = 0$ por continuidad de f, de tal manera que $y \equiv y_1$ sería una solución estacionaria (de las vistas en 1) y por unicidad no puede existir la y original dado que asumíamos que $f(y_0) > 0$ luego $y \neq y_1$ en x_0. La afirmación 4 es consecuencia de que y esté acotada y sea monótona. □

Definición 6. Sea $y' = f(y)$ una ecuación autónoma con $f \in \mathcal{C}^1$.

1. El punto de equilibrio a es **estable** si $f(y) > 0$ a la izquierda de a y $f(y) < 0$ a su derecha localmente. Según lo visto anteriormente, esto indica que si $y(x)$ verifica $y(x_0) = y_0$ con y_0 por debajo de a, entonces y crecerá hasta la asíntota horizontal a, y si y_0 está por encima de a, decrecerá hasta ella.

2. El punto de equilibrio a es **inestable** si $f(y) < 0$ a la izquierda de a y $f(y) > 0$ a su derecha localmente. Según lo visto anteriormente, esto indica que si $y(x)$ verifica $y(x_0) = y_0$ con y_0 por debajo de a, entonces y decrecerá alejándose de la asíntota horizontal a, y si y_0 está por encima de a, crecerá alejándose de ella.

Proposición 5. *Sea $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ un problema de valores iniciales con $f \in \mathcal{C}^1$. Supongamos que el mayor punto de equilibrio es a, y que $f(y)$ es estrictamente creciente si $y \geq a$. Si $y_0 > a$, se tiene:*

1. *$\exists \epsilon > 0$ tal que si $x \geq x_0$ se tiene $y(x) \geq y_0 + \epsilon(x - x_0)$, y por tanto y crece a infinito cuando x crece.*

2. *y tiene una asíntota vertical en $x = \alpha \iff \int_k^\infty \frac{dy}{f(y)}$ es finita con $k \in \mathbb{R}$ cualquiera. En ese caso, $\alpha = \int_{y_0}^\infty \frac{dy}{f(y)} + x_0$.*

Demostración. Como $f(y_0) > f(a) = 0$, tenemos que $\exists \epsilon > 0$ con $f(y_0) \geq \epsilon$. Por tanto, si $y \geq y_0$, entonces $f(y) \geq f(y_0) \geq \epsilon$, o lo que es lo mismo, $y' \geq \epsilon$. Pero entonces, como sabemos que y es estrictamente creciente por ser y' positiva, si ponemos $x \geq x_0$ (luego $y(x) \geq y_0$), tenemos $y - y_0 = \int_{x_0}^x y'(u)du \geq \int_{x_0}^x \epsilon = \epsilon(x - x_0)$.

Para la segunda afirmación, podemos asumir que tiene una asíntota en $x = \alpha$, interpretando $\alpha = \infty$ como la falta de asíntota. Si $x \geq x_0$, como $y'(x) > 0$, entonces y es invertible. Escribimos $x = x(y)$ esa inversa. Sea $x_1 > x_0$ con $x_1 < \alpha$. Entonces $x_1 - x_0 = \int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{y(x_0)}^{y(x_1)} x'(y)dy = \int_{y(x_0)}^{y(x_1)} \frac{1}{f(y)}dy$. Si tomamos el límite cuando $x_1 \to \alpha^-$ se obtiene $\alpha = x_0 + \int_{y_0}^\infty \frac{1}{f(y)}dy$. □

Sabemos que las soluciones de $y' = f(y)$ no pueden atravesar puntos de equilibrio y que son estrictamente monótonas si están entre dichos puntos (y f es continua), lo que da lugar a asíntotas horizontales. Nos planteamos a continuación si es posible que tengan las asíntotas horizontales antes de dichos puntos estacionarios (por ejemplo, si $y < a$ y crece, nos preguntamos si puede tener asíntota en $y = b < a$, o ha de ser $y = a$ forzosamente).

Lema 1. *Si y es solución de $y' = f(y)$, con f continua, y $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = a \in \mathbb{R}$, entonces a es forzosamente un punto de equilibrio (es decir, $f(a) = 0$).*

Demostración. Sabemos dado un natural n que $y(n+1) - y(n) = y'(\xi_n)$ con $\xi_n \in (n, n+1)$ y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \infty$. Entonces, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y'(\xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (y(n+1) - y(n)) = a - a = 0$, pero por otro lado $\lim\limits_{n\to\infty} y'(\xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y(\xi_n)) = f(\lim\limits_{n\to\infty} y(\xi_n)) = f(a)$, luego $f(a) = 0$. □

Proposición 6. *Si y resuelve $y' = f(y)$ en el intervalo I, entonces $\hat{y}(x) = y(x+d)$ para $d \in \mathbb{R}$ también lo resuelve en $I - d$.*

1.1. Ecuaciones Homogéneas y Exactas

Definición 7. Una función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ es **homogénea de grado** k si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, se tiene que $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.

Definición 8. Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ es **homogénea** si f es homogénea de grado 0 donde esté definida.

Proposición 7. *Dada una ecuación diferencial homogénea, el cambio $z = \frac{y}{x}$ (o bien $y = xz$) la transforma en una ecuación en variables separadas.*

Demostración. Tenemos que $f(x, y) = f(x \cdot 1, xz) = f(1, z)$ para $x \neq 0$. Esto indica que $z' = \frac{y'}{x} - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x}(y' - z) = \frac{1}{x}(f(1, z) - z) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(1,z)-z}}$ que ya es de variables separadas. □

A continuación recordemos que dada una familia de curvas $F(x, y) = C$, si denotamos F_x, F_y las parciales de F, tenemos que $F_x + F_y \cdot y' = 0$ luego da lugar a la ecuación $y' = \frac{-F_x}{F_y}$ (consecuencia del teorema de la función implícita). Asimismo es fácil deshacer la ecuación $y' = \frac{-F_x}{F_y}$ para llegar a que $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$ luego $F(x, y) = C$. Lo que queremos determinar es cuando una ecuación arbitraria $y' = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$ para dos funciones M, N da lugar a una familia de curvas $F(x, y) = C$.

Observación 6 (Condición necesaria). Si las funciones $M, N : I \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ son $\mathcal{C}^1$ y dan lugar a una familia $F(x, y) = C$ a través de la ecuación diferencial $y' = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$, entonces $M_y = N_x$.

Razón. Tenemos que $M_y = (F_x)_y = (F_y)_x = N_x$, donde hemos cambiado el orden de derivación parcial usando que M, N eran $\mathcal{C}^1$ y por tanto F era $\mathcal{C}^2$.

En adelante las ecuaciones $y' = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$ también las denotaremos en términos de formas diferenciales: $Mdx + Ndy = 0$.

Definición 9. Si $\exists F : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $M = F_x$, $N = F_y$, se dice que la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$ es **exacta**.

Como hemos discutido anteriormente, en ese caso las soluciones vienen dadas de manera implícita por $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Observación 7. Hemos visto que si $Mdx + Ndy = 0$ es exacta, entonces $M_y = N_x$, siempre que $M, N \in \mathcal{C}^1$. Esta condición es además suficiente si M, N están definidas en un abierto simplemente conexo.

Por ejemplo, la ecuación $(y - 3x^2)dx + (x-1)dy = 0$ verifica esa condición y las funciones están definidas en todo $\mathbb{R}^2$. Integrando con respecto a cada variable se puede obtener que $F(x, y) = xy - x^3 - y + C$.

Definición 10. Dada una ecuación $Mdx + Ndy = 0$, se dice que la aplicación $\mu : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \backslash \{0\}$ es un **factor integrante** si $\hat{M} = \mu M$ y $\hat{N} = \mu N$ verifican la condición $\hat{M}_y = \hat{N}_x$.

La idea es que como $\mu \neq 0$, entonces $Mdx + Ndy = 0 \iff \hat{M}dx + \hat{N}dy = 0$, y se puede resolver la nueva ecuación, que ya es exacta, como anteriormente (encontrando la F de la que deriva).

1.2. Ecuaciones lineales

Definición 11. Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es aquella de la forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$. Si $b(x) \equiv 0$, la ecuación se denomina **homogénea**.

Proposición 8. *Dada una ecuación lineal $y' = a(x)y + b(x)$, con $a, b \in \mathcal{C}^0$, definida para $x \in I$ con I un intervalo, se tiene:*

1. *Dada $A(x)$ tal que $A'(x) = a(x)$, por ejemplo $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(u)du$, y $B(x)$ tal que $B'(x) = b(x)e^{-A(x)}$, por ejemplo $B(x) = \int_{x_0}^{x} b(u)e^{-A(u)}du$, se tiene que:*

$$y(x) = B(x)e^{A(x)} + Ce^{A(x)}$$

para $C \in \mathbb{R}$, verifican la ecuación y son todas las soluciones.

2. *Dado $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única de esas soluciones con $y(x_0) = y_0$.*
3. *Si $a, b \in \mathcal{C}^k$, entonces $y \in \mathcal{C}^{k+1}$.*

Demostración. Es fácil comprobar, sustituyendo en la ecuación, que esas son soluciones. Para ver que son todas, veamos que si y satisface $y' = ay+b$, tenemos que $(e^{-A}y)' = -ae^{-A}y+e^{-A}y' = e^{-A}(y'-ay) = e^{-A}b$. Por lo tanto, se tiene que $e^{-A(x)}y = B(x) + C$, de donde sigue que $y = e^{A(x)}B(x) + Ce^{A(x)}$. Veamos que $y(x_0) = y_0 \iff y_0 = e^{A(x_0)}B(x_0) + Ce^{A(x_0)} \iff C = e^{-A(x_0)}y_0 - B(x_0)$, luego para ese único valor de C se tiene. Finalmente, si $a, b \in \mathcal{C}^k$, entonces $A, B \in \mathcal{C}^{k+1}$ y por tanto $y(x) = e^{A(x)}B(x) + Ce^{A(x)} \in \mathcal{C}^{k+1}$. □

Observemos que las soluciones se obtienen sumando una solución particular $B(x)e^{A(x)} + C_0e^{A(x)}$ a todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y' = a(x)y$, que sabemos que son $Ce^{A(x)}$ con $C \in \mathbb{R}$. De esta manera, la resta de dos soluciones de $y' = a(x)y + b(x)$ es una solución de $y' = a(x)y$, o lo que es lo mismo, las soluciones forman un espacio afín.

1.3. Reducción de orden

El objetivo es resolver ecuaciones de orden 2 (es decir, aparecen derivadas segundas) transformándolas en ecuaciones de orden 1.

Proposición 9. *Dada la ecuación de orden 2, $g(x, y'(x), y''(x)) = 0$, en la que no aparece y, puede reducirse a través del cambio $u(x) = y'(x)$*

Demostración. $g(x, y', y'') = g(x, u, u') = 0$, que es una ecuación de primer orden. □

Ejemplo. Queremos resolver $xy'' = 3x-y'$. Hacemos el cambio $u = y'$, llegando a $xu' = 3x-u$. Se puede resolver por métodos lineales o como ecuación homogénea, u observamdo que equivale a $xu' + u = 3x$, luego $(xu)' = 3x$, es decir $xu = \frac{3x^2}{2} + C$, o bien $u = \frac{3x}{2} + \frac{C}{x}$. Deshacemos el cambio para llegar a $y' = \frac{3x}{2} + \frac{C}{x}$, de donde se alcanza la expresión $y = \frac{3x^2}{2} + C\log|x| + K$ (que para ser derivable deberemos definirla sobre $(0, \infty)$ o sobre $(-\infty, 0)$) para $C, K \in \mathbb{R}$. Observemos que como era de orden 2 hemos obtenido dos grados de libertad y por tanto necesitaremos dos condiciones iniciales:

Definición 12. Un **problema de valores intermedios** de orden k consta de una ecuación diferencial de orden k, y las restricciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\dots$, $y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}$ en las derivadas en un mismo punto.

Proposición 10. *Dada la ecuación de orden 2, $g(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$, en la que no aparece x, puede reducirse a través del cambio $u = y'$, en el que tomamos y como variable independiente.*

Demostración. La ecuación con $y(x) \to y(x(y))$ pasa a ser $g(y, u(y), u'(y)) = 0$ que es de orden 1. Debemos tener en cuenta que $u'(y) = \frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dy'}{dx}\frac{1}{y'(x)} = \frac{y''(x)}{y'(x)}$. □

Ejemplo. Queremos resolver $yy'' + 3(y')^2 = 0$. Hacemos el cambio $u(y) = y'(y)$. Entonces, como hemos discutido en la demostración, $u'(y) = \frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{\frac{-3y'^2}{y}}{y'} = \frac{\frac{-3u^2}{y}}{u} = \frac{-3u}{y}$. Da lugar a $u = \frac{C}{y^3}$, es decir, $y' = \frac{C}{y^3}$, luego $\frac{y^4}{4} = kx + C$ para $k, C \in \mathbb{R}$.

2. Ecuaciones lineales de orden 2

Definición 13. Una **ecuación lineal de orden** 2 es aquella de la forma $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t) = r(t)$, para ciertas funciones dadas p, q, r. Si $r \equiv 0$, se trata de una ecuación lineal homogénea de orden 2. Si no, es no homogénea y entonces $x''+p(t)x'+q(t)x = 0$ se denomina **ecuación lineal homogénea asociada**.

Teorema 1 (Existencia y unicidad)**.** *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Supongamos que $p, q, r \in \mathcal{C}^0(I)$, $t_0 \in I$, y $x_0, x_0' \in \mathbb{R}$. Se tiene que el problema de valores iniciales $x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$, $t \in I$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$ tiene solución y es única.*

Proposición 11. *Sean $p, q, r \in \mathcal{C}^0(I)$. Consideramos la ecuación $x'' + px' + qx = r$. Se tiene:*

1. *El espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada es un espacio vectorial de dimensión 2.*
2. *Si x_1, x_2 forman base de dicho espacio, y $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación inicial, entonces las soluciones de esta ecuación son exactamente las de la forma $x(t) = x_p(t) + \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Para ver que es un subespacio, si x_a, x_b resuelven la ecuación y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos que $(\alpha x_a + \beta x_b)'' + p(\alpha x_a + \beta x_b)' + q(\alpha x_a + \beta x_b) = \alpha x_a'' + \alpha p x_a' + \alpha q x_a + \beta x_b'' + \beta p x_b' + \beta x_b = 0 + 0 = 0$. Para ver que es de dimensión 2, consideremos x_1 la solución del problema de valores iniciales $x'' + px' + qx = 0$ que verifica $x_1(t_0) = 1$, $x_1'(t_0) = 0$, y x_2 la solución a la misma ecuación pero $x_2(t_0) = 0$, $x_2'(t_0) = 1$, que existen por el teorema previo. Dada $x(t)$ una solución a $x'' + px' + qx = 0$, consideramos $y(t) = x(t) - x(t_0)x_1(t) - x'(t_0)x_2(t)$. Derivando, se verifica que $y(t)$ satisface también la ecuación, de tal forma que por unicidad, y como la función nula la satisface, se tiene que $y \equiv 0$ luego $x(t) = x(t_0)x_1(t) + x'(t_0)x_2(t)$. Sigue entonces que esas funciones generan las soluciones. Para ver que son linealmente independientes, basta con suponer que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$. Evaluando en t_0 sigue que $\alpha_1 = 0$, y derivando ambos lados y evaluando el resultado en t_0 sigue que $\alpha_2 = 0$.

Para la segunda afirmación, sea $x(t)$ una solución cualquiera de la no homogénea. Entonces $y(t) = x(t) - x_p(t)$ satisface la ecuación homogénea asociada, por lo que $x(t) - x_p(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, como se quería. Se comprueba rutinariamente que toda x de esa forma es solución. □

A continuación vamos a analizar como resolverlas en el caso de que algunos de los coeficientes sean constantes. Partimos del caso homogéneo:

Definición 14. Sea la ecuación lineal $x'' + ax' + bx = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$. La ecuación $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ en la incógnita λ se denomina **ecuación característica** de la ecuación diferencial.

Proposición 12. *Sea la ecuación lineal $x'' + ax' + bx = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son dos raíces distintas de la ecuación característica, dos soluciones independientes (y por tanto, que generan todas) son $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$.*

2. *Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ es raíz doble de la ecuación característica, entonces dos soluciones independientes son $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ y $x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$.*

3. *Si las raíces λ_1,λ_2 de la ecuación característica son complejas (por tanto conjugadas) y ponemos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces dos soluciones independientes son $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ y $x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.*

Demostración. Para 1, tenemos que si $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$, entonces $x_i'' + ax_i' + bx_i = e^{\lambda_i t}(\lambda_i^2 + a\lambda_i + b) = 0$ por hipótesis. Para 2, la solución $e^{\lambda_1 t}$ es por el mismo motivo. Para hallar la otra, consideramos $x(t, \lambda) = e^{\lambda t}$. Observemos que $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x + a\frac{\partial}{\partial t}x + bx) = (2(\lambda - \lambda_1) + \lambda(\lambda - \lambda_1)^2)e^{\lambda t}$, para lo que hemos usado que $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)^2$ por hipótesis. Podemos cambiar el orden de derivación en el término de la izquierda para obtener la expresión: $(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(te^{\lambda t}) + a\frac{\partial}{\partial t}(te^{\lambda t}) + b(te^{\lambda t})) = (2(\lambda - \lambda_1) + \lambda(\lambda - \lambda_1)^2)e^{\lambda t}$. Evaluando en λ_1 en ambos lados sigue que $(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(te^{\lambda_1 t}) + a\frac{\partial}{\partial t}(te^{\lambda_1 t}) + b(te^{\lambda_1 t})) = 0$, como se quería.

Para 3, basta con observar que si $x(t)$ es solución compleja de la ecuación, con $x(t) = u(t) + iv(t)$, entonces $0 = x'' + ax' + bx = (u'' + au' + b) + i(v'' + av' + bv)$, y como ambas componentes son reales, deben ser nulas. Se deduce que tanto $u(t)$ como $v(t)$ son soluciones. Tenemos por un argumento como el de 1 que $e^{\lambda_i t}$ es solución compleja, pero entonces $e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$ es solución, y tomando la parte real y la imaginaria como hemos explicado se obtiene las soluciones deseadas. $\square$

Si la ecuación lineal fuese de orden superior, es decir, de la forma $x^(n) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0$, los mismos argumentos son válidos: las raíces reales de multiplicidad m dan lugar a soluciones $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}$, y las complejas $a + ib$, a soluciones de la forma $e^{at}\cos(bt)$, $e^{at}\sin(bt)$, $te^{at}\cos(bt)$, $te^{at}\sin(bt)$, $t^2e^{at}\cos(bt)$, ...

Para resolver ecuaciones no homogéneas, falta encontrar una solución particular. Podemos fijarnos que si el término no homogéneo es un polinomio en la variable independiente, una solución polinómica puede valer (dado que las derivadas siguen siendo polinomios). Esto se recoge en la siguiente proposición:

Proposición 13. *Sea la ecuación $x'' + ax' + bx = r(t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $r(t) = e^{\mu t}P(t)$ con P un polinomio y μ un valor que no satisface la ecuación característica, entonces hay una solución particular $x(t) = e^{\mu t}Q(t)$ con Q y P del mismo grado.*

2. *Si $r(t) = e^{\mu t}P(t)$ con P un polinomio y μ es raíz simple de la ecuación característica, hay una solución $x(t) = e^{\mu t}Q(t)$ con $gr(Q) = gr(P) + 1$.*

3. *Si $r(t) = e^{\mu t}P(t)$ con P un polinomio y μ es raíz doble de la ecuación característica, hay una solución $x(t) = e^{\mu t}Q(t)$ con $gr(Q) = gr(P) + 2$.*

4. *Si $r(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\sin(\beta t) + P_2(t)\cos(\beta t))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, P_1 y P_2 polinomios, entonces hay una solución particular de la forma $x(t) = e^{\alpha t}(Q_1(t)\sin(\beta t) + Q_2(t)\cos(\beta t))$ con $gr(P_i) = gr(Q_i)$ (suponiendo para esto que $gr(0) = 0$).*

A continuación nos centraremos en el caso no constante.

Proposición 14. *Sea la ecuación $x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$ para $t \in I$ un intervalo, con $p, q, r \in \mathcal{C}^0(I)$.*

1. *Si $x_1(t)$ es solución que no se anula nunca de la ecuación homogénea asociada, entonces $\exists x : I \mapsto \mathbb{R}$ otra solución de la homogénea asociada, independiente de x_1, de la forma $x(t) = u(t)x_1(t)$.*

2. *Si x_1, x_2 son soluciones independientes de la ecuación homogénea asociada, entonces $\exists x : I \mapsto \mathbb{R}$ solución de la ecuación original, de la forma $x(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$.*

Demostración. Para 1, pongamos $x(t) = u(t)x_1(t)$. Tenemos entonces que $x'' + px' + qx = u(x_1'' + px_1' + qx_1) + u''x_1 + 2u'x_1' + pu'x_1 = u''x_1 + 2u'x_1' + pu'x_1$. Para que satisfaga la ecuación, eso se debe anular, es decir, debe darse que $\frac{u''}{u'} = -p - 2\frac{x_1'}{x_1}$. Integrando a ambos lados, eso equivale a que $\log |u'| = -\int p + \log x_1^2$, luego basta con tomar $u = \int \frac{e^{-\int p}}{x_1^2}$. El símbolo $\int f$ denota cualquier primitiva de f (sabemos que existe por ser las funciones continuas).

Para 2, pongamos $x(t) = u_1x_1 + u_2x_2$ e impongamos también que deba darse $u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0$. En ese caso, si ha de ser solución, entonces $r(t) = x''(t) + px' + qx = u_1(x_1'' + px_1' + qx_1) + u_2(x_2'' + px_2' + qx_2) + u_1'x_1' + u_2'x_2' = u_1'x_1' + u_2'x_2'$. Las dos condiciones que hemos impuesto son:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Si la matriz de coeficientes es invertible para todo $t \in I$, entonces basta con multiplicar a ambos lados por la inversa, obteniendo así expresiones para u_1' y u_2'. Después, cualquier primitiva de esas expresiones valdrá. Por tanto, vamos a probar que esa matriz es invertible siempre y habremos acabado. De no ser siempre invertible, se tendría un t_0 tal que $x_1(t_0) = cx_2(t_0)$ y $x_1'(t_0) = cx_2'(t_0)$. Consideramos entonces $y(t) = x_1(t) - cx_2(t)$. Esta función resuelve la ecuación homogénea asociada por ser combinación lineal de dos soluciones, y además $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, luego por unicidad ha de ser $y \equiv 0$, lo cual indica que $x_1 \equiv cx_2$, que contradice que sean soluciones independientes. □

Observación 8. A la función $w(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ se la conoce como **wronskiano** de x_1 y x_2.

Lema 2. *Si x_1, x_2 son soluciones de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, con $t \in I$ y $p, q \in \mathcal{C}^0$, entonces su wronskiano w resuelve $w' + p(t)w = 0$. Por tanto, podemos expresar $w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$, donde se observa que $w \equiv 0 \iff w(t_0) = 0$ para algún t_0.*

Demostración. $w'(t) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -px_1' - qx_1 & -px_2' - qx_2 \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = -pw$, como se quería. □

2.1. Oscilador armónico simple

Se parte de un muelle acoplado al eje Y del que cuelga en su extremo una masa. La masa está apoyada en el eje X que representa el suelo. Se desplaza el muelle de su posición de equilibrio hasta una posición inicial $x(0) = x_0$, medida desde la posición de equilibrio y, cuando está detenido, es decir, cuando $x'(0) = 0$, se libera el muelle. El objetivo es obtener el comportamiento de $x(t)$. Sobre el muelle actúan las siguientes fuerzas:

1. La fuerza de restablecimiento del muelle, que viene dada por la ley de Hooke: $F = -kx$ con $k > 0$, siempre que x_0 sea pequeño.

2. El rozamiento del suelo, que es mayor cuanto más velocidad tenga la masa, y viene dada por $F = -\mu x'$, con $\mu > 0$.

3. Una fuerza externa (si la hay) dada por $g(t)$. (Suponemos que solo depende del tiempo).

Por tanto, como la fuerza total ha de ser $F = ma = mx''$, obtenemos:

$$mx'' = -\mu x' - kx + g$$

Denotamos $f \equiv \frac{g}{m}$, $\epsilon = \frac{\mu}{m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, y la ecuación resultante es:

$$x'' + \epsilon x' + \omega_0^2 x = f(t)$$

Que es lineal de orden 2 y es la que resolveremos.

Comenzamos con el caso sin rozamiento ni fuerzas externas, es decir, $x'' + \omega_0^2 x = 0$. Las raíces de la ecuación característica son $\lambda = \pm i\omega_0$, y por lo tanto la solución general es $c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. El cuerpo describe un movimiento periódico de periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Cabe observar que las funciones de la forma $A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ son de este tipo, dado que equivalen a $A\sin(\omega_0 t)\cos(\varphi) + A\cos(\omega_0 t)\sin(\varphi)$.

Para el caso con rozamiento, es decir, $x'' + \epsilon x' + \omega_0^2 x = 0$, las raíces de la ecuación característica son $\lambda = \frac{-\epsilon}{2} \pm \sqrt{(\frac{\epsilon}{2})^2 - \omega_0^2}$. Hay que distinguir varios casos:

1. Si $\epsilon < 2\omega_0$, es decir, para *poco rozamiento*, las raíces son de la forma $-\frac{\epsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\epsilon}{2})^2}$, con ambas componentes reales, y por tanto, la solución general es $c_1 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\epsilon}{2})^2}t) + c_2 e^{-\frac{\epsilon}{2}t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\epsilon}{2})^2}t)$. Son exactamente las mismas que en el caso sin rozamiento, pero su amplitud se ve amortiguada con el paso del tiempo, a causa del factor $e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$.

2. Si $\epsilon > 2\omega_0$, es decir, para *mucho rozamiento*, las raíces son reales, de la forma $\lambda = -\frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{(\frac{\epsilon}{2})^2 - \omega_0^2}$. Son ambas negativas, y dan lugar a la solución $x(t) = c_1 e^{((-\frac{\epsilon}{2}) + \sqrt{(\frac{\epsilon}{2})^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{((-\frac{\epsilon}{2}) - \sqrt{(\frac{\epsilon}{2})^2 - \omega_0^2})t}$. Ya no se trata de oscilaciones periódicas, sino que la posición simplemente decae hasta el punto de equilibrio.

3. Si $\epsilon = 2\omega_0$, tenemos la raíz doble $\lambda = \frac{\epsilon}{2}$. Esto da lugar a la solución $x(t) = c_1 e^{-\frac{\epsilon}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{\epsilon}{2}t}$.

A continuación estudiaremos el caso en el que el muelle experimenta una fuerza externa de la forma $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, y veremos qué consecuencias tiene que ω se relacione con la frecuencia ω_0 del muelle. Suponemos que no hay rozamiento, es decir, $x'' + \omega_0^2 x = \sin(\omega t + \varphi)$. Para encontrar el caso particular, probamos, como ya sabemos, con $x_p = \alpha\sin(\omega t + \varphi) + \beta\cos(\omega t + \varphi)$. De hecho, como no aparecen derivadas primeras en la ecuación, podemos fijar $\beta = 0$. Encontramos dos casos:

1. Si $\omega \neq \omega_0$, entonces, sustituyendo y derivando, obtenemos que $x_p = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \varphi)$. A esto se le puede sumar la solución general que ya conocíamos. Veamos que si ω es próximo a ω_0, la solución particular se ve enormemente amplificada, lo que se conoce como *cuasiresonancia*. Además, si $\omega = \frac{\omega_0}{k}$ para $k \in \mathbb{N}$, las soluciones son periódicas de periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}k$, al serlo las 3 funciones trigonométricas involucradas.

2. Si $\omega = \omega_0$, la solución x_p que habíamos sugerido resuelve la ecuación homogénea y por tanto no sirve. Tenemos dos opciones: tomar el límite cuando $\omega \to \omega_0$ en el caso previo, o probar soluciones de la forma $x_p = \alpha p_1(t)\sin(\omega_0 t + \varphi)$, con $p_1(t) = at + b$. Veamos que podemos hacer $b = 0$, dado que la parte $\alpha b\sin(\omega_0 t + \varphi)$ es solución de la homogénea, y por tanto valdrá 0 en la ecuación diferencial. En cualquiera de las dos opciones, llegamos al caso particular $x_p(t) = -\frac{1}{2\omega_0}t\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Ocurre el fenómeno de **resonancia**, y el movimiento se ve amplificado indefinidamente (hasta que el objeto se rompa) por el factor t.

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 15. Un **sistema de** d **ecuaciones diferenciales** es una igualdad de la forma $X'(t) = F(t, X(t))$, donde $X : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ es un vector de d aplicaciones diferenciables que dependen de la variable t, y $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{d+1} \mapsto \mathbb{R}^d$ es una función de d componentes que depende de la variable independiente t y de las aplicaciones de X. Es decir, se trata de d ecuaciones diferenciales.

Observación 9. Consideramos solo sistemas de orden 1 (la derivada más alta que aparece es la primera), dado que todo sistema de orden mayor puede reducirse a uno de orden 1 añadiendo más funciones. Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} x'' + xyy' - x^2 = 0 \\ y'' - x^2y' + yx' = 0 \end{cases}$$

Puede convertirse estableciendo $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = y$, $x_4 = y'$, y entonces se tiene:

$$\begin{cases} x_2 = x_1' \\ x_4 = x_3' \\ x_2' + x_1x_3x_4 - x_1^2 = 0 \\ x_4' - x_1^2x_4 + x_3x_2 = 0 \end{cases}$$

Que ya es de orden 1.

Definición 16. Un sistema de ecuaciones es **autónomo** cuando es de la forma $X'(t) = F(X(t))$, es decir, la derivada no depende de la variable independiente.

Observación 10. Todo sistema $X' = F(t, X)$ puede convertirse a autónomo mediante el cambio $Y = (t, X)$, dado que en ese caso $Y' = (1, X') = (1, F(t, X)) = (1, F(Y)) = G(Y)$.

3.1. Sistemas lineales

Definición 17. Un **sistema lineal** es aquel de la forma $X' = AX + B$, con $X : I \mapsto \mathbb{R}^d$, $B : I \mapsto \mathbb{R}^d$ y $A : I \mapsto \mathbb{R}^{d\times d}$, siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. El sistema $X' = AX$ se denomina **sistema lineal homogéneo asociado**.

Proposición 15. *Si A, B son continuas en I, $t_0 \in I$ y $X_0 \in \mathbb{R}^d$, entonces existe y es única la solución del problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Proposición 16. *Si A, B son continuas en I, el conjunto de soluciones de $X' = AX$ es un espacio vectorial de dimensión d. Dada una base $V_1, \dots, V_d \in \mathbb{R}^d$ y $t_0 \in I$, si denominamos X_j la solución del problema $X' = AX$, $X_j(t_0) = V_j$, entonces los X_j son base de dicho espacio de soluciones. Además, dada una solución X_p de $X' = AX + B$, se tiene que $X = X_p + \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$ es la solución general de la ecuación $X' = AX + B$.*

Demostración. Si X, Y resuelven el sistema homogéneo, y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(aX + bY)' = aX' + bY' = aAX + bAY = A(aX + bY)$ luego es un espacio vectorial. Para ver que es de dimensión d y que esa es una base, sea X una solución. Como $X(t_0) \in \mathbb{R}^d$, se escribe de manera única como $X(t_0) = \sum \lambda_j V_j = \sum \lambda_j X_j(t_0)$. Sea $Y \equiv X - \sum \lambda_j X_j$. Entonces $Y' = AY$ por ser combinación lineal de soluciones, y además $Y(t_0) = 0$ por definición, de tal modo que $Y \equiv 0$ por unicidad y entonces $X = \sum \lambda_j X_j$, luego son base dado que además la expresión era única. Finalmente, está claro que $X = X_p + \sum \lambda_j X_j$ resuelve la ecuación porque $X' = X_p' + (\sum \lambda_j X_j)' = AX_p + B + A(\sum \lambda_j X_j) = A(X_p + \sum \lambda_j X_j) + B$. Asimismo, si X resuelve la no homogénea, entonces $X - X_p$ resuelve la homogénea, por tanto $X - X_p = \sum \lambda_j X_j$ de manera única. $\square$

Lema 3. *Sea el sistema lineal homogéneo $X'(t) = A(t)X(t)$, con $t \in I$ y $A(t)$ continua. Dadas $X_1, \ldots, X_m$ soluciones, son equivalentes:*

1. *Las funciones $X_1, \ldots, X_m$ son linealmente independientes.*
2. *$\exists t_0 \in I$ tal que los vectores $X_1(t_0), \ldots, X_m(t_0)$ son linealmente independientes.*
3. *$\forall t \in I$, los vectores $X_1(t), \ldots, X_m(t)$ son linealmente independientes.*

Demostración. Se tiene $3 \implies 2$ trivialmente. Para $2 \implies 1$, si hubiese escalares λ_i no todos nulos tales que $\sum_i \lambda_i X_i \equiv 0$, entonces $\sum_i \lambda_i X_i(t_0) = 0$ en particular, luego serían linealmente dependientes y hemos acabado. Para $1 \implies 3$, si se tuviese que $\exists t_1 \in I$ y λ_i no nulos tales que $\sum_i \lambda_i X_i(t_1) = 0$, entonces $\sum \lambda_i X_i$ sería solución del problema $X' = AX$ y $X(t_1) = 0$, luego, por unicidad, $\sum \lambda_i X_i = 0$ y entonces las funciones serían dependientes. $\square$

Definición 18. Con la notación del lema anterior, si $m = d$, con d el orden de A, se define el **wronskiano** de $X_1, \ldots, X_d$ soluciones de $X' = AX$, como $w(t) = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_d \end{pmatrix}$

Se define una **matriz fundamental** de la ecuación como $F(t) = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_d \end{pmatrix}$. De este modo, todas las soluciones del sistema son $X = F(t)C$, con $C \in \mathbb{R}^d$ un vector de constantes.

Proposición 17. *Dado el sistema homogéneo $X' = AX$, con A continua y de entradas reales, si λ es un autovalor de A y V un autovector suyo, entonces se tiene la solución $X(t) = e^{\lambda t}V$. En caso de que $X(t)$ sea complejo, su parte real e imaginaria también resuelven el sistema, lo que permite obtener 2 soluciones por cada pareja de autovalores complejos.*

Demostración. Si $X(t) = e^{\lambda t}V$, entonces $X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = \lambda X$, y debe darse que $X' = AX$ luego se tiene $AX = \lambda$, y dividiendo por $e^{\lambda t}$, que $AV = \lambda V$. Además, si se tiene que $X(t) = B(t) + iC(t)$ con B, C vectores reales, y $X' = AX$, entonces $B' + iC' = AB + iAC$ y como las entradas de A son reales, debe darse que $B' = AB$ y que $C' = AC$. $\square$

En el caso de que se tenga un autovalor múltiple cuyo espacio de autovectores tenga menor dimensión que la multiplicidad (menos multiplicidad geométrica que algebraica), entonces hay que probar con soluciones del tipo $X(t) = e^{\lambda t}V_0 + e^{\lambda t}tV_1 + \cdots + e^{\lambda t}t^kV_k$ donde k es esa diferencia de multiplicidad.

A continuación, con el fin de obtener soluciones generales a estos sistemas, debemos definir lo siguiente:

Definición 19. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, se define $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

La definición es válida porque la serie converge absolutamente: dada una norma inducida de operador, $\|\cdot\|$, tenemos que $\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$, y por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$.

Proposición 18. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\left\|e^M\right\| \leq e^{\|M\|}$.
2. *Si $M = SNS^{-1}$, entonces $e^M = Se^NS^{-1}$.*
3. *Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{pmatrix}$, con cada M_i un bloque más pequeño, entonces $e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{M_k} \end{pmatrix}$.*
   En particular, la exponencial de una matriz diagonal es una matriz diagonal cuyas entradas son las exponenciales de los elementos de la primera.

4. *Si M y N conmutan, se tiene $e^{M+N} = e^M e^N = e^N e^M$.*

Demostración. La 1 sigue de la desigualdad triangular y de la justificación que se ha dado justo antes de la proposición. Para 2, basta con ver que $M^k = SN^kS^{-1}$, luego $e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{SN^nS^{-1}}{n!} = S\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!}S^{-1} = Se^NS^{-1}$. Para 3, el resultado sigue de que $\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} M_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & M_k^k \end{pmatrix}$, y aplicando la definición con esta propiedad se obtiene las exponenciales en cada bloque. Para 4, basta con ver que $e^M e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+j=n} \frac{n!}{j!k!} M^k N^j = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} M^k N^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(M+N)^n = e^{M+N}$. Hemos usado en el último paso que vale la fórmula del binomio porque M, N conmutan. □

Proposición 19. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $e^{(t+s)M} = e^{tM}e^{sM}$, *para $t, s \in \mathbb{R}$.*
2. $e^{0M} = I$
3. e^{tM} *es invertible y* $(e^{tM})^{-1} = e^{-tM}$
4. $\frac{d}{dt}e^{tM} = Me^{tM} = e^{tM}M$.

Las tres primeras propiedades indican que las matrices de la forma e^{tM} fijada M son un grupo multiplicativo.

Demostración. 1 se tiene por la proposición previa dado que tM y sM conmutan. Para 2, usando $s = t = 0$ se tiene $e^{0M} = e^0e^0 = I^2 = I$. Hemos usado que $e^0 = I$ al solo tener el primer sumando en la definición. 3 se tiene ajustando $-t = s$ en 1, dado que $I = e^{0M} = e^te^{-t}$. Para 4, veamos que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)M} - e^{tM}}{h} = e^{tM} \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{hM} - I}{h}$, donde hemos usado las propiedades previas. Pero $\frac{e^{hM}-I}{h} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(hM)^n}{n!}}{h} \to M + h\sum_{n=2}^{\infty} h^{n-2}\frac{M^n}{n!} = M$. La suma converge a 0 porque es h por una suma convergente. □

Con estas definiciones, se simplifica teóricamente el sistema de ecuaciones diferenciales:

Proposición 20. *Sea el problema de valores iniciales $X' = AX$, $X(t_0) = X_0$ con $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ fijos.*

1. e^{tA} *es una matriz fundamental del sistema.*
2. *Sea $F(t)$ una matriz fundamental. $F(0) = I \iff F(t) = e^{tA}$.*
3. *La solución general del problema es $X = e^{(t-t_0)A}X_0$.*

Demostración. Para 1, basta con ver que $(e^{tA})' = Ae^{tA}$. Para 2, está claro que $e^{0A} = I$. Además, las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_d$ que componen las columnas de e^{tA} son únicas, lo que indica que no hay otras que tomen esos valores en 0. Para 3, ya sabemos que $X(t) = e^{tA}C$ es la solución general. Imponemos $X_0 = X(t_0) = e^{t_0A}C$, luego $C = e^{-t_0A}X_0$, de tal modo que $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$. □

Proposición 21. *Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ una matriz, y $B(t) \in \mathbb{R}^d$. una función continua. Consideramos $X'(t) = AX(t) + B(t)$. Se tiene que una solución particular (con la que pueden obtenerse todas las soluciones gracias a la proposición previa) es:*

$$X_p(t) = e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds$$

Para un $t_0 \in I$ el dominio de X.

Demostración. Tenemos que $(e^{-tA}X_p)' = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}X'(t) = e^{-tA}(-AX + X') = e^{-tA}B(t)$. Integrando sigue lo que se quería. $\square$

Observación 11 (La exponencial de un bloque de Jordan). Toda matriz A puede escribirse de la forma $A = SJS^{-1}$ con J una matriz de Jordan (compuesta por bloques de Jordan en la diagonal únicamente), y sabemos que $e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$, y que para e^{tJ} bastará con exponenciar cada uno de los bloques de Jordan. Los bloques pueden ser o bien matrices diagonales, en cuyo caso es inmediato el cálculo de la exponencial, o bien de la forma:

$$J_k = \lambda I + N$$

Donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nilpotente. En ese caso $e^{tJ_k} = e^{t\lambda I}e^{tN} = e^{t\lambda}e^{tN}$.

Para hallar e^{tN}, basta con ver que $e^{tN} = I + tN + \frac{t^2N^2}{2} + \cdots + \frac{t^{m-1}N^{m-1}}{(m-1)!}$, donde m es el orden del bloque y por tanto $N^k = 0$ si $k \geq m$. De este modo:

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación extendemos estos conceptos a sistemas lineales arbitrarios (no necesariamente constantes):

Proposición 22. *Se considera el sistema $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, con $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^d$ continuas.*

1. *Sea $F(t)$ una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado. Dada $G(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, se tiene que G es fundamental $\iff \exists K \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertible tal que $G(t) = F(t)K$.*

2. *Si $F(t)$ es fundamental para el homogéneo asociado, entonces una solución particular del sistema lineal es:*

$$X_p(t) = F(t)\int_{t_0}^{t} (F(s))^{-1}B(s)ds$$

Por tanto todas las soluciones son $X(t) = X_p(t) + F(t)C$.

Demostración. $G(t) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_d)$ son soluciones $\iff Y_j = \sum_{k_{lj}} X_l$, siendo los $X_1, \dots, X_d$ las soluciones columna de $F(t)$, dado que toda solución se puede expresar como combinación lineal de las columnas de una matriz fundamental, es decir, $G(t)$ es fundamental $\iff G = FK$. K es invertible porque G y F lo son por definición. Para la parte 2, basta con derivar: $X_p' = F'\int_{t_0}^t (F(s))^{-1}B(s)ds + FF^{-1}B = AF\int_{t_0}^t (F(s))^{-1}B(s)ds + IB = AX + B$. $\square$

Proposición 23. *Consideramos el sistema $X' = AX$ con $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ continua. Consideramos $w(t) = \det F(t)$ el wronskiano para unas soluciones independientes $X_1, \dots, X_d$. Entonces:*

1. *Se tiene* $w' = aw$*, para* $a(t) = traza(A(t))$.

2. *Se tiene* $w = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$*, luego el wronskiano es nulo o bien no se anula nunca.*

3. *Si* A *es constante,* $w(t) = w(t_0)e^{(t-t_0)traza(A)}$

4. *Se tiene* $\det(e^{tA}) = e^{t\cdot traza(A)}$.

Demostración. 2 y 3 siguen de 1. Para 1, veamos que $\frac{d}{dt}w(t) = \det\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2 \\ \dots \\ f_d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2' \\ \dots \\ f_d \end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_d' \end{pmatrix}$, donde $F(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_d \end{pmatrix}$ son las filas de la matriz fundamental. No obstante, como F verifica que $F' = AF$, se tiene entonces que $f_j' = \sum_{i=1}^{d} a_{ji}f_i$, de tal manera que en la expresión inicial queda $w'(t) = a_{11}\det F + a_{22}\det F + \cdots + a_{dd}\det F = traza(A)\det F = traza(A)w(t)$. Para 4, tomemos $X_1, \dots, X_d$ las soluciones que verifican $X_j(0) = e_j$. En ese caso, tenemos por la expresión 3 para $t_0 = 0$ que $\det(e^{tA}) = w(t) = w(0)e^{t\cdot traza(A)} = e^{t\cdot traza(A)}$. □

4. Existencia y unicidad

El problema que queremos atacar es la demostración de resultados generales de existencia y unicidad de soluciones:

Teorema 2. *Sea I un intervalo y $F : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ continua y tal que todas sus derivadas parciales F_j existen, son continuas y están acotadas: $\exists M > 0$ tal que $\|F_j(t, X)\| \leq M$ $\forall t, X$. Entonces el problema de valores iniciales $X'(t) = F(t, X(t))$, $X(t_0) = X_0$, con $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ tiene solución $X : I \mapsto \mathbb{R}^d$, de clase $\mathcal{C}^1$, y es única.*

Se pide la acotación de las derivadas de F para evitar que la solución X crezca sin límites y garantizar así la existencia de la solución en todo I. Si no se pide, el resultado es local:

Teorema 3. *Sea I un intervalo y $F : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. Consideramos el problema de valores iniciales $X'(t) = F(t, X(t))$, $X(t_0) = X_0$, con $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Supongamos que F es continua en un entorno de (t_0, X_0). Entonces $\exists \delta > 0$ tal que el problema tiene solución $X : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mapsto \mathbb{R}^d$, de clase $\mathcal{C}^1$, y es única.*

La idea para demostrarlos es ver que el problema de valores iniciales equivale a $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds$. Definiremos por tanto un operador G tal que $G(X)$ sea la función dada por $G(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds$, y lo que queremos es obtener un punto fijo de ese operador. Para ello es necesario definir los siguientes conceptos:

Definición 20. Sean $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ funciones reales en un intervalo I. Se dice que $\{f_n\}_n$ **converge punto a punto a** f si $\forall t \in I, \forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon, t)$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$. Se trata de la convergencia habitual en cada punto de f.

Se dice que $\{f_n\}_n$ **converge uniformemente a** f si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon, t)$ tal que $\forall t \in I, \forall n \geq N$ se tiene $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$.

Es inmediato (por ser más restrictiva la definición), que convergencia uniforme a f implica convergencia punto a punto. Obsérvese que la condición de convergencia uniforme puede escribirse como:

$$\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \to 0$$

Cuando $n \to \infty$. Esto indica que, si dotamos de la métrica adecuada al espacio de funciones, esta convergencia uniforme no es más que una convergencia habitual:

Definición 21. Sea $g : I \mapsto \mathbb{R}$. Se define $\|g\|_\infty := \sup_{t \in I} |g(t)|$

Por tanto, f_n converge uniformemente a f equivale a que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ si $n \to \infty$.
Obsérvese además que esta norma puede valer $+\infty$, lo cual equivale a decir que g no es acotada. Además, se verifican las propiedades de norma:

Proposición 24. *Se tiene:*

1. $\|g\|_\infty \geq 0$, $\|g\|_\infty = 0 \iff g = 0$.
2. $\|\lambda g\|_\infty = |\lambda| \|g\|_\infty$, *para* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Además, se tiene que $\|af + bg\|_\infty = a \|f\|_\infty + b \|g\|_\infty$ para escalares a y b.

Todas son inmediatamente verificables.

Definición 22. Definiremos $B(I)$ como el conjunto de aplicaciones $f : I \mapsto \mathbb{R}$ acotadas, y $C(I)$ como el conjunto de aplicaciones $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continuas. Por tanto, en particular, $C([a, b]) \subset B([a, b])$ (para intervalos cerrados).

Obsérvese que $B(I)$ o $C([a, b])$, con la métrica $\|\cdot\|_\infty$, son espacios normados, dado que la norma toma valores finitos.

Observación 12 (Ejemplos de convergencia). Sea $f_n(x) = x^n$ definida en $(0, 1)$. Punto a punto, tenemos que $x^n \to 0$ si $n \to \infty$. Ahora vamos a probar que no se tiene $x^n \to 0$ uniformemente. Tenemos que $\|x^n - 0\|_\infty = \|x^n\|_\infty = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dado que $\lim\limits_{x \to 1^-} x^n = 1$, luego x^n toma valores arbitrariamente cercanos a 1 siempre. Por tanto, como la norma infinito no tiende a cero, hemos acabado.

Por otro lado, consideramos $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$, también en $(0, 1)$. Es una función creciente, luego su supremo es también su límite cuando $x \to 1^-$, que es $\frac{1}{1+n^2}$ por ser continua. Entonces, $\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{1+n^2} \to 0$ y entonces la convergencia es uniforme, y por tanto puntual.

A continuación veremos una propiedad importante:

Proposición 25. *Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones continuas, y $f_n \to f$ uniformemente, entonces f ha de ser continua.*

Demostración. Fijado $t_0 \in I$ el dominio, y $\epsilon > 0$, hay un N suficientemente grande tal que $|f(t_0) - f(t)| = |f(t_0) - f_N(t_0) + f_N(t_0) - f_N(t) + f_N(t) - f(t)| \leq |f(t_0) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f_N(t)| + |f_N(t) - f(t)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_N(t_0) - f_N(t)| \leq \epsilon$ si $|t - t_0| < \delta$, por ser f_N continua. □

Por tanto, si $f_n \to f$ punto a punto, f_n son continuas pero f no, entonces no hay convergencia uniforme.

Recordemos una definición habitual:

Definición 23. La sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones es de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$ implica $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$.

El espacio de funciones en $\mathbb{R}$ es completo:

Proposición 26. *Dada $\{f_n\}_n$ de Cauchy, para la norma $\|\cdot\|_\infty$, se tiene que $\exists f : I \mapsto \mathbb{R}$ de tal manera que $f_n \to f$ uniformemente.*

Demostración. Fijado el $x \in I$, tenemos que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy, por serlo f bajo la norma infinito, luego $f_n(x)$ converge a un valor, que denominamos $f(x)$. Ahora bien, para n, m lo suficientemente grandes, tenemos que $\forall x \in I$, se verifica $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, por ser de Cauchy f, y tomando el límite cuando $m \to \infty$, lo cual es posible según hemos discutido, se tiene para todo x que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. □

Por tanto, $B(I)$ o $C([a, b])$ son espacios de *Banach* con $\|\cdot\|_\infty$.

Otro aspecto imporante es cómo se comportan las integrales. Si una sucesión de funciones no tiende uniformemente a una función, sus integrales no tienen por qué converger a la integral de dicha función. Lo único que se garantiza es:

Proposición 27. *Dadas $f_n, f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ funciones integrables, con $f_n \to f$ uniformemente, entonces $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.*

Demostración. $|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty (b - a) \to 0$. □

A continuación consideraremos **series** de funciones. La definición es completamente análoga:

Definición 24. Se tiene que $\sum f_n \to f$ punto a punto si $\forall x \in I$, se tiene que $\sum_{k=1}^n f_k(x) \to f(x)$. Se tiene que $\sum f_n \to f$ uniformemente si $\sum_{k=1}^n f_k \to f$ uniformemente. Se denota en ambos casos $\sum_{k=1}^\infty f_k = f$.

Vamos a ver dos criterios de convergencia uniforme de series de funciones: el de Cauchy y el de Weierstrass:

Proposición 28. *Sean $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$.*

1. *$\sum f_n$ converge uniformemente $\iff \|\sum_{k=m}^n f_k\|_\infty \to 0$ si $n, m \to \infty$.*
2. *Si $\|f_n\|_\infty \leq M_n$, y $\sum M_n$ es convergente como serie de reales, entonces $\sum f_n$ converge unifomemente.*

Demostración. 1 es aplicar el criterio de Cauchy a $\sum_{k=1}^n f_k$. Para 2, tenemos que $\|\sum_{k=m}^n f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m}^n \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m}^n M_k \to 0$ si $m, n \to \infty$, por ser de Cauchy. □

Por ejemplo, $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente, en el intervalo $[-R, R]$, $\forall R \in \mathbb{R}$. Esto es así porque $\left\|\frac{x^n}{n!}\right\|_\infty = \frac{R^n}{n!}$ por ser creciente cada función, pero $\sum_{n=0}^\infty \frac{R^n}{n!}$ es convergente, luego el criterio de Weierstrass nos da convergencia uniforme. Además puntualmente está claro que converge a e^x, luego uniformemente también.

Proposición 29. *Sean $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$.*

1. *Si f_n son continuas y $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces $\sum_{n=1}^\infty f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ es continua.*
2. *Si $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es integrable, $\sum f_n$ converge uniformemente a f y esta f también es integrable, entonces $\int_a^b \sum f_n \to \sum \int_a^b f_n$.*

Demostración. El 1 es el teorema que demostramos para convergencia uniforme de una función, aplicado a la función $\sum_{k=1}^n f_k$. El 2 es el mismo resultado, para el teorema de integrales. □

Observación 13. Para estudiar la convergencia de funciones f_n, en ocasiones se define $g_n = f_n - f_{n-1}$, de tal modo que $f_n = \sum_{k=1}^n g_k$, y se aplican resultados de series como el criterio de Weierstrass.

El siguiente teorema relaciona derivadas de sucesiones de funciones con las funciones originales. En particular, basta con que las derivadas converjan para que lo haga la sucesión:

Proposición 30. *Sean $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{C}^1$. Supongamos que $f_n' \to g$ uniformemente, y además, en un punto x_0, se tiene que $f_n(t_0)$ converge. Entonces f_n converge uniformemente a una $f \in \mathcal{C}^1$, y además $f' = g$.*

Demostración. Escribimos $f_n(t) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_n'(u)du$. Veamos que f_n es Cauchy para la norma infinito: $\|f_n(t) - f_m(t)\|_\infty \leq |f_n(t_0) - f_m(t_0)| + (t - t_0) \|f_n' - f_m'\|_\infty \to 0$, donde hemos usado la definición de $f_n(t)$ que hemos dado anteriormente, y que f_n' es de Cauchy en norma infinito, y que $f_n(t_0)$ es de Cauchy. Por lo tanto, f_n converge uniformemente a una cierta f. Tomando límites cuando $n \to \infty$ en la expresión inicial, sigue que $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t g(u)du$, y derivando, por tanto, $f' = g$. □

Observación 14. Todo lo discutido hasta este momento se puede aplicar a funciones con valores complejos y con varias componentes, haciendo el estudio componente a componente, gracias a que se puede definir una norma infinito para funciones de varias componentes, como la suma de las normas infinito de cada componente.

Definición 25. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^d$ es de Lipschitz en A si $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in A$, con $|\cdot|$ siendo cualquier norma de $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{R}^m$.

La elección de norma da igual porque en $\mathbb{R}^k$ son equivalentes. Toda función de Lipschitz es continua.

Proposición 31. *Si $\omega \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ es $\mathcal{C}^1$, se tiene:*

1. *Si todas las parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ están acotadas y Ω es convexo, entonces f es Lipschitz.*

2. Si $A \subset \Omega$ es compacto y convexo entonces f es Lipschitz en A.

Demostración. Para 1, damos $\gamma(t) = x + t(y - x)$, dados x, y cualesquiera. La recta está en Ω por convexidad. $f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 (f\gamma(t))' dt = \int_0^1 \sum_1^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\gamma_j'(t) dt \leq \int_0^1 M\gamma'(t) dt = M(y - x)\int_0^1 dt$. Tomando valores absolutos y usando la triangular en las integrales, se tiene. La cota M es d veces el máximo de todas las cotas de cada una de las parciales. 2 es consecuencia de 1, dado que en un compacto las parciales están acotadas. □

Obsérvese que si la función va de I un intervalo en $\mathbb{R}$, entonces además si es Lipschitz se tiene que $|f(x+\delta) - f(x)| \leq L\delta$. Dividiendo por δ y tomando el límite si $\delta \to 0$, se tiene que $|f'(x)| \leq L$. Por tanto en una dimensión, derivada acotada equivale a Lipschitz.

Proposición 32 (Existencia y unicidad global)**.** *Sea $F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ continua y con F Lipschitz fijada la t, para todo t. (Es decir, $|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [a, b]$). Sean $t_0 \in [a, b]$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Entonces $\exists X : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}^1$, que verifica $X'(t) = F(t, X(t))$, $t \in [a, b]$ y $X(t_0) = X_0$. Tal X es única.*

Demostración. Primero veamos que si $h < \frac{1}{L}$, existe solución local en $I = [t_0 - h, t_0 + h] \cap [a, b]$, y es única. Una vez tengamos eso, iremos moviendo estos intervalos para obtener una solución global. Para ello, definimos en I las siguientes funciones: $X_0(t) = X_0$, y recursivamente: $X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X_n(s)) ds$. Es inmediato que X_{n+1} verifica la condición inicial, y $X_{n+1}' = F(t, X_n(t))$. La esperanza es que esto converja a la solución. Por definición, X_0 es continua. Además, si X_n es continua, entonces $F(s, X_n(s))$ también lo es, y por tanto $\int_{t_0}^t F(s, X_n(s)) ds$ está bien definida (y es continua), luego X_{n+1} es continua. Por tanto todas ellas son continuas.

Veamos por inducción que $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq (Lh)^n \|X_1 - X_0\|_\infty$. Si $n = 0$ es inmediato que vale la igualdad. Ahora, $|X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq |\int_{t_0}^t |F(s, X_n(s)) ds - F(s, X_{n-1}(s))| ds| \leq |\int_{t_0}^t L|X_n(s) - X_{n-1}(s)| ds \leq |\int_{t_0}^t L \|X_n - X_{n-1}\|_\infty ds$.

El valor absoluto exterior se mantiene por si $t < t_0$. Además, en el intervalo que hemos elegido, tenemos que $|X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq Lh \|X_n - X_{n-1}\|_\infty$, dado que $|t - t_0| \leq h$. Tomando el máximo en las t se tiene lo que se quería.

Sea $D_n = X_n - X_{n-1}$. Entonces $X_n = X_0 + \sum_1^n D_i$, luego X_n converge uniformemente si y solo si $\sum D_i$ lo hace, pero $\|D_n\|_\infty \leq (Lh)^{n-1} \|D_1\|_\infty$, luego por el criterio de Weierstrass, y como $Lh < 1$ por elección (de h), tenemos la convergencia uniforme de la sucesión X_n construida, digamos a $X(t)$.

Además, tenemos que $|F(t, X(t)) - F(t, X_n(t))| \leq L|X(t) - X_n(t)| \leq L \|X - X_n\|_\infty$. Tomando máximos, entonces $\|F(\cdot, X(\cdot)) - F(\cdot, X_n(\cdot))\|_\infty \leq L \|X - X_n\|_\infty$, luego también se tiene la convergencia uniforma $F(t, X_n(t)) \to F(t, X(t))$. Pasando al límite en $X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds$, sigue que:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds$$

Y por tanto X es una solución del problema de valores iniciales en I. Hemos usado que la convergencia de $F(\cdot, X_n(\cdot))$ es uniforme para poder permutar límite e integral (si no, bastaría punto a punto).

Para ver que es única, pongamos $Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, Y(s))$ otra solución. Entonces $|Y(t) - X(t)| = |\int_{t_0}^t |F(s, Y(s)) - F(s, X(s))| ds|$ y, por un argumento similar al anterior, tenemos que $\|Y - X\|_\infty \leq Lh \|Y - X\|_\infty$, lo cual solo ocurre si $\|Y - X\|_\infty = 0$ porque $Lh < 1$.

Para ver cómo extender esta solución en todo el intervalo, consideremos lo siguiente. Sea $h = \frac{1}{2L}$ en lo que sigue. Supongamos que nuestra solución X llega hasta $\beta < b$. Entonces repetimos el argumento, lo que nos da una solución Y hasta $\min\{\beta + h, b\}$, y por la izquierda hasta $\beta - h$, que verifique además $Y(\beta) = X(\beta)$. Por unicidad, como la solución ha de ser única en $[\beta - h, \beta]$, según hemos probado (es un intervalo de longitud menor que h), tenemos que en ese trozo $Y \equiv X$. Basta con definir la nueva solución

$Z = \begin{cases} Y(t) \text{ si } t \in [\beta, \text{mín}\{\beta + h, b\}] \\ X(t) \text{ si } t \leq \beta \end{cases}$. Tras un número finito de extensiones se *llega* a b, dado que todas aportan h de distancia. Análogamente puede extenderse hacia a. □

En realidad el intervalo $[a, b]$ puede ser cualquier intervalo I, ya que no se ha usado en la demostración. Obsérvese que para que sea Lipschitz en t, basta con que todas las parciales respecto a las d coordenadas x_j estén acotadas, siendo la constante la misma $\forall t \in I$, y que sean continuas para que haya integrabilidad (se usa en la demostración).

A continuación demostramos dos teoremas que se enunciaron en el pasado (todos los de existencia y unicidad), y no se demostraron hasta ahora:

Demostración del teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales. Si el intervalo I es cerrado: $|F(t, \xi) - F(t, \eta)| = |A(t)(\xi - \eta)|$. La componente j-ésima es $|\sum_k a_{jk}(t)(\xi_k - \eta_k)| \leq \sum_k |a_{jk}||\xi_k - \eta_k| \leq L|\xi - \eta|$, dado que las funciones a_{jk} son continuas y estamos trabajando en el intervalo $[a, b]$, luego hay una cota L que se puede tomar como el máximo de todas las cotas individuales de cada función. Si I el intervalo no es cerrado, lo que sí tenemos es que en todo sub-intervalo $[-c, c] \subset I$ se tiene una solución X_c y es única. Lo que hacemos es que dado $t \in I$, escogemos un intervalo cerrado $[a', b']$ que contenga en su interior al t y que esté en I, y definimos $X(t) = X_{[a',b']}(t)$. La definición no depende del intervalo por unicidad y nos da valores de X en todo I. Resuelve la EDO en todo punto t porque en un entorno de t coincide con $X_{[a',b']}$ que la resuelve. □

Demostración del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de orden 2. Basta con cambiar de variable $y = x'$, lo que da un sistema de ecuaciones lineales. Esto funciona para ecuaciones de orden arbitrario, de hecho, cambiando sucesivamente de variable. □

Lo que hemos hecho en definitiva para la demostración del teorema global es buscar un punto fijo para el operador G que manda funciones en funciones: $G(Z)(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, Z(s))ds$, sabiendo que G era una aplicación contractiva (Teorema de punto fijo de Banach), al ser F de Lipschitz.

A continuación veremos qué sucede si la F no está definida en todo $I \times \mathbb{R}^d$, sino exclusivamente en $I \times \Omega$ con Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. El principal problema es que para que $X' = F(t, X)$ tenga sentido, la función X obtenida no debe salirse de Ω, y esto nos va a obligar a restringir su espacio de partida convenientemente.

Proposición 33 (Teorema de existencia y unicidad local)**.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$, $[a, b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$, y $F : [a, b] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ continua y Lipschitz uniformemente en t (es decir, $|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \Omega$, $t \in [a, b]$). Sean $t_0 \in [a, b]$, $X_0 \in \Omega$. Entonces, $\exists \delta > 0$ tal que se tiene $X : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a, b] \mapsto \Omega$ que verifica el problema de valores iniciales $X' = F(t, X)$, $X(t_0) = X_0$, y es única.*

Demostración. Lo único que hay que ver es que restringiendo el intervalo lo suficiente (tomando el δ pequeño), las iteraciones X_n de la demostración del teorema global toman sus valores en Ω, para poder hacer $F(t, X_n)$ en la siguiente iteración. El resto de la demostración, una vez tenido esto, es, por supuesto, igual.

Como Ω es abierto, entonces se tiene $r > 0$ tal que $X_0 \in \overline{B}_r(X_0) \subset \Omega$, y por continuidad de F, y ser $[a, b] \times \overline{B}_r(X_0)$ compacto, se tiene $|F(t, X)| \leq M$ para cierta M que depende del r elegido. Si $\delta > 0$ es tal que $\delta M \leq r$, entonces tenemos que las X_n definidas en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ toman valores en Ω: está claro que X_0 lo hace, y ahora suponiendo que X_n también lo hace, tenemos que si $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, entonces $|X_{n+1}(t) - X_0| \leq |\int_{t_0}^{t} |F(s, X_n(s))|ds| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq r$, luego vemos que $X_{n+1} \in \Omega$ y a partir de aquí podemos repetir el argumento del teorema global. Veamos que lo que no podemos es extenderlo a todo $[a, b]$, dado que como δ además de verificar $\delta < \frac{1}{L}$ debe cumplir que $\delta < \frac{r}{M}$, no podemos tomar extensiones de tamaño fijo, y lo que ocurrirá es que estos tamaños irán decrementando según extendemos. De esto se hablará en la siguiente subsección. □

Obsérvese que para este resultado basta con que F sea $\mathcal{C}^1$, dado que esto permite que sea Lipschitz localmente, restringiéndose lo suficiente en todas las coordenadas. Esto no podía darse en el teorema global porque solo se podía restringir la primera coordenada.

Proposición 34 (Regularidad)**.** *Si F es $\mathcal{C}^m$ en $I \times \Omega$, entonces la X obtenida en el teorema previo es $\mathcal{C}^{m+1}$ en I.*

Demostración. Es $\mathcal{C}^1$ por el teorema previo. Ahora, si Xes $\mathcal{C}^n$, para $n \leq m$, entonces $F(t, X(t)) \in \mathcal{C}^n$ también, pero esto indica que $X'(t) \in \mathcal{C}^n$ y por tanto $X \in \mathcal{C}^{n+1}$. □

4.1. Prolongabilidad

La idea es extender la solución obtenida por el teorema local al mayor intervalo posible que funcione. En el caso del teorema global (en la demostración), esto podía hacerse sin problemas tomando $h = \frac{1}{2L}$ fija. El problema es que ahora el δ no basta con que $\delta < \frac{1}{L}$, sino que ha de ser también dependiente del la constante de Lipschitz local que depende del punto. Por tanto, es posible que los nuevos intervalos que vamos obteniendo sean cada vez más pequeños, haciendo así que la extensión no sea infinita. Lo que buscamos es el intervalo *maximal*, que depende de t_0 y X_0, de definición de la X solución.

Si ese intervalo es (α, β), y la ecuación la consideramos en $(a, b) \times \Omega$:

- Si $\beta < b$, es decir, no se llega hasta la derecha, entonces para todo $K \subset \Omega$ compacto, se tiene un $t_K < \beta$ de forma que $X(t) \notin K$ para todo $t \in (t_k, \beta)$, es decir, la solución abandona eventualmente cualquier compacto en Ω (se acerca a $\partial\Omega$ o se va a ∞ al acercarnos a β).
- Si $a < \alpha$ ocurre lo mismo cuando $t \to \alpha^+$.
- Si Ω es todo $\mathbb{R}^d$, lo único que puede impedir que la solución exista en todo (a, b) es que $|X(t)| \to \infty$, antes de llegar a los bordes del intervalo (a, b). Por tanto, si se prueba que esto no ocurre, entonces el intervalo maximal es todo.

Proposición 35. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}^1$ y tal que existen $C(t), D(t) \geq 0$ continuas tales que $|f(t, x)| \leq C(t) + D(t)|x|$, $\forall x, t$.*

Entonces las soluciones al problema de valores iniciales de la ecuación $f(t, x) = x'$, existen en todo $\mathbb{R}$ y son únicas.

Demostración. Por comodidad suponemos que el problema es $x(0) = x_0$. Por ser $f \in \mathcal{C}^1$, se tiene existencia local y el intervalo de x se extiende a uno maximal. La única forma de que ese intervalo no sea todo $\mathbb{R}$, dado que f está definida en todos lados, es que $|x|$ tienda a ∞ cuando $t \to \beta < \infty$. No obstante, $x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s)ds = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$, luego $|x(t)| \leq |x_0| + |\int_0^t |f(s, x(s))|ds| \leq |x_0| + |\int_0^t C(s)ds| + |\int_0^t D(s)|x(s)|ds|$. Sea ahora $T > 0$ tal que $|t| \leq T$. Sean C_T, D_T los maximos de C, D en $[-T, T]$. Entonces lo que se tiene es que:

$$|x(t)| \leq |x_0| + TC_T + D_T| \int_0^t |x(s)|ds| \qquad (1)$$

Si denotamos $u(t) = \int_0^t |x(s)|ds$, entonces $u'(t) = |x(t)| \leq |x_0| + TC_T + D_T u(t)$. Ahora resolvemos esta *desigualdad diferencial*: sea $M_T = TC_T + |x_0|$. Lo que tenemos es que $(e^{-D_T t}u(t))' = e^{-D_T t}(u' - D_T u) \leq M_T e^{-D_T t}$. Integrando y despejando: $u(t) \leq \frac{M_T}{D_T}(e^{D_T t} - 1)$. Aplicando ahora esta expresión en (1), sigue que $|x(t)| \leq M_T e^{D_T t}$, que es exponencial y solo tiende a ∞ si $t \to \infty$ y hemos acabado. □

4.2. Dependencia de parámetros. Lema de Gronwall.

A veces $F(t, X, \lambda)$ depende de un cierto parámetro (por ejemplo, una constante física). Nos interesa ver cómo cambia la solución del problema de valores iniciales si cambia el parámetro. Podemos escribir $Y = (X, \lambda)$ donde λ es ese parámetro, y entonces $Y' = (X', 0) = (F(t, X, \lambda), 0) = (F(t, Y), 0)$ luego realmente el problema es $Y' = F(t, Y)$, con $Y(t_0) = (X_0, \lambda)$. Luego la pregunta realmente es: **¿cómo varían las soluciones si variamos el valor inicial?**.

Es decir, dado el problema $X' = F(t, X)$, $X(a) = \xi$, ¿cómo cambia X si cambiamos ξ?.

Lema 4 (Gronwall)**.** *Sean $u, f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continuas, $g \geq 0$. Supongamos que $u(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)u(s)ds$. Entonces vale la cota:*

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(u)du}ds$$

Esto nos permite convertir una cota de u que involucra la integral de u, en algo que no lo hace.

Proposición 36. *Sea $F : [a, b] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ continua y lipschitz uniformemente en la primera variable, y supongamos que $|X_j'(t) - F(t, X_j(t))| \leq \epsilon_j$ para $t \in [a, b]$, $j \in \{1, 2\}$. Entonces, $|X_1(t) - X_2(t)| \leq |X_1(a) - X_2(a)|e^{L(t-a)} + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\frac{e^{L(t-a)-1}}{L}$.*

Esta proposición indica cómo de cerca están dos *cuasi-soluciones* al problema. Si son, de hecho, soluciones, es decir, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, entonces uno de los términos de la cota desaparece y vemos que la diferencia solo depende de cuán cerca estén los valores iniciales: valores iniciales cercanos indican soluciones cercanas (cerca de a).

Proposición 37. *Sean $F, \hat{F}$ que satisfacen las condiciones habituales (continuas, lipschitz uniformemente en la primera variable) y $X, \hat{X}$ dos soluciones de $X' = F(t, X)$, $\hat{X}' = F(t, \hat{X})$, con* ***mismo valor inicial****. Supongamos que $|\hat{F}(t, \hat{X}(t)) - F(t, \hat{X}(t))| \leq \epsilon$, $t \in [a, b]$. Entonces $|X(t) - \hat{X}(t)| \leq \epsilon\frac{e^{L(t-a)-1}}{L}$.*

Esta proposición relaciona dos problemas en los que varía ligeramente la función F.

Proposición 38 (Peano)**.** *Sea $F : [t_0, t_0 + T] \times \overline{B}_r(x_0) \mapsto \mathbb{R}^d$ continua y sea M la cota para F, es decir $|F(t, x)| \leq M$ en su dominio. Entonces el problema $X' = F(t, X)$, $X(t_0) = X_0$ tiene una solución que está definida, al menos, en $[t_0, t_0 + \text{mín}\{T, \frac{r}{M}\}]$. (No garantiza unicidad).*

5. Sistemas autónomos

Definición 26. Un **sistema autónomo** es una expresión de la forma $X'(t) = F(X(t))$, con $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, Ω un abierto en $\mathbb{R}^d$. Se quiere encontrar $X : I \subset \mathbb{R} \mapsto \Omega$.

Recordemos que un sistema no autónomo puede convertirse en uno autónomo añadiendo la variable t, es decir, definiendo $Y = (t, X(t))$ y por tanto, si $X'(t) = F(t, X)$, sigue que $Y' = (1, F(t, X)) = (1, F(Y))$.

Observación 15 (Resultados de Existencia y Unicidad particularizados). Si $F(X) \in \mathcal{C}^1$ o Localmente Lipschitz, entonces tenemos existencia y unicidad local, es decir, solución única $X : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mapsto \Omega$.

Si el intervalo maximal de prolongación es (a, b), y por ejemplo $b \neq +\infty$, entonces $X(t) \to \partial\Omega$ (entendiendo por esto que $X(t)$ se sale de cualquier compacto prefijado en Ω) si $t \to b^-$. Por lo general, $\Omega = \mathbb{R}^d$, luego $X(t) \to \infty$ si $t \to b^-$ en ese caso. Análogo por la derecha de a.

Si interpretamos F como un campo vectorial en $\mathbb{R}^d$, entonces lo que buscamos son sus *líneas de flujo* o *curvas integrales*, es decir las curvas $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^d$ tales que $\gamma'(s) = F(\gamma(s))$.

Definición 27. Una **trayectoria** es la imagen de una solución al sistema $X' = F(X)$, es decir, es el subconjunto de Ω que describe X.

Las trayectorias pueden obtenerse muchas veces sin resolver el sistema autónomo, es decir, sin obtener la función de t. Por ejemplo, el sistema: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ nos permite lo siguiente: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-x}{y}$, luego $xdx + ydy = 0$. Se resuelve la ecuación exacta resultante, y se obtiene $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$, que indica que (x, y) describen una trayectoria circular, pese a no haberlas obtenido explícitamente como función de t. En general, se puede hacer a través de este uso del teorema de la función inversa y la regla de la cadena (siempre que la función a invertir no se anule). Donde se anule la x', podemos usar el teorema de la función inversa invirtiendo y'. Los puntos donde no se puede hacer nada de esto es donde se anulen simultáneamente x' e y':

Definición 28. El punto X_0 es un **punto crítico o de equilibrio** del sistema autónomo si $F(X_0) = 0$.

Proposición 39. *Si X_0 es un crítico del sistema $X' = F(X)$, vale la solución $X(t) \equiv X_0$ en todo punto. La trayectoria es un único punto.*

Demostración. $X'(t) = 0 = F(X_0) = F(X)$ por definición. □

Proposición 40. *Dado el sistema $X' = F(X)$.*

- *Si $X(t)$ es solución, también lo es $\overline{X}(t) = X(t + a)$, para $a \in \mathbb{R}$, y describe la misma trayectoria.*
- *Si dos soluciones X, Y del sistema describen la misma trayectoria, entonces $X(t) = Y(t + a)$ para a fijo.*
- *Dos trayectorias de dos soluciones coinciden o son disjuntas.*
- *Las soluciones de trayectorias cerradas son periódicas.*

Demostración. Para 1, basta con ver que $\overline{X}'(t) = X'(t + a) = F(X(t + a)) = F(\overline{X}(a))$. Para 2, tenemos que $X(t_1) = Y(t_2)$ para ciertos tiempos t_1 y t_2. Definiendo $\overline{X}(t) = X(t+(t_1-t_2))$, observamos que $\overline{X}(t_2) = X(t_1) = Y(t_2)$, y ambas resuelven el sistema, luego por unicidad sigue que $X(t+(t_1-t_2)) = Y(t)$. Esto también prueba el apartado 3, dado que solo hemos usado que las trayectorias coinciden en un único punto, luego dos soluciones que se cortan son la misma desplazada en el tiempo, y por tanto describen la misma trayectoria. Para 4, si tenemos X con una trayectoria cerrada, entonces en dos instantes dados, $X(t_1) = X(t_2)$, y aplicando lo demostrado anteriormente, se tiene que $X(t) = X(t + (t_1 - t_2))$ luego es periódica. □

Supongamos que tenemos una ecuación de orden 2 en $\mathbb{R}$, $x'' = f(x)$ con $f \in \mathcal{C}^1$. La reescribimos al sistema $(x, y)' = (y, f(x))$. Para hallar las trayectorias, hacemos lo que se mencionó anteriormente: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}$, de donde se deduce que la trayectoria es $\frac{y^2}{2} + U(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, siendo $U(x)$ una primitiva de $-f(x)$, es decir, $U(x)' = -f(x)$. Se dice que U es el **potencial** y la expresión $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ es la **energía**, que es una **cantidad conservada** dado que se mantiene constante a lo largo de las trayectorias. También se conoce como **integral primera**.

Esas trayectorias pueden reescribirse como $y = \pm\sqrt{2(c - U(x))}$, y por tanto solo está definida en los x tal que $U(x) \le c$. Esta c se conoce como **nivel de energía**.
En general pueden considerarse este tipo de **sistemas conservativos** en más dimensiones: $X'' = -\nabla U(X)$, para un potencial $U : \Omega \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Podemos convertirlo en un sistema autónomo de la misma manera, que será de dimensión $2d$: $(X, Y)' = (Y, -\nabla U(X))$. En ese caso:

Proposición 41. *Se tiene que $\frac{\|Y\|_2^2}{2} + U(X)$ es constante a lo largo de las trayectorias del sistema conservativo que surge de $X'' = -\nabla U(X)$.*

Demostración. Derivando la expresión con respecto de t, se obtiene como derivada $Y \cdot Y' + \nabla U(X) \cdot X' = Y \cdot (-\nabla U(X) + \nabla U(X)) = 0$, luego es constante. $\square$

En este caso esa cantidad conservada no determina la trayectoria, solo indica una hipersuperficie donde ha de moverse la trayectoria. Necesitaríamos $2d-1$ hipersuperficies para obtener la trayectoria como intersección de todas ellas, es decir, $2d-1$ cantidades conservadas.

Proposición 42. *Sea $X : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}^d$ tal que resuelve el sistema $X' = F(X)$, con $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ continua y $X(t) \to p \in \Omega$ cuando $t \to \infty$. Entonces p es un punto crítico, es decir, $F(p) = 0$.*

Demostración. Tenemos que $X(t) = X(a) + \int_a^t X'(s)ds$. Tomando el límite cuando $t \to \infty$ en ambos lados, se obtiene que $p = \int_a^\infty X'(s)ds = \int_a^\infty F(X(s))ds$. Para que esta integral tenga un valor finito, dado que $F(X(s))$ es convergente (si no esto no vale), ha de darse que $F(X(s)) \to 0$ si $s \to \infty$. Pero, por ser F continua, si $s \to \infty$, entonces $X(s) \to p$ y por tanto $F(X(s)) \to F(p)$. Por unicidad del límite, $F(p) = 0$. $\square$

5.1. Linearización de sistemas autónomos

Definición 29. Un punto crítico de $x' = f$, $y' = g$ es **no singular** si:

$$\det \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Proposición 43. *Los puntos críticos no singulares son aislados.*

Demostración. $(x, y) \to (f(x, y), g(x, y))$ es invertible en un entorno del (x_0, y_0) por el teorema de la función inversa. $\square$

Consideramos ahora el sistema $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$. Tenemos, en (x_0, y_0) un crítico no singular, que $f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + O((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$, y similar para g. Como $f(x_0, y_0) = 0$, si ponemos $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, $a = f_x(x_0, y_0)$, $b = f_y(x_0, y_0)$, $c = g_x(x_0, y_0)$, $d = g_y(x_0, y_0)$, tenemos que el sistema cerca del punto crítico es aproximadamente:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Se denomina **sistema lineal asociado en el punto crítico** (x_0, y_0). El objetivo es ver el comportamiento de las soluciones cerca del punto crítico utilizando este sistema. El único punto crítico de este sistema asociado es el $(0, 0)$, dado que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ al ser no singular el punto. Es decir, el único crítico del sistema lineal asociado es el punto que corresponde al crítico original.

Definición 30. Un punto crítico (x_0, y_0) de un sistema $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, es **estable** si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x(t_0) - x_0| + |y(t_0) - y_0| < \delta$, entonces $|x(t) - x_0| + |y(t) - t_0| < \epsilon \ \forall t > t_0$.

Es asintóticamente estable si $\exists r > 0$ tal que si $|x(t_0) - x_0| + |y(t_0) - y_0| < r$, entonces $(x(t), y(t)) \to (x_0, y_0)$ cuanto $t \to \infty$. Es por tanto más fuerte que estable.

Para clasificar los puntos críticos usaremos el lineal asociado, en función de los autovalores de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- Para **autovalores reales** $\lambda_1 \neq \lambda_2$, no nulos, sabemos que la solución general (u, v) es $\alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_2$.

Consideramos $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Si α o β son cero, la trayectoria es una semirrecta en la dirección de v_2 o v_1 respectivamente. Si ambos son no nulos, y escribimos las coordenadas $z = \alpha e^{\lambda_1 t}$, $w = \beta e^{\lambda_2 t}$, tenemos que $\frac{w}{\beta} = (\frac{z}{\alpha})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, una ecuación de *tipo parábola* (obviamente el exponente depende de λ_1 y λ_2, pero es positivo en todo caso). Se corresponde con un **nodo inestable**, dado que las trayectorias comienzan en el punto crítico, y se alejan de él, dado que como los λ son positivos, según aumenta t, aumentan z y w. (Y para t cercano a $-\infty$, se tiene $z = w = 0$)

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, tenemos los mismos cálculos que previamente, pero ahora las trayectorias comienzan lejanas al crítico, y tienden hacia él (por la misma discusión en la t hecha anteriormente). Por tanto el crítico es **asintóticamente estable**.

Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces, si z o w son cero (por serlo α o β), tenemos las mismas semirrectas que anteriormente, pero una de ellas se acerca (la correspondiente a $w = 0$, dado que $z \to 0$ si $t \to \infty$), y la otra se aleja del punto crítico. Si ninguna es cero, la ecuación $\frac{w}{\beta} = (\frac{z}{\alpha})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ pasa a tener el exponente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, que se corresponde a $\frac{w}{\beta}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = 1$, que es una ecuación de *tipo hiperbólico* (sería una hipérbola salvo el exponente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$), y no tienden ni se alejan del crítico (del mismo modo en que una hipérbola $xy = 1$ no se acerca ni aleja al $(0, 0)$). El punto es **inestable** pese a que algunas trayectorias (unas de las semirrectas anteriores, las que van en dirección del v_1 con $\lambda_1 > 0$) tiendan al crítico.

Obsérvese que en todos los casos, el signo de α y β determina en qué cuadrante está la trayectoria, dado que siempre se tiene $e^{\lambda_i t} \geq 0$, luego coinciden con el signo de z y w.

- Si los **autovalores reales son iguales y los autovectores forman base**, entonces $\lambda_1 = \lambda_2$, han de tener forzosamente el mismo signo, luego estamos en los casos previos, pero la ecuación pasa a ser (sustituyendo en la ya obtenida) $\frac{w}{\beta} = \frac{z}{\alpha}$, luego las trayectorias, en la base v_1, v_2, forman rectas. Si el signo de ambos autovalores es negativo, como antes, convergen al origen (*estable*), y si es positivo, se alejan del origen (**inestable**).

- Si los **autovalores reales son iguales y los autovectores no forman base**, entonces tenemos la solución general es $\alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_1 t}(v_2 + t v_1)$. Por tanto, si la expresamos una vez más en coordenadas $z v_1 + w v_2$, sigue que $z = e^{\lambda_1 t}(\alpha + \beta t)$, y $w = \beta e^{\lambda_1 t}$. Si $w = 0$, entonces $\pm z > 0$, obteniéndose el eje horizontal. Si no, hacemos como antes y $\frac{z}{w} = \frac{\alpha}{\beta} + t = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\lambda_1}\log(\frac{w}{\beta})$. Esto se conoce como **punto impropio**. Para $\lambda_1 > 0$ es **inestable**, y para $\lambda_1 < 0$ es **asintóticamente estable**, analizando z y w como siempre.

- Si los **autovalores** son complejos, $\lambda = a \pm ib$, con $b > 0$, tenemos soluciones $\alpha\Re(e^{\lambda t} v) + \beta\Im(e^{\lambda t} v)$. Si $v = v_1 + i v_2$, se tiene que la expresión general es:

$$e^{at}(\alpha\cos(bt) + \beta\sin(bt))v_1 + e^{at}(\alpha\cos(bt) - \beta\sin(bt))v_2$$

Lo expresamos de nuevo como $z v_1 + w v_2$, para esos z y w.

Si $a = 0$ (es decir, el autovalor es imaginario puro), tenemos que $z^2 + w^2 = \alpha^2 + \beta^2$, y entonces las trayectorias se mueven de forma circular en torno al punto crítico. Al deshacer a coordenadas u, v son elipses. Estos puntos críticos se denominan **centros**.

Si $a > 0$, entonces e^{at} crece con t, luego se obtiene lo mismo de antes, pero se va alejando del crítico con t. Se trata de una **espiral inestable**.

Si $a < 0$, entonces e^{at} decrece con t y, razonando como anteriormente, es una **espiral asintóticamente estable**.

Para obtener fácilmente los autovalores, podemos usar la traza $T = \lambda_1 + \lambda_2$ y el determinante $D = \lambda_1\lambda_2$. En ese caso, $0 = \lambda^2 - T\lambda + D$ es la ecuación que tiene como soluciones los autovalores, y podemos hallarlos resolviéndola. Conviene entonces resaltar que, como el crítico era estable $\iff Re(\lambda_i) \leq 0$, y asintóticamente estable $\iff Re(\lambda_i) < 0$, entonces es estable $\iff T \leq 0,\ D > 0$. Es estable asintóticamente $\iff T < 0,\ D > 0$.

Proposición 44 (Hartman-Grobman)**.** *El aspecto de las trayectorias del sistema original cerca del punto crítico no singular, (x_0, y_0), es similar al de su linearización, cerca de $(0,0)$, salvo en los casos $\lambda_1 = \lambda_2$ o $Re(\lambda_i) = 0$.*

En el caso $\lambda_1 = \lambda_2$, pueden aparecer nodos de cualquier tipo pero manteniendo la estabilidad.

En $Re(\lambda_i) = 0$, pueden ser centros, espirales estables, espirales inestables o algo intermedio.

5.2. Método directo de Liapunov

Vamos a ver otra forma de analizar la estabilidad de los puntos críticos sin pasar al sistema linealizado (por ejemplo, para casos en los que no aplica el teorema de Hartman-Grobman, o para puntos singulares). La idea es buscar una función de energía (en el sentido visto anteriormente) en la que el punto crítico sea un mínimo.

Definición 31. Supongamos que $E : B_p(r) \mapsto \mathbb{R}$. Se tiene que E es **definida positiva** en p si $E(p) = 0$ y $E(x) > 0$ para $x \neq 0$. Es **semidefinida positiva** si $E(x) \geq 0\ \forall x \in B_p(r)$. Si las desigualdades son a la inversa, se dice definida o semidefinida negativa, respectivamente.

Definición 32. Sea $(x,y)' = (f,g)$ un sistema autónomo. Sea E una función $\mathcal{C}^1$ **en un entorno de** $p \subset \mathbb{R}^2$ definida positiva. Si esa función es tal que $E_x f + E_y g$ es semidefinida negativa en p se denomina **función de Liapunov débil**. Si $E_x f + E_y g$ es definida negativa en p, se denomina **función de Liapunov fuerte**.

La idea es que la cantidad $e = E(x(t), y(t))$ en una solución (x,y) del sistema autónomo, verifica que $\frac{d}{dt}e = (E_x f + E_y g)(x(t), y(t))$, luego las funciones de Liapunov hacen que e decrezca en las trayectorias solución. Como en p está el mínimo de E (es definida positiva), se espera entonces que, como e decrece en (x,y), la trayectoria (x,y) tienda a p.

Proposición 45. *Si E es una función de Liapunov débil para p en un sistema autónomo, entonces p es estable. Si es una función de Liapunov fuerte, entonces p es asintóticamente estable.*

5.3. Trayectorias cerradas

Ya sabemos que las trayectorias cerradas son soluciones periódicas. Hemos visto que aparecían en distintos ejemplos:

1. Sistemas conservativos $x'' = -U'(x)$, cuyas trayectorias eran $\frac{y^2}{2} + U(x) = 0$. Si $U'(x_0) = 0$, es decir, x_0 es crítico, y $U(x_0) > 0$, entonces $(x_0, 0)$ es un centro (atendiendo a la linearización).

2. Sistemas que en polares se convierten en $r' = h(r)$, $\theta' = \theta_0$. Si $h(r_0) = 0$, entonces tenemos la trayectoria cerrada $r = r_0$.

Trabajaremos, como es usual, con el sistema $(x,y)' = (f,g)$, con $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, siendo Ω un abierto conexo (o *región*).

Proposición 46 (Bendixon)**.** *Sea Ω una región simplemente conexa. Consideramos el sistema autónomo $(x,y)' = (f,g)$. Si $f_x + g_y$ no se anula en Ω, entonces el sistema no admite ninguna trayectoria cerrada en esa región.*

Demostración. Supongamos que existiese tal trayectoria C. En ese caso C es una curva $\mathcal{C}^1$ simple cerrada, luego el teorema de Green indica que en la región R que delimita, se tiene que: $\int_C fdy - gdx = \pm \iint_R f_x + g_y dxdy$, donde el signo depende de la orientación de C. Como $f_x + g_y$ es continua y no se anula, entonces deducimos que siempre tiene el mismo signo y entonces su integral es no nula. Por otro lado, $\int_C fdy - gdx = \int_0^T f(x(y), y(t))y'(t) - g(x(t), y(t))x'(t)dt = \int_0^T fg - gfdt = 0$, lo que contradice lo dicho anteriormente. □

Observación 16. Las trayectorias del sistema $(x, y)' = (f, g)$ coinciden con las de $(x, y)' = (hf, hg)$, si $h \in \mathcal{C}^1$, $h \neq 0$ en todo punto. Entonces, podemos aplicar el mismo argumento que antes para $(hf)_x+(hg)_y$. Esto se conoce como **criterio de Dulac** y su dificultad radica en encontrar la función h.

Proposición 47 (Poincaré-Bendixon)**.** *Consideramos el sistema autónomo $(x, y)' = (f, g)$ con $f, g \in \mathcal{C}^1$ en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si Ω es simplemente conexo y C es una trayectoria cerrada del sistema, entonces C encierra un punto crítico del sistema.*

*Asimismo, dado $R \subset \Omega$ compacto sin puntos críticos del sistema, si existe una trayectoria del sistema que comienza en R y permanece en R, ha de ser que C sea cerrada o bien se acerca en espiral a una trayectoria cerrada, llamada **ciclo límite**.*

En cualquier caso se garantiza la existencia de una trayectoria cerrada en R. Otra forma de enunciarlo, más avanzada y reveladora, es la siguiente:

Teorema 4 (Poincaré-Bendixon)**.** *Si una trayectoria γ del sistema $x' = f$, $y' = g$ entra en una región compacta R y no sale de la misma, se da una de las siguientes:*

1. *γ converge a un punto (por tanto, crítico).*
2. *γ converge a un ciclo límite (trayectoria cerrada).*
3. *γ converge a un policiclo, que es un conjunto de trayectorias separadas por puntos críticos cuya unión forma una curva cerrada. Por ejemplo, si estas fuesen trayectorias, formarían un policiclo: el punto $(1, 0)$, el punto $(-1, 0)$, la semicircunferencia unidad superior y la semicircunferencia unidad inferior.*

Observación 17. Si se dan las condiciones del criterio de Bendixon para la no existencia de trayectorias cerradas, tampoco pueden existir policiclos, puesto que se pueden considerar como una curva cerrada y replicar la misma demostración.

Definición 33. Un sistema del tipo $(x, y)' = -\nabla G$, con $G \in \mathcal{C}^2$, se denomina **sistema gradiente**. Es decir, $x' = -G_x$ e $y' = -G_y$.

Sabemos que, si $(x, y)' = (f, g)$, una condición necesaria es que $f_y = g_x$. Es suficiente, además, si se trabaja en un abierto simplemente conexo.

La ventaja de estos sistemas es que $\frac{d}{dt}(G(x(t), y(t))) = G_x x' + G_y y' = -G_x^2 - G_y^2 = -\|\nabla G\|^2 \leq 0$. Es decir, a lo largo de las trayectorias, la G es no creciente. Por tanto, si G admite un mínimo estricto (x_0, y_0), además de ser un punto crítico porque $\nabla G(x_0, y_0) = 0$, ha de ser un punto crítico estable a través de la función de Liapunov débil, G.

Asimismo, **no** puede haber trayectorias cerradas no triviales (es decir que no sean puntos críticos). Esto es así porque si la tuviese, siendo $(x(t), y(t))$ la solución periódica que la ocasiona, tenemos como ya hemos visto que $e(t) = G(x(t), y(t))$ decrece. Como la solución es periódica, debe ser que $e(t)$ también es periódica, y al ser decreciente se deduce que es constante, luego $e'(t) = 0$ y por tanto $\|\nabla G\|^2 = 0$, o sea $G_x = G_y = 0$ en todo punto de la trayectoria, luego todos los puntos de la trayectoria son críticos.

Definición 34. Un sistema de tipo $(x,y)' = (H_y, -H_x)$ para cierta función $H \in \mathcal{C}^2$ se denomina **hamiltoniano**.

Por ejemplo, las ecuaciones conservativas $x'' = f$ que convertíamos en $(x,y)' = (y,f)$, forman un sistema hamiltoniano para $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \int_a^x f$.

La ventaja que tienen es que $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = H_x x' + H_y y' = H_x H_y - H_x H_y = 0$ a lo largo de las trayectorias, luego el hamiltoniano (la función H) es constante a lo largo de las trayectorias. Obsérvese que $\nabla H = (-g, f)$. Luego si un sistema es hamiltoniano se da que $f_x = H_{yx} = H_{xy} = -g_y$. Esta condición es suficiente en un sistema hamiltoniano.